"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Cantidades infinitamente pequeñas y razón instantánea de cambio

Tesis que presenta

Guadalupe Candelario Félix Sandoval

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias

con especialidad en Matemática Educativa

Director de tesis:

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Hermosillo, Sonora, México Diciembre 2020

AGRADECIMIENTOS

A mi mamá, por ser mi pilar más grande y el apoyo incondicional ante cualquier cosa.

A mis mejores amigos, por siempre estar ahí cuando los necesité en los momentos más difíciles.

A mi director de tesis, por la paciencia y la consideración en todo momento a la hora de trabajar, y al "Guty", por enseñarme tantísimas cosas de diferentes estilos.

A José Ramón Jiménez, por su gran aporte a este trabajo y mostrar su apoyo y disposición en todo momento que lo necesité.

A los diferentes miembros del Comité Revisor, por todos los comentarios en cada coloquio que permitieron que este trabajo mejorara.
A los diferentes profesores, por sus enseñanzas, paciencia y disposición.

A mis compañeros y amigos del curso, por todos los momentos compartidos y las enseñanzas.

A Conacyt, por su apoyo a lo largo de toda mi estadía en el postgrado.

Índice

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la razón instantánea de cambio con un enfoque infinitesimal, dirigida a estudiantes del curso “Cálculo Diferencial e Integral I” del área de Ingeniería de la Universidad de Sonora., cuyo propósito es promover la construcción del significado de la razón instantánea de cambio como una variación infinitesimal, a través de la resolución de problemas de contexto extramatemático (fenómenos físicos) e intramatemático (numéricos, algebraicos y geométricos).

El Cálculo es una asignatura que se presenta en el currículo de distintas carreras a nivel Superior, en el que los objetos matemáticos de interés, como los de función y razón instantánea de cambio, juegan un papel importante en el estudio de fenómenos de variación. Este tipo de fenómenos son de interés en diferentes campos del saber y el hacer humanos, como la física, la química, la ingeniería, entre otras.

Desde nuestra experiencia empírica como estudiante de ingeniería, hemos podido percibir las diversas dificultades en el Cálculo, entre ellas la de consolidar significados de los objetos matemáticos que intervienen y emergen dentro del curso, aplicar estos significados para la resolución de problemas extramatemáticos, entre otros. En particular el enfoque de límite en el tratamiento de la derivada es una de las dificultades recurrentes entre los estudiantes. Revisando trabajos de investigación en diversas fuentes obtuvimos resultados que evidenciaban nuestras experiencias.

En el capítulo uno abordamos la problemática de la enseñanza, la justificación de nuestra propuesta en dicha problemática y el objetivo tanto general como específicos de nuestra propuesta. Mostraremos algunos resultados de investigación con respecto a las dificultades que presentan los estudiantes durante el estudio de la asignatura del Cálculo, en particular con el enfoque de límite. También mostraremos una introducción sobre el enfoque infinitesimal, ya que nuestra propuesta didáctica se desarrolló con base en dicho enfoque, se muestran los antecedentes del cálculo infinitesimal con la intención de mostrar sus orígenes y los resultados que se lograron con ayuda de este enfoque, así como la razón instantánea de cambio con infinitesimales. El objetivo tanto general como específico de nuestra propuesta son los siguientes:

Objetivo general

Diseñar actividades didácticas para la enseñanza de la razón instantánea de cambio con el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, dirigida a estudiantes del curso “Cálculo Diferencial e Integral I” del área de Ingeniería.

Objetivos específicos

1.- Determinar los propósitos curriculares y contenidos matemáticos asociados al estudio de la razón instantánea de cambio en el curso “Cálculo Diferencial e Integral I” del área de Ingeniería, estableciendo el significado institucional pretendido por el currículo.

2.- Caracterizar a la razón instantánea de cambio desde un enfoque infinitesimal, estableciendo el significado institucional pretendido por el diseño.

3.- Diseñar e implementar actividades para el estudio de la razón instantánea de cambio con un enfoque infinitesimal.

4.- Valorar los diseños de estas actividades didácticas a través de su implementación y reformularlas para mejorarlas.

En el capítulo dos mostraremos los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, conocido como EOS. Estos elementos sirvieron de apoyo tanto para el diseño de las actividades didácticas, como para la evaluación de nuestra propuesta didáctica en general. En particular, la valoración sobre las nociones de *objeto, práctica y significado*. Entre los elementos que nos sirvieron como base y estructuración para el diseño de la propuesta están: El significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido.

Una aclaración pertinente es la consideración de que el significado institucional de referencia al que hacemos alusión en nuestro trabajo se refiere a la identificación de las problemáticas que se quieren abordar y resolver en el plan de estudios del curso de Cálculo Diferencial e Integral I de las carreras de ingeniería, de tal manera que aunque nuestra propuesta se diseña con un enfoque diferente, se promueve la resolución de las mismas problemáticas, particularmente la caracterización y utilización de la noción “razón instantánea de cambio”. De cualquier forma señalaremos en el capítulo correspondiente, los objetos matemáticos primarios que se utilizan principalmente para nuestro diseño y cuyo análisis más profundo constituye el significado institucional de referencia para el estudio del cálculo mediante el uso de magnitudes infinitamente pequeñas.

Con respecto a los contenidos matemáticos y didácticos utilizamos los indicadores de la *idoneidad didáctica* y sus dimensiones. De igual manera, la valoración para la propuesta y sus posibles mejoras se hicieron con base en la *idoneidad didáctica*.

Es importante mencionar que en el EOS se considera como objeto matemático a cualquiera de los siguientes seis tipos, y sus combinaciones:

- *Situaciones*, entendidas como problemas matemáticos (más o menos abiertos), problemas extra-matemáticos (o aplicaciones), ejercicios, ejemplos, etc.
- *Lenguaje*, en diversas formas o representaciones semióticas: verbal, numérico, gráfico, geométrico, analítico (notación conjuntista, cuantificadores, expresiones algebraicas, notación del límite, etc.), entre otros.
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos como teoremas, corolarios, propiedades, etc.).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).
- *Conceptos (*expresados por medio de *definiciones o descripciones*).

Estos tipos de objetos se conocen como objetos primarios o componentes del significado. Si emergen durante la realización de las prácticas desarrolladas al resolver algún campo de problemas, se les llama *objetos emergentes*, y si son objetos que se utilizan para hacer emerger nuevos objetos, se les llama *objetos intervinientes*.

El *significado institucional pretendido* para la razón instantánea de cambio en nuestra propuesta considera como objetos intervinientes a los objetos básicos de aritmética, álgebra, y geometría de los niveles escolares básicos como media superior. Por ejemplo, *conceptos* como área, perímetro, velocidad, distancia, incremento; *lenguaje* como la expresión analítica del área y el perímetro, la velocidad final de un objeto, la graficación de valores en una recta numérica; *procedimientos* como utilizar las expresiones anteriores para colocar valores obtenidos en una recta numérica con parámetros determinados, calcular el área de una figura geométrica con incrementos; *proposiciones* como un infinitesimal al cuadrado es igual a cero, el producto de un número infinitesimal por un número natural es un número infinitesimal; *procedimientos* como utilizar expresiones gráficas para identificar valores en una recta numérica, realizar operaciones aritméticas de suma y multiplicación con infinitesimales, desarrollar algebraicamente productos notables; *argumentos* intuitivos y *situaciones* intramatemática como figuras geométricas y extramatemáticas como la contaminación global en el mundo, la contaminación generada en México, la velocidad de una motocicleta, la Ley de Boyle, entre otros.

Con la intención de que los estudiantes opinen, participen y se interesen en la solución de las actividades, planteamos las situaciones problema extramatemáticas que involucren contextos propios de las problemáticas y cursos de carreras de Ingeniería.

Los contextos extramatemáticos que elegimos para las situaciones problema de nuestro trabajo, son con base en los contenidos de interés para los estudiantes, de tal manera que éstos opinen, participen y se interesen en resolver los problemas que planteamos. De esta manera, buscamos la emergencia gradual de los siguientes objetos matemáticos:

Situaciones:

- Comparaciones de tamaño entre dos magnitudes.
- Incrementos muy pequeños en diferentes figuras geométricas.
- La velocidad de movimiento de un objeto en cualquier momento.

Lenguaje:

- Expresiones verbales, analíticas, gráficas y numéricas de las funciones involucradas en los problemas planteados.
- Términos como infinitesimal, infinitésimo, incremento infinitesimal, diferencial.

Procedimiento:

- Determinar la relatividad que hay entre las magnitudes cuando estas son comparadas unas con otras.
- Identificar las propiedades infinitesimales y realizar operaciones aritméticas y algebraicas con base en dichas propiedades.
- Graficar los incrementos infinitesimales en diversas figuras geométricas.
- Identificar la característica polisémica con la que empleamos el símbolo δ en tanto a magnitud infinitesimal, y su estrecha relación con la noción de *diferencial* como el cociente de dos magnitudes infinitesimales y la utilización de ambos para la

resolución de los problemas planteados.

Proposiciones:

- Un número infinitesimal cuenta con las siguientes propiedades:
  - Se representa con el símbolo δ
  - $\delta > 0$
  - $\delta^2 = 0$
- Para todo número real mayor a cero, habrá uno o más números infinitamente pequeños que sea mayor a cero, pero menos a dicho número real. O bien, $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x \rightarrow 0 < \delta < x$.
- El diferencial de una suma de variables, es la suma de sus diferenciales.
- El diferencial de un producto de variables, es la suma de productos resultantes del diferencial de la primera variable por la segunda variable y la primera variable por el diferencial de la segunda variable.

Argumentos

- Los argumentos que esperamos que se apliquen durante el desarrollo de las secuencias didácticas serán con base en el lenguaje numérico y algebraico, las identificaciones y expresiones de los infinitesimales con base en los contextos planteados.

Conceptos:

- Números pequeños, grandes muy pequeños y muy grandes, números infinitesimales, variación infinitesimal, variable independiente, variable dependiente, *diferencial*.

En el capítulo tres mostramos la estructuración de nuestra propuesta. Esta consta de seis secuencias didácticas que a su vez se componen de tres momentos o etapas cada una: Inicio, Desarrollo y Cierre. Estos apartados son conformados por diversas actividades que buscan una construcción progresiva de los objetos matemáticos promovidos por el *significado institucional pretendido.* Del mismo modo, hicimos un análisis *a priori* de la propuesta para valorar la idoneidad didáctica de la misma. Por último, mostramos una descripción de las hojas de trabajo y de la *trayectoria didáctica* de la propuesta que estamos realizando.

La estructuración de las secuencias didácticas, como se mencionó, incluye tres etapas que básicamente consisten en lo siguiente: *Inicio*, que es una actividad para familiarizar al estudiante con el contexto o hacer que éste refresque conocimientos necesarios para la siguiente etapa; *desarrollo*, el cual contiene actividades con el propósito de una construcción de nuevos conocimientos; *cierre,* en el cual se institucionalizan los objetos matemáticos.

En el capítulo cuatro se muestra la puesta en escena y lo sucedido en esta. Los elementos que se describen en dicho capítulo son los aspectos destacados dentro de la implementación, una narración breve de lo ocurrido en cada sesión que se ejecutó. Del mismo modo se plasman las modificaciones al diseño de las secuencias con base en lo analizado. Y por último la descripción del análisis *a posteriori* de los elementos que conforman a la idoneidad didáctica de nuestra propuesta.

En el último capítulo del trabajo, mostramos las conclusiones del trabajo, en las que incluyen la descripción del logro de los objetivos planteados en el primer capítulo de nuestro trabajo, así como algunos aspectos destacables del análisis de la idoneidad didáctica.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial

El Cálculo es de las ramas de la matemática que crea una ambivalencia importante en los alumnos, por un lado, es de las materias concebidas como la más complicada para los estudiantes, y a su vez, de las que más "respetadas", es decir, muchos alumnos desean poder decir: "Yo le entiendo a Cálculo."

Con bases empíricas en tanto estudiante en Ingeniería en Mecatrónica, podemos declarar que existen diversas dificultades para construir y comprender los objetos matemáticos involucrados, ya sea como intervinientes o emergentes en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I. Un ejemplo de ello es la derivada, que más allá de las distintas formas de tratar a este objeto, en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I en carreras de ingeniería se aborda de manera algorítmica utilizando el enfoque de límite, cuya única finalidad es el desarrollo de prácticas centradas en la manipulación algorítmica y mecanizada por medio de las reglas de derivación. Esta manera limita considerablemente al estudiante para formarse un significado de un objeto matemático de manera completa. Los profesores también se limitan a enseñar de esa forma, ya que se cree que los alumnos no tienen el desarrollo cognitivo para nada más, pues dentro del formalismo matemático existen cosas que los maestros evaden para que el alumno no se "espante". Mientras que los estudiantes como se mencionaba, invierten su capacidad en encontrar trucos que puedan memorizar para resolver exámenes, y se protegen de esas ideas que algunos profesores por comodidad deciden tener. Así los estudiantes aprueban el curso conociendo solamente cosas que probablemente olviden el siguiente curso, los maestros se esfuerzan un mínimo. Con base en esto, se puede decir que, sin plena conciencia de ello y sin intencionalidad, se entra al juego de, ellos hacen como que aprenden, y el profesor hace como que enseña.

En el tratamiento de la derivada, nuestro trabajo se centrará en la razón instantánea de cambio, la cual es un tema que se trata con poca profundidad en el currículo y no se le da la relevancia correspondiente en el plan de estudios.

Por lo tanto, la problemática principal en la cual se ubica este trabajo, corresponde al diseño de propuestas alternativas para la enseñanza de la razón instantánea de cambio con un enfoque distinto al acercamiento mediante el uso de límites, cuyas complicaciones para el aprendizaje han sido documentadas ampliamente, tema del que aportamos algunos elementos en el apartado siguiente.

1.1.1 Dificultades de los estudiantes en el estudio del cálculo

Artigue (1995) describe una serie de problemas relacionados al concepto límite de diferentes naturalezas, de los cuales se destacan los siguientes:

- Los problemas epistemológicos, que son aquellos conocimientos que, en lugar de ayudar a construir de una manera sólida el concepto, solo entorpecen su construcción.
- El sentido que evoca el término límite, es decir que hace pensar al alumno como una barrera intraspasable y no alcanzable. Con estas características se puede concluir que de ninguna forma el concepto límite puede catalogarse como un concepto intuitivo.
- En el sentido algebraico de algo finito, así como el principio de continuidad que transfiere las propiedades comunes de los elementos. No distinguir la diferencia que hay entre operación normal algebraica, con la de la noción del proceso infinito.
- En el sentido geométrico, el concepto de límite pierde claridad por la forma en que el proceso se lleva a cabo.
- En el carácter histórico sucede algo parecido a los problemas epistemológicos, ya que entorpecen al desarrollo de la construcción del concepto.
- En la formulación de preguntas que podrían evocar al concepto límite tiene posibilidades de tergiversar conceptos, incluso contrarios, como las sucesiones dinámicas y un número finito.
- Mencionar que el concepto límite es una proximidad o un área vecina quebranta solidez en el concepto y a su vez genera dificultades por el mal manejo del criterio.

También existen complicaciones para concebir el concepto límite mediante la transición de prácticas del álgebra a prácticas del cálculo, ya que la facilidad de identificar relaciones del tipo numérico/algebraico no son comparables a las relaciones álgebra/cálculo.

Como se mencionó anteriormente, el interés de este trabajo es diseñar una propuesta alternativa para el estudio de la razón instantánea de cambio usando cantidades infinitamente pequeñas, en lugar del tratamiento tradicional mediante la noción del límite de una función. Para la realización de este trabajo tomamos en cuenta la existencia de propuestas para un tratamiento diferente al tradicional.

1.2 Justificación

Como recursos distintos al enfoque del límite, está el trabajo de Cornu (1981), el cual nos proporciona una aproximación hacia la percepción que tienen los alumnos sobre el concepto de límite, con base en las ideas construidas por su enseñanza tradicional. Este autor señala que en el lenguaje común los estudiantes utilizan la idea de límite desde un punto de vista geométrico, donde el límite es algo que no se sobrepasa o se alcanza. Éste, a su vez, sostiene que la expresión *"tender hacia"* no forma parte del lenguaje natural construido por el alumno, ya que no termina de construir el concepto, es decir, para al alumno es difícil utilizar frases como: "*Ese amarillo tiende hacia el verde*" o "*Los trabajos de esa persona tienden a un premio nobel*", porque para el alumno, el límite se define como una cantidad numérica que jamás se logra alcanzar. Una consecuencia de esto es que, para algunos, en la noción del límite no está intrínseca la idea de variación, movimiento ni de aproximación a dicho límite.

Por lo anterior, Cornu (1981) concluyó que los alumnos de enseñanza media no alcanzan a construir definiciones formales en términos del límite, por lo que no les es posible crear articulaciones entre una definición y alguna otra representación de dicho concepto.

En el trabajo de tesis de Quesada Barrioseta (2014) se trata a la derivada como objeto de estudio de situaciones del día a día, como la velocidad de una motocicleta, entre otros fenómenos, con un método constructivista. Se realiza una secuencia didáctica conformada por diversas actividades entre ellas de optimización, la variación, entra otras cosas. Esto con la intención de mostrar una visión realista de las cosas con ayuda de los problemas de la vida cotidiana, así como también modelar problemas matemáticos con base en las fotografías. Este enfoque genera una idea diferente a la tradicional por la forma de estructuración que tienen las actividades, así como el enfoque que le da a las mismas.

Por otra parte Gonzales, y Radillo (2014) elaboraron una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada de una función mediante actividades de visualización. El trabajo consiste en que se muestre una interpretación geométrica que tiene de la derivada y pueda alcanzar una conversión y articulación entre las representaciones algebraicas, geométricas y numéricas.

También Schivo, Sgreccia, y Caligaris (2014) hablan de la visualización de la derivada, pero implementando el uso de la tecnología, en el que se pretende dar un acercamiento diferente al método tradicional. Se analiza si incide convenientemente en el aprendizaje de dicha asignatura la incorporación de la tecnología para una favorable interpretación geométrica de contenidos, así como, si la incorporación transforma en los alumnos ciertas actitudes con respecto a la materia y al concepto.

Debido a las numerosas complicaciones que genera el concepto límite y como propuesta de algo distinto al mismo, con este trabajo se propone tratar con las magnitudes infinitamente pequeñas, la cual consideramos es más intuitiva que la noción de límite. Como se mencionó, esta propuesta trata de minimizar todas esas complicaciones que la enseñanza tradicional mediante el método del límite genera, sin embargo, no estamos exentos de que haya complicaciones utilizando infinitesimales. Es decir, gran parte de nuestro trabajo también consistirá en la documentación y estudio de las consecuencias del uso de infinitesimales, ya que este método no ha sido explorado tanto, a diferencia del límite.

1.3 Enfoque infinitesimal

El Cálculo surge de la necesidad de calcular cantidades reales y relevantes en mecánica, cinemática y geometría. Por ejemplo, distancias, velocidades, longitudes, áreas y volúmenes. Los fundadores de esta nueva disciplina matemática conocida como Cálculo fueron Sir Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, años más tarde Leonard Euler quien consideraba los infinitésimos como el "*cero absoluto*" y al Cálculo como un "método para determinar cocientes de incrementos infinitesimales, los cuales se obtienen a partir de ciertas funciones cuando a la cantidad variable de la cual dependen se les da un incremento infinitesimal". Debido a estos pensamientos es que decimos que el tratamiento del cálculo con el uso del enfoque infinitesimal es más intuitivo que con el uso de límite. Un ejemplo de la intuición se aplica en la química. En ese caso, el manejo de infinitesimales se utiliza en la experimentación con átomos de diferentes materiales.

De manera tradicional, una función f de una variable x se escribe como $y = f(x)$. La variable dependiente y se considera una función de la variable independiente x. Esto permite tomar la derivada de y con respecto a x, es decir, la derivada de y en función de x, indicada por $\frac{\delta y}{\delta x}$. Esto es simplemente una forma diferente de escribir $f'(x)$, y es solo una de las muchas formas de denotar la derivada de una función:

Existen diferentes notaciones de la derivada de $y = f(x)$, sin embargo en este trabajo se utilizará la de uso para el enfoque infinitesimal, la cual trataremos al referirnos a la razón instantánea de cambio, como la razón promedio de cambio de dos cantidades infinitamente pequeñas, lo cual representamos mediante $\frac{\delta y}{\delta x}$. El motivo del uso de esta anotación en especial, es debido a las variaciones de las variables, ya sea solo independiente o dependiente, a la hora de tratar a la razón instantánea de cambio en algún problema. Esa es la forma en la que definió Euler. Hasta el día de hoy, esta es a menudo la forma en que la derivada es pensada y utilizada en campos fuera de las matemáticas, tales como física, ingeniería y otras, por su carácter más intuitivo.

Retomaremos la noción de números infinitesimales de J.L. Bell (1998) quien señala que un número δ es infinitesimal si cumple las siguientes características:

- $\delta \neq 0$.

- si $\delta > 0$, entonces δ es más pequeño que cualquier número real positivo.

- si $\delta < 0$, entonces δ es mayor que cualquier número real negativo.

- $\delta^2 = 0$ (y, por lo tanto, todas las potencias superiores de δ, como δ^3 y δ^4, también son 0).

Por las propiedades atribuidas a los números infinitesimales puede observarse que no son números reales y hacer un estudio formal de los mismos escapa a las intenciones y alcances del presente trabajo.

Nota: cualquier infinitesimal multiplicado por un número real distinto de cero también es un infinitesimal, mientras que 0 veces un infinitesimal es 0.

La definición anterior muestra que los infinitesimales son números que están más cerca de 0 que cualquier otro número positivo o negativo sin ser ellos mismos cero, y elevándolos a potencias mayores que o igual a 2 los hace 0. Entonces los infinitesimales no son números reales. Esto no es un problema, ya que el cálculo se ocupa de otros números, como el infinito, que no son reales. Uno puede pensar en infinitesimal como un número infinitamente pequeño arbitrariamente cercano a 0 pero sin ser 0.

Esto puede parecer una idea extraña, pero en realidad no es tan diferente a la ya conocida noción del límite, noción donde, digamos, se utiliza el símbolo Δx para representar una variación que puede "acercarse" a 0 pero no es 0.

Con respecto al cuadrado de un número infinitesimal (δ), se puede pensar en cómo una calculadora maneja los cuadrados de pequeños números. Por ejemplo, la mayoría de las calculadoras se puede mostrar el 10^{-8} como 0.00000001, y aún se puede agregar un 1 a eso para obtener 1.00000001. Pero cuando se muestra 10^{-8} y se le suma 1, la mayoría de las calculadoras muestran la suma como simplemente 1. La calculadora desprecia un número tan pequeño en comparación con uno natural. Ese es un ejemplo de un 0 que no es 0.

La letra δ tiene un significado polisémico, ya que puede tratarse de una magnitud infinitamente pequeña, pero a su vez como una variación infinitamente pequeña de alguna variable. Cuando se asocia esta letra a alguna variable, entonces esta es tratada como una variación. Por ejemplo, δx y δy.

Como ya se mencionó, δ no es cero, y otra diferencia a destacar sobre ello es la siguiente: al operar un número natural como el 2 con 0 y un δx infinitesimal se obtiene lo siguiente: $2 \cdot 0$ y 0 son iguales, pero $2 \cdot \delta x$ y δx son distintos. Esto se mantiene para cualquier constante distinta de cero, no solo con el número 2.

El cociente $\frac{\delta y}{\delta x}$, referido a las variaciones infinitesimales tanto de la variable independiente como de la variable dependiente de una función $y = f\ (x)$ ahora se puede definir de la siguiente manera:

Sea δx un infinitesimal, tal que $f\ (x + \delta x)$ esté definido. Entonces $\delta y = f\ (x + \delta x) - f\ (x)$ también es un infinitesimal, y la derivada de $y = f\ (x)$ en x es la relación de δy a δx: $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f\ (x + \delta x) - f\ (x)}{\delta x}$

Los resultados conseguidos al obtener una función derivada usando límites, son los mismos que usando infinitesimales, como se ve en el ejemplo siguiente de lo anterior es la siguiente:

$$y = f\ (x) = x^2$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f\ (x + \delta x) - f\ (x)}{\delta x}$$

$$= \frac{(x + \delta x)^2 - x^2}{\delta x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\delta x + (\delta x)^2 - x^2}{\delta x}$$

$= \frac{2x\delta x + 0}{\delta x}$ ya que δx es un infinitesimal $\Rightarrow \delta x^2 = 0$

$$= \frac{2x\delta x}{\delta x}$$

$$= 2x$$

En el procedimiento anterior no se tomó ningún límite y que la derivada $2x$ representa un número real, es decir, no hay infinitesimales involucrados en la respuesta final. En estos casos siempre será así.

Una discusión importante en el estudio de las funciones es la "Propiedad de micro-rectas", utilizada para el gráfico de una función diferenciable: *Cualquier parte de la curva con longitud infinitesimal es un segmento de línea recta*. En otras palabras, a nivel infinitesimal las curvas diferenciables pueden concebirse como rectas. La idea detrás de esto es simple. En varios puntos en una curva diferenciable no recta $y = f\ (x)$ las distancias a lo largo de la curva entre los puntos no son exactamente iguales a las longitudes de los segmentos de línea uniendo los puntos. Por ejemplo, en la Figura 1, la distancia s medida a lo largo de la curva desde el punto A al punto B no es igual a la longitud del segmento de línea AB que une A a B.

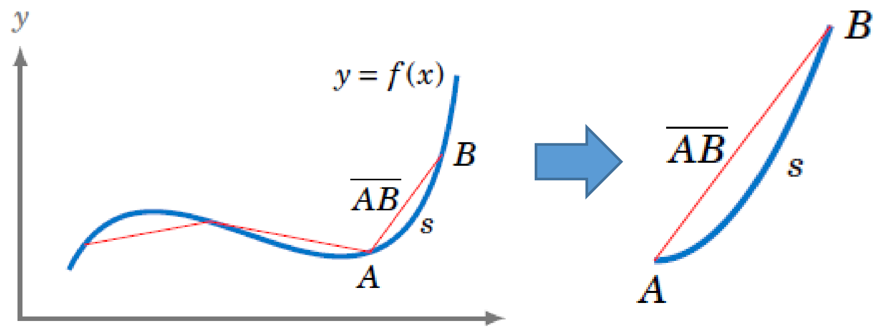


Figura 1. Efecto de la propiedad micro-recta. *Figura tomada de J. L. Bell (1998)*

Sin embargo, a medida que los puntos A y B se acercan, la diferencia entre la curva la unión de A a B y el segmento de línea AB se hace menos notable. Es decir, la curva es casi lineal cuando A y B están cerca. La propiedad micro-recta simplemente va un paso más allá, y dice que la curva en realidad es lineal cuando la distancia s entre los puntos es infinitesimal, por lo que s es igual a la longitud de AB.

Un infinitesimal es una abstracción; no existe físicamente. Una curva $y = f(x)$ es también una abstracción, que existe en un sentido puramente matemático, por lo tanto, sus propiedades geométricas en la escala "normal", no tienen que coincidir con lo que sucede en la escala infinitesimal, que puede definirse de cualquier manera, siempre que sea consistente.

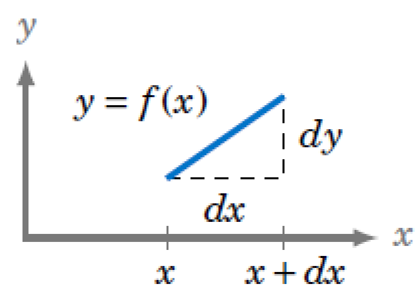


Figura 2. Intervalo infinitesimal. *Figura tomada de J. L. Bell (1998)*

Esta abstracción finalmente revela lo que es una tasa de cambio instantánea: Es la tasa promedio de cambio de un cociente de magnitudes infinitesimales. En un punto x, alejando una cantidad infinitesimal dx de x produce un cambio infinitesimal dy en una función diferenciable $y = f(x)$. Entonces la tasa de cambio promedio de $y = f(x)$ en el intervalo $[x, x + dx]$ es $\frac{dy}{dx}$ ya que sobre ese intervalo de longitud infinitesimal dx la curva $y = f(x)$ es solo un segmento de línea recta, como en la Figura 2. En otras palabras, cambiar en una "instantáneo" significa cambiar en un intervalo infinitesimal, no en un intervalo de longitud 0.

1.3.1 Antecedentes del cálculo infinitesimal

El Cálculo es la rama de la matemática que se ocupa del estudio de dos problemas fundamentales.

- Determinar cuánto hay de una magnitud en todo momento, cuando se conoce en todo momento la razón de cambio de esa misma magnitud.
- Determinar la razón de cambio en todo momento, cuando se conoce en todo momento cuánto hay de esa misma magnitud.

Los problemas fundamentales que se mencionaron anteriormente no eran tan claros en un principio, es decir, el cálculo como tal fue evolucionando. Esto debido a que el cálculo, así como las matemáticas en general, se utilizaba como una herramienta para resolver los problemas planteados por los mismos matemáticos de la época correspondiente de cada uno. Desde problemas geométricos sobre el cálculo de áreas de los polígonos, hasta problemas astronómicos, por ejemplo, querían conocer cómo era el comportamiento de los planetas. En la actualidad, el cálculo es una herramienta de análisis que responde a cuestiones de áreas económicas, de ciencias de la salud, etc.

A continuación mostraremos la contribución de algunos personajes que formaron parte de la construcción del cálculo infinitesimal.

Arquímedes de Siracusa fue un físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático griego. Él fue uno de los primeros en concretar la idea del cálculo infinitesimal. Creó un método con ideas similares a las de Eudoxo, el cuál llamó *Método de Exhaución.* Este método que buscaba hallar el área de un círculo, consistía en dibujar un círculo, un polígono regular inscrito en el círculo, así como un polígono regular circunscrito con el mismo número de lados que el inscrito.

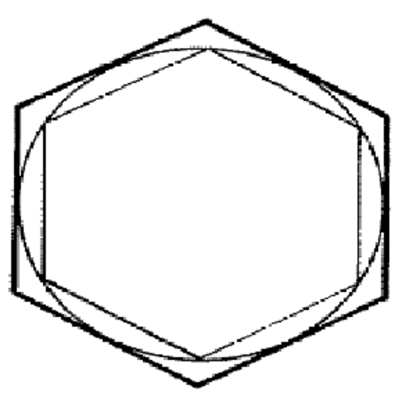


Figura 3. Circulo con un hexágono inscrito y circunscrito.

Después hacía una relación en la que el área del polígono circunscrito era mayor al área del círculo, pero menor al área del polígono inscrito.

$$\underline{Ap} < Ac < \overline{Ap}$$

Cada vez el número de lados del polígono era más y más grande, con la intención de que la diferencia entre dicha relación fuese menor o más precisa.

La forma en la que se calculaban las áreas de los polígonos en función de sus n lados era la siguiente:

- Polígono inscrito al círculo:

$$A_{inscr} = n * sen\left(\frac{180}{n}\right) * cos\left(\frac{180}{n}\right)$$

- Polígono circunscrito al círculo:

$$A_{Circ} = n * tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

De aquí se tiene que el área A del círculo se encuentra entre ambos valores:

$$A_{inscr} = n * sen\left(\frac{180}{n}\right) * cos\left(\frac{180}{n}\right) < A < A_{Circ} = n * tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

Arquímedes en su método probó con polígonos de 3, 6, 12, 24, 48 y 96 lados. Esta daba lugar al valor de π dado por la desigualdad de los polígonos inscritos y circunscritos. Así pues, se concretó una desigualdad con más precisión al número π con la comparación de un polígono de 96 lados.

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

Tomando en cuenta que el uso de calculadoras permite mejorar estos cálculos, evaluando con valores mayores para n, podemos observar el comportamiento en la siguiente tabla.

$A_{inscr} = n * sen\left(\frac{180}{n}\right) * cos\left(\frac{180}{n}\right) < A < A_{Circ} = n * tan\left(\frac{180}{n}\right)$		
n	$A_{inscr} = n * sen\left(\frac{180}{n}\right) * cos\left(\frac{180}{n}\right)$	$A_{Circ} = n * tan\left(\frac{180}{n}\right)$
100	3.139525	3.142626
300	3.141362	3.141707
500	3.141509	3.141633
700	3.141550	3.141613

900	3.141567	3.141605
1000	3.141571	3.141602
2000	3.141587	3.141595
3000	3.141590	3.141593
4000	3.141591	3.141593
5000	3.141591	3.141593

El método de *exhaución* de Arquímedes originaba una aproximación cercana al área que se deseaba calcular, sin embargo daba como consecuencia la siguiente pregunta: ¿Cuántos lados deben tener los polígonos para que el perímetro de estos y el del círculo sean coincidentes?

Conforme aumentamos el número de lados del polígono, podemos ver que los valores de las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan al mismo valor y, como el área del círculo está entre ambos, por este método se puede aproximar el valor de A, con tantas cifras decimales exactas como deseemos.

Este tipo de argumentos condujo, muchos siglos después a la idea del límite de una función, pues el valor de A se establece como:

$$\lim_{n\to\infty} n * sen\left(\frac{180}{n}\right) * cos\left(\frac{180}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n * tan\left(\frac{180}{n}\right) = A$$

Esta idea del límite tiene sus complicaciones a la hora de formular matemáticamente con base en el rigor y el formalismo matemático, con complicaciones desde la concepción misma de infinito o de indeterminado representado por medio del símbolo ∞.

Pero, así como este procedimiento condujo a la idea del límite, también se abrió paso a una manera diferente de concebir las cosas y se planteó la siguiente interrogante: ¿cuándo los polígonos, por ejemplo el polígono inscrito cubre exhaustivamente (agota, llena, cubre) al círculo? Una respuesta a esta interrogante es que el polígono cubre exhaustivamente al círculo cuando tiene un número infinito de lados. En este caso surge una vez más la idea del infinito y trae aparejado una complicación adicional: ¿cuánto mide el lado del polígono de infinitos lados?

Si asignamos una determinada cantidad para el lado del polígono, digamos x, entonces por la llamada propiedad arquimediana precisamente en honor a Arquímedes, tendríamos que la longitud de la circunferencia digamos y, se alcanzaría y sobrepasaría con un múltiplo finito de x.

Recordemos que la Propiedad Arquimediana se enuncia o puede enunciar de la siguiente forma: "Las magnitudes se dice que guardan una razón entre ellas si, multiplicadas, estas magnitudes pueden excederse mutuamente." O bien, si y es un número real arbitriario y $x > 0$, entonces existe un entero positivo n, tal que $nx > y$. Ejemplificando de otra manera, supongamos que tenemos un segmento cuya longitud es una cantidad y, y otro segmento de longitud igual a x, de menor longitud. Entonces existirá un número entero n, el cual al tomar el segmento de longitud nx, se obtiene un segmento de longitud mayor a y.

Entonces, pensar que la circunferencia es un polígono de un número infinito de lados nos conduce a pensar que el lado del polígono es tan pequeño que un múltiplo finito no alcanza a cubrir la circunferencia. Lo cual obliga a pensar que la longitud del lado de tal polígono tiene una longitud infinitamente pequeña, y que no se satisface la Propiedad Arquimediana, idea que resulta muy complicada y poco intuitiva.

Sin embargo, ambas ideas, la del límite y la de cantidades infinitamente pequeñas se abrieron paso con el transcurrir del tiempo y aparecieron en diferentes versiones y consideraciones a la hora de resolver problemas para los que se involucraron procesos infinitos.

Por ejemplo, años más tarde, para resolver problemas de áreas y volúmenes. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) matemático italiano, se convirtió en uno de los precursores del cálculo infinitesimal. Cavalieri, Kepler y otros matemáticos inventaron y usaron métodos infinitesimales intuitivos para resolver problemas de áreas y volúmenes.

El matemático italiano usó lo que ahora conocemos como Principio de Cavalieri: *"Si dos sólidos tienen las alturas iguales y si las secciones hechas por planos paralelos a las bases a la misma distancia de la base están en una determinada proporción, entonces los volúmenes de los sólidos están también en esa proporción."*

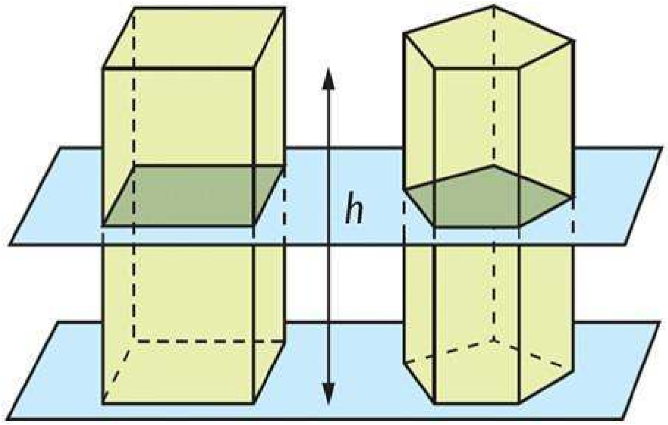


Figura 4. Principio de Cavalieri

El Principio de Cavalieri es también aplicable al caso de las figuras geométricas y sus áreas, por ejemplo: Si dos triángulos ABC y ABD, en donde el lado AB es la medida de la base, o sea, tienen la misma base y el vértice está a una misma altura, entonces éstos tendrán la misma área. Esto sin importar la longitud de sus otros dos lados. Teniendo la misma base y la misma altura, el área siempre será la misma para ambos.

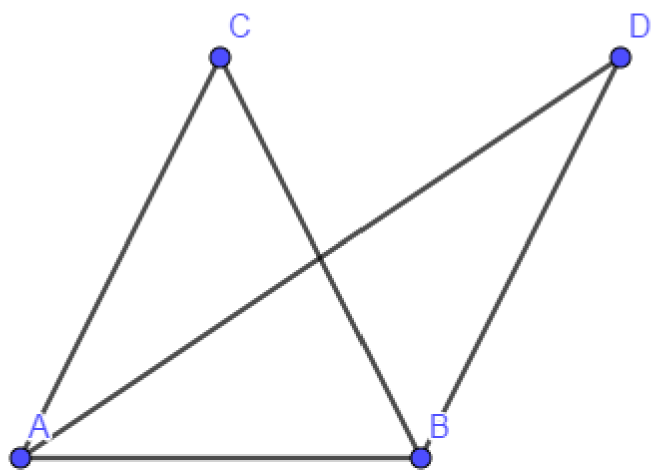


Figura 5. Principio de Cavalieri en áreas.

> "Cavalieri hizo de la noción de indivisible la base de un método geométrico de demostración. No explicó precisamente lo que entendía por la palabra indivisible que empleó para caracterizar los elementos infinitesimales que usó en su método. Cavalieri concibió una superficie como formada por un número indefinido de líneas paralelas equidistantes y un sólido como compuesto por planos paralelos equidistantes, y designa estos elementos los indivisibles de la superficie y del volumen respectivamente." (C.H. Edwards)

Una aplicación conocida del Principio de Cavalieri en volúmenes es el calcular el volumen de una esfera. Podemos comparar el área de una sección de un hemisferio y el área de una sección de un cuerpo, y nos damos cuenta que es un cilindro menos un cono. Estas dos áreas son iguales. Entonces los dos cuerpos tienen el mismo volumen. Es fácil calcular el volumen de este segundo cuerpo, y así obtenemos el volumen del hemisferio.

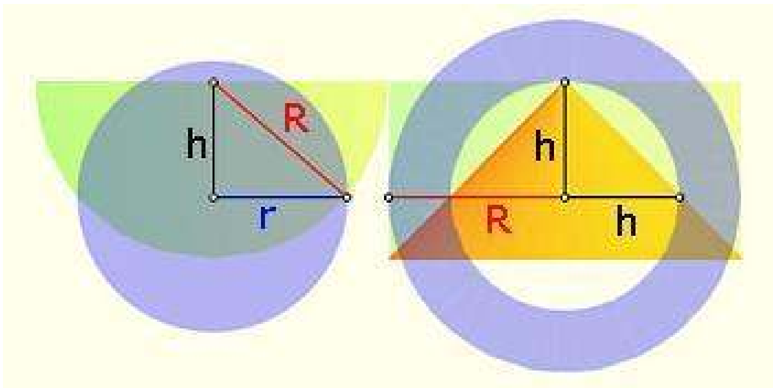


Figura 6. Aplicación de Cavalieri

Para cada altura h, el área del disco es:

$$A_{disco} = \pi(R^2 - h^2)$$

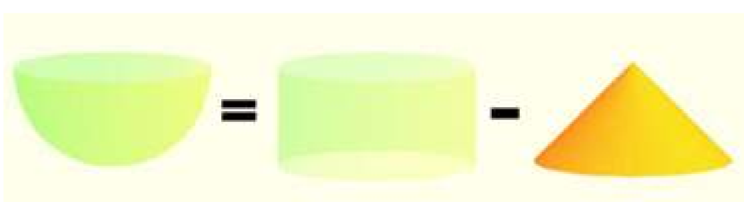
Y el área de la corona circular es:

$$A_{corona} = \pi R^2 - \pi h^2$$

Por lo tanto, para cada altura las dos secciones tienen áreas iguales.

$$A_{disco} = A_{corona}$$

Usando el Principio de Cavalieri podemos deducir:



$$V_{semiesfera} = V_{cilindro} - V_{cono}$$

Usando las fórmulas para el volumen de un cilindro y el volumen de un cono podemos escribir el volumen del hemisferio:

$$V_{semiesfera} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Entonces el volumen de una esfera de radio R es:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Otros ejemplos de este principio, son las figuras irregulares, es decir, diferentes a los prismas regulares, como muestran las siguientes figuras.

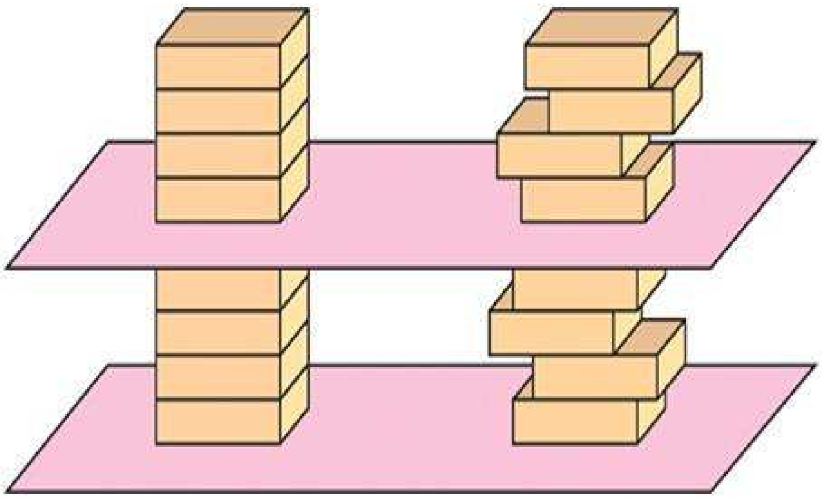


Figura 7. Ejemplo de principio de Cavalieri con bloques.

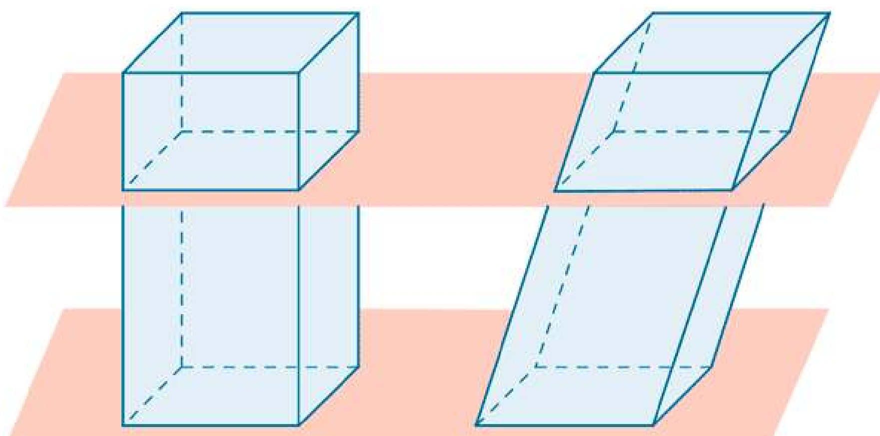


Figura 8. Ejemplo de principo de Cavalieri con ángulo diferente.

El trabajo de los matemáticos griegos se popularizó, en especial el de Arquímedes. Con estos trabajos se desarrollaron técnicas infinitesimales para calcular áreas y volúmenes. Los trabajos de Kepler también que contribuyeron a estos desarrollos. De forma anecdótica, el interés de Kepler por el cálculo de áreas y volúmenes surgió cuando se casó por segunda vez, ya que ocurrió un percance. Él había comprado un barril de vino para la boda y tuvo un disgusto por el procedimiento que usó el comerciante de vino para medir el volumen del barril. A partir de dicho acontecimiento, se propuso a estudiar cómo calcular áreas y volúmenes de diferentes cuerpos; cuerpos de revolución en especial, y escribió un libro sobre el tema.

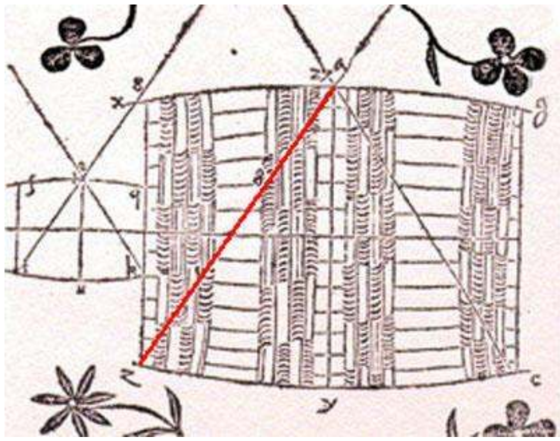


Figura 9. Manera de medir el volumen del barril de vino.

Kepler estudió los trabajos de Arquímedes y escribió un libro (publicado en 1615): "*Nova Stereometria doliorum vinariorum*" (Nueva Geometría sólida de los barriles de vino).

Es un trabajo sistemático en el que se usan técnicas infinitesimales para el cálculo de áreas y volúmenes. Se concentra en los sólidos de revolución e incluye el cálculo (exacto o aproximado) de más de noventa sólidos.

El enfoque de Kepler en su estereometría es diseccionar un sólido en un número infinito de piezas infinitesimales, o sólidos "indivisibles", de una forma y tamaño conveniente a la solución de cada problema particular. Entonces suma todos esos indivisibles de alguna manera para obtener el área o volumen de la figura dada.

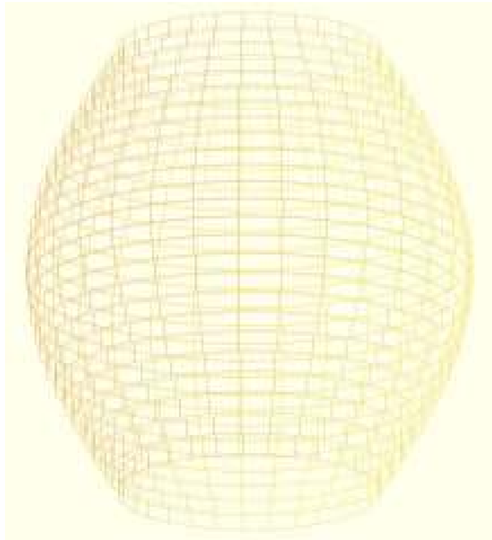


Figura 10. Cuerpo construido por volúmenes infinitesimales.

Los elementos infinitesimales de Kepler tienen la misma dimensión que el cuerpo que quiere medir. Si quiere calcular un área, suma elementos área y si quiere calcular un volumen considera elementos infinitesimales con volumen.

> "Pensó en el volumen de un barril, como el de cualquier otro cuerpo, como formado por numerosas hojas finas adecuadamente dispuestas en capas, y considera el volumen del barril como la suma de los volúmenes de estas capas, siendo cada una de ellas un cilindro." (Felix Klein)

Veinte años después de la publicación de la Stereometria doliorum de Kepler se publicó un libro en Italia que rivalizó con él en popularidad: Geometria indivisibilibus de Bonaventura Cavalieri (1635)

En este libro usó lo que ahora conocemos como Principio de Cavalieri, el cual se describió anteriormente.

Kepler consideraba una figura geométrica compuesta por indivisibles de una misma dimensión. Sin embargo, Cavalieri generalmente considera una figura geométrica compuesta por un número infinitamente grande de indivisibles de dimensión menor. Un área está formada por segmentos paralelos y equidistantes y un volumen consiste en secciones planas paralelas y equidistantes.

Este tipo de método generó controversia entre los matemáticos, puesto que la suma de figuras con volumen cero generaba un cierto volumen el cuál sí estaba definido. Esto parecía imposible, puesto que la suma de ceros, siempre da como resultado cero.

El método que utilizó Kepler consiste en un procedimiento para calcular el volumen de sólidos de revolución cuando integramos a lo largo del eje de rotación. A esto, se le llama método de los discos

Después de haber descritos los diversos métodos utilizados por los grandes matemáticos a través de la historia, nos interesa rescatar la idea de algo infinitamente pequeño o *infinitesimal*.

Como en el método de Exhaución, en donde el número de lados cada vez se hacía más y más grande, con el objetivo de que el acercamiento al área del círculo fuese más exacta, para este métodos se rescataron dos ideas, tanto el del cálculo *infinitesimal* que es el que nos interesa, como el del límite. A pesar de que el método de Arquímedes generó un acercamiento preciso hacia el número pi, después con los diferentes métodos utilizados, se pudo realizar un acercamiento más preciso al que Arquímedes logró.

Por otra parte, los métodos de Cavalieri y Kepler, eran distintos, sin embargo la idea era prácticamente la misma; suma de cantidades infinitesimales.

Cavalieri propuso que el volumen se componía por la suma de cortes paralelos entre los cuerpos con una misma área, donde dicho corte tenía volumen cero, sim embargo no eran cero del todo, si no, cantidades *infinitesimales.* Tiempo después, Kepler tomó dicha idea para modificarla un poco y explicar que el volumen sería la suma de las distintas áreas compuestas por el cuerpo pero de un grosor con tamaño *infinitesimal*. Ellos fueron parte fundamental para el desarrollo del cálculo *infinitesimal*, que después perfeccionaron Leibniz y Newton.

1.3.2 La razón instantánea de cambio con infinitesimales

El proceso más usual y tradicional de obtención de derivadas se inicia con el cálculo de límites, esto es con la expresión $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ que, como se reporta en la literatura de investigación, ofrece grandes obstáculos en el aprendizaje, por una parte la conceptualización de la idea de límite de una función y, por otra, se lleva a la práctica de forma algorítmica ignorando el análisis de lo que se está haciendo al obtener la derivada.

Para profundizar en los propósitos de este trabajo, analizaremos el significado de la razón instantánea de cambio.

La razón instantánea de cambio es uno de los objetos matemáticos que se usa en diferentes campos y situaciones problema. Intuitivamente, podemos decir que la razón instantánea de cambio es la razón promedio de cambio de dos magnitudes infinitesimales. La razón instantánea de cambio más frecuentemente estudiada en la escuela es la velocidad instantánea, que se obtiene precisamente con la derivada de la función que determina la posición de un objeto, con relación al tiempo transcurrido. Esto quiere decir que la velocidad instantánea se entiende a partir del vínculo que se establece entre la diferencia de posiciones de un cuerpo En un determinado intervalo de tiempo. De acuerdo a cómo se modifica la distancia recorrida en el tiempo por el movimiento de un cuerpo, podemos conocer cuál es su velocidad.

Existen muchas otras situaciones en las cuales es posible estudiar y usar la derivada y su caracterización como razón instantánea de cambio. Por ejemplo, se puede utilizar la razón instantánea de cambio para medir el impacto que tiene en todo momento, en la contaminación de un arroyo, el vertido de desechos de una industria.

Un cálculo que se puede hacer con relativa facilidad es el de la razón promedio de cambio de una magnitud variable con respecto a otra, pero en la versión tradicional para obtener la razón instantánea de cambio debe procederse al uso de la compleja idea del límite, mientras que en nuestra propuesta, si la razón promedio de cambio corresponde a la razón de dos magnitudes infinitesimales, entonces ya estamos determinando la razón instantánea de cambio.

Lo mismo puede decirse en el estudio de otros fenómenos en los cuales es importante determinar la razón instantánea de cambio de una variable con respecto a otra. Tal es el caso de los ejemplos señalados anteriormente, como el de la contaminación de un arroyo o de velocidad de propagación de una epidemia. En física también existen contextos como la Ley de la Gravitación Universal, o la Ley de Boyle.

Estos usos de las nociones matemáticas conducen a diversas significaciones y, en general, a formas diversas de proceder, expresar y hasta formular las situaciones problema que se enfrentan, los cuales se ponen de manifiesto en los planteamientos de las diferentes comunidades que enfrentan dichas situaciones problema y en la estructuración de los contenidos curriculares que se establecen.

A reserva de profundizar en el siguiente capítulo en los elementos teóricos usados en el presente trabajo, es pertinente señalar que cuando hacemos alusión a las nociones y procedimientos matemáticos usados por una determinada comunidad, nos referimos a los mismos como significados institucionales, algunos de los cuales usamos como referencia, otros los identificamos como los significados institucionales que se pretenden en un currículo, en un diseño, en un plan de clase u otro nivel considerado.

Así, planteamos que en el presente trabajo, tenemos los propósitos que se establecen en el apartado siguiente.

1.4 Objetivos

Objetivo general

Diseñar actividades didácticas para la enseñanza de la razón instantánea de cambio con el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, dirigida a estudiantes del curso "Cálculo Diferencial e Integral I" del área de Ingeniería.

Objetivos específicos

1.- Determinar los propósitos curriculares y contenidos matemáticos asociados al estudio de la razón instantánea de cambio en el curso "Cálculo Diferencial e Integral I" del área de Ingeniería, estableciendo el significado institucional pretendido por el currículo.

2.- Caracterizar a la razón instantánea de cambio desde un enfoque infinitesimal, estableciendo el significado institucional pretendido por el diseño.

3.- Diseñar e implementar actividades para el estudio de la razón instantánea de cambio con un enfoque infinitesimal.

4.- Valorar los diseños de estas actividades didácticas a través de su implementación y reformularlas para mejorarlas.

CAPÍTULO 2. REFERENTES TEÓRICOS Y ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Para el sustento teórico de este trabajo utilizaremos herramientas o nociones del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), el cual integra diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adoptando principios didácticos de tipo socioconstructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje, (Godino, 2008).

El EOS cuenta con un conjunto de nociones teóricas, las cuales mantienen una relación entre ellas, y a su vez, cada una está conformada de ciertas características y clasificaciones independientes. Las nociones previamente mencionadas se clasifican en cinco grupos, cada uno describe y conforma un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas.

No es nuestro propósito emplear todas las herramientas del EOS ni elementos de cada uno de los 5 grupos de nociones y en las líneas siguientes describimos las nociones teóricas del Enfoque que usaremos en el presente trabajo.

2.1 Prácticas matemáticas

Por su carácter sistémico, los elementos y herramientas del EOS cubren múltiples aspectos en los análisis de los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas, pero un elemento central es el referente a las prácticas matemáticas desarrolladas por los individuos y las comunidades que comparten el interés por la solución de un mismo tipo de situaciones problema. Así tenemos que "Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p.334).

Se considera una práctica personal cuando las acciones son propuestas por un solo sujeto, y cuando las acciones son propuestas por el seno de una comunidad, las prácticas se dice que son institucionales, referidas a esa comunidad. Así, entendemos por institución a un sector de personas que comparten una misma clase de situaciones problemáticas.

Lo que comúnmente pasa en las instituciones educativas, es que los estudiantes a la hora de resolver las situaciones problema realizan prácticas matemáticas aisladas, sin más. Cuando lo que se espera, es que se realicen prácticas personales que correspondan a los sistemas de prácticas propuestos por la institución. En este caso, promover a la realización de sistemas de prácticas, en conjunto, que lleven a la culminación de un objetivo en específico.

Con el propósito de clarificar las nociones empleadas, por medio de ejemplos ilustraremos a qué nos referimos cuando hablamos de prácticas matemáticas aisladas y a qué hacemos alusión al hablar de sistemas de prácticas. Así, un ejemplo de práctica aislada es el siguiente: El cálculo de la velocidad promedio utilizando la fórmula de la velocidad $\frac{d}{t}$.

En el caso de los sistemas de prácticas, un ejemplo es el siguiente: La solución a una situación problema de un contexto extramatemático, como la posición de una moto en cualquier momento dada su velocidad constante. La situación problema ya la conocemos, que es la posición de la moto, utilizaremos un lenguaje algebraico para representar una de las fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme, en este caso la de la posición $x = vt + x_0$. También un lenguaje aritmético para calcular un tiempo determinado. Utilizaremos conceptos como el movimiento rectilíneo uniforme, el diferencial como aumento infinitesimal de una variable y términos físicos como la velocidad, posición y tiempo. Por otra parte, se desarrollan procedimientos como el calcular diferenciales de posición y de tiempo. Un argumento como el diferencial de posición, siendo este la solución del problema.

El fin de hacer explícitos estos ejemplos, es para consolidar el sentido que le queremos dar a este trabajo. Identificar las prácticas institucionales es solo el primer paso en la búsqueda de alternativas a la construcción de significados por los alumnos.

2.2 Significados

Cuando los docentes o estudiantes abordan una situación problema, se generan los sistemas de prácticas. Entendiendo como práctica a toda acción o expresión realizada por el estudiante (la cual hará parte del significado sólo si contribuye a la solución de la situación problema). Un sistema de prácticas es una configuración de prácticas para la solución de un problema. El EOS asume una visión pragmática del significado, asumiendo que el significado de un objeto matemático es precisamente el sistema de prácticas construido al resolver un mismo tipo de situaciones problema. Con base en las acciones propuestas por el sujeto, ya sea una persona o institución, es como se clasificarán estos significados. De ser una sola persona, el resultado de su sistema de prácticas será

un significado personal, en cambio, si comparten características similares entre los sistemas de prácticas, el significado se consolida como significado institucional.
Existen diferentes tipos de significados institucionales, entre ellos están:

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado. pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. (Godino, et al 2008, p. 5).
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Respecto de los significados personales proponemos los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*. (Godino, et al 2008, p. 5).

Debido a los objetivos planteados en este trabajo consideramos pertinente hacer más hincapié en dos de los elementos que antes se describieron: El significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido.

2.2.1 Significado institucional de referencia de la razón instantánea de cambio y significado institucional pretendido por el currículo.

A continuación se describen por una parte el significado institucional de referencia, en el que se señalan los objetos matemáticos de nuestro interés y la forma en que se abordan los mismos en acercamiento basados en el manejo de las cantidades infinitesimales. Asimismo, se presenta el significado institucional pretendido por el currículo, del cual se toman también, como parte del significado institucional de referencia, las situaciones problema que se proponen que un estudiante pueda resolver al final del curso.

2.2.1.1 Significado institucional de referencia

Dadas las características de nuestra propuesta, para el significado institucional de referencia hemos considerado dos aspectos: por una parte los significados de los objetos matemáticos de razón instantánea de cambio en enfoques que emplean las magnitudes infinitesimales y los objetos matemáticos asociados a dicha noción y, por otra parte, tomamos también los problemas o situaciones problema que se pretenden desarrollar en el currículo de las carreras de ingeniería en lo que corresponde al curso de Cálculo Diferencial e Integral I pues, aunque este acercamiento es diferente, deben abordarse las situaciones problema de interés para un ingeniero. Esta parte de los problemas del currículo se desarrollan en el siguiente apartado, en el cual hacemos un estudio del significado institucional pretendido por el currículo.

Respecto al significado institucional de referencia, hemos empleado las nociones usadas por los fundadores del Cálculo, principalmente las desarrolladas por Leibniz, siguiendo los planteamientos de Grijalva (2007), la propuesta de Thompson (2019) y Bell, J. L. (1998). Básicamente hemos realizado nuestra propuesta a partir de las siguientes consideraciones:

Situaciones problema: Tareas de obtención y utilización de la razón instantánea de cambio en problemas geométricos, físicos e intramatemáticos.

Lenguaje: Uso del lenguaje natural, analítico, geométrico y numérico para las cantidades infinitamente pequeñas, introduciendo los símbolos algebraicos para su identificación. Razón promedio de cambio, y razón instantánea de cambio.

Procedimientos: Gráficas que modelan situaciones propuestas, manipulación numérica de cantidades grandes y pequeñas, técnicas algebraicas para obtención de razones instantáneas de cambio como cociente de magnitudes infinitamente pequeñas.

Propiedades: Se emplean básicamente las propiedades atribuidas a los números infinitesimales, partiendo de la definición de

Un número δ es un infinitesimal si las siguientes condiciones son válidas:

- $\delta \neq 0$.

- si $\delta > 0$, entonces δ es más pequeño que cualquier número real positivo.

- si $\delta < 0$, entonces δ es mayor que cualquier número real negativo.

- $\delta^2 = 0$ (y, por lo tanto, todas las potencias superiores de δ, como δ^3 y δ^4, también son 0).

De aquí se desprenden también otras propiedades, como las siguientes: cualquier infinitesimal multiplicado por un número real distinto de cero también es un infinitesimal, mientras que 0 veces un infinitesimal es 0.

La suma de dos cantidades infinitesimales es infinitesimal.

El producto de dos cantidades infinitesimales es 0.

Por otra parte se asume la propiedad de "Microrectas", referidas a que una función suave es recta en un intervalo infinitesimal.

Argumentos: Se emplean las propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas para realizar los procedimientos descritos con la finalidad de resolver las situaciones problema en estudio.

Conceptos: Aunque se introducen diversos objetos matemáticos, la propuesta toma como referencia principalmente dos concepciones: la existencia y naturaleza de las magnitudes infinitamente pequeñas y la razón instantánea de cambio como la razón promedio de cambio de dos magnitudes infinitesimales.

2.2.1.2 Significado institucional pretendido por el currículo.

El significado institucional pretendido por el currículo que se está considerando en este trabajo es el relativo al programa del curso de Cálculo Diferencial e Integral I de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, la cual atiende las siguientes carreras: Ingeniería Industrial y de Sistemas, Ingeniería Civil, Ingeniería en Minas, Ingeniería Química, Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería Minero, Ingeniería Materiales, Ingeniería Metalúrgico, Ingeniería en Sistemas de Información e Ingeniería en Energías Renovables.

Debemos enfatizar que, dadas las diferencias entre este programa y nuestra propuesta didáctica, las situaciones problema que se plantean para abordar en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, constituyen también parte del Significado institucional de referencia establecido.

Situaciones

- A partir de la expresión analítica de f, determinar f'.
- A partir de la expresión analítica de f, determinar numéricamente f' en un valor dado de x.
- Estimar gráfica y numéricamente el valor de la derivada f' de una función f, en un punto particular.
- Calcular la razón promedio de cambio y la razón instantánea de cambio.
- Trazar la gráfica de la función f' a partir de la gráfica de f con herramientas tecnológicas.
- Determinar los puntos críticos de una función f.
- Estimar gráficamente los puntos críticos de una función f y comprobar analíticamente las respuestas.
- Determinar los máximos y mínimos globales de una función f.
- Calcular la derivada con las reglas de derivación.
- Problemas de optimización extramatemáticos: situaciones de la vida cotidiana o profesional de un ingeniero, en los que el cálculo puede jugar un papel importante.

Lenguaje

- Numérico/Algebraico:
  - Expresiones analíticas de diferentes funciones
  - Para la expresión de la derivada vía límites
  - Para la denotación de las funciones y la derivada: f(x), f '(x), f(p), f '(a), etc.
  - Para la notación de intervalos

- Gráfico:
    - Expresiones gráficas de diferentes funciones.
    - Para visualizar a la razón promedio de cambio de f como la pendiente de una recta secante.
    - Para visualizar a la rapidez instantánea de cambio de f como la pendiente de una recta tangente en un punto.
    - Para expresar funciones no diferenciables en un punto.
    - Para expresar funciones con sus puntos críticos, valores máximos y mínimos absolutos.

Proposiciones

- La derivada en el punto $A(a, f(a))$ se puede interpretar como:
    - La pendiente de la curva en A.
    - La pendiente de la recta tangente a la curva en A.
- Si una función tiene derivada en un punto, su gráfica debe tener una tangente en ese punto; la pendiente de la tangente es la derivada. Cuando nos acercamos a la gráfica de la función debemos ver una línea recta no vertical.
- Algunas causas por las que una función puede ser no diferenciable en un punto son:
    - Si la función no es continua en ese punto.
    - Si la gráfica tiene una esquina en ese punto.
    - Si la gráfica tiene una tangente vertical.
- Sea f una función que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):
    - Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
    - Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.
- Una función f definida en un intervalo abierto que contiene a a es diferenciable en a si y sólo si la derivada por la derecha y por la izquierda en a existen y son iguales.
- Si una función continua f tiene un máximo o mínimo local en p y si p no es extremo del dominio, entonces p es un número crítico.

- Criterio de la primera derivada: Sea f una función que es continua en un número crítico p y derivable en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p mismo.
  - Si f' cambia de negativa a positiva en p, entonces $f(p)$ es un mínimo local de f.
  - Si $f\,'$ cambia de positiva a negativa en p, entonces $f(p)$ es un máximo local de f.
  - Si $f\,'(x) > 0$ o bien si $f\,'(x) < 0$ para todo x en I, excepto para $x = p$, entonces $f(p)$ no es un valor extremo local de f.
- Criterio de la segunda derivada: Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene a p y tal que $f\,'(p) = 0$.
  - Si $f\,''(p) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en p.
  - Si $f\,''(p) < 0$, entonces f tiene un máximo local en p.

Procedimientos

- Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado.
- Dada la posición de un cuerpo en cada instante, calcular su velocidad instantánea, como límite de velocidades medias.
- Resolver problemas que involucren razones promedio de cambio.
- Modelar y resolver problemas físicos y de la Ingeniería como razón instantánea de cambio.
- Utilizar software dinámico para reforzar el concepto de derivada en un punto y de función derivada.
- Encontrar derivadas de funciones elementales apoyándose en el software.
- Dada la gráfica de una función, encontrar la gráfica de la derivada y viceversa.
- Calcular derivadas de funciones utilizando las reglas de derivación.
- Encontrar máximos y mínimos de una función, monotonía, concavidad, puntos de inflexión.
- Reconocimiento visual de una función a partir de su función derivada: (creciente, decreciente, concavidad, máximos y mínimos, puntos de inflexión).
- Modelar y resolver problemas de optimización, geométricos, físicos y de la ingeniería.

- Resolver problemas de aproximación, utilizando a la recta tangente como la mejor aproximación lineal.
- Resolver problemas no matemáticos utilizando el concepto de diferencial.

Conceptos

Con base en la tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de Dávila (2010) adaptamos los siguientes conceptos y argumentos, dado que estos no han cambiado en esencia.

- Función
- Recta tangente
- Función creciente
- Función decreciente
- La razón promedio de cambio
- La derivada de f en a
- La función derivada de una función f
- Mínimo local (o relativo)
- Máximo local (o relativo)
- Extremo relativo
- Número crítico
- Mínimo absoluto (o global)
- Máximo absoluto (o global)
- Extremo absoluto

Argumentos

- La derivada se define como un límite.
- Definición de límite y teoremas sobre límites.
- Se explica por qué la gráfica de una función diferenciable en un punto se ve como una recta al acercarnos más y más al punto utilizando el teorema siguiente: Si f es diferenciable en $x = a$ y $E(x)$ es el error de la aproximación lineal, esto es: $E(x) = f(x) - f(a) + f'(a)(x - a)$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$.

- *Teorema del valor extremo*: Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$.
- *Teorema de Rolle*: sea f una función tal que
  - es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;
  - es diferenciable en el intervalo abierto (a, b); $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$.
    - Entonces existe un numero p en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(p) = 0$.
- Teorema: Sea f continua en el intervalo I que contiene al punto c. Si $f(c)$ es un extremo local de f en I y c es el único punto en I para el cual f tiene un extremo local, entonces $f(c)$ es un extremo global de f en I.

2.3 Objetos matemáticos

En el EOS se considera que los objetos matemáticos son aquellos objetos que emergen de un sistema de prácticas. La definición de objeto como emergente responde a la necesidad de tener una manera de describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Dentro del marco se define objeto matemático a cualquier elemento siguiente, estos llamados objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- *Situaciones - problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, etc.)
- *Conceptos - definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, etc.)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).

Si bien se mencionó acerca de que los objetos primarios emergen de un sistema de prácticas, existen dos niveles para describirlos. Un primer nivel donde se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). A este nivel se le considera como objetos intervinientes. Después, un segundo nivel, donde tenemos una tipología de objetos que emergen de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc., Por lo tanto nuestro trabajo tomará en cuenta ambos niveles.

“Estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.”(Godino, 2008).

2.4 Idoneidad didáctica y sus dimensiones

La idoneidad didáctica es un sistema de indicadores empíricos que permiten reunir ciertas características para calificar como *idóneas* la implementación de la intervención didáctica, y las prácticas del estudiante. De esta manera se busca una adaptación entre los significados personales logrados por el estudiante y los significados institucionales pretendidos, considerando a su vez las circunstancias y recursos disponibles.

Esta herramienta valorará nuestra propuesta de una forma integral. Por lo que, a continuación describiremos brevemente cada elemento que compone la idoneidad didáctica, así como sus componentes que nos ayudarán a la valoración y diseño de las actividades.

Idoneidad epistémica, que se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

Este elemento analiza la diversidad de significados interconectados apoyándose de la diversidad de objetos: Situaciones, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, y argumentos.

Tabla 2. Componentes de la Idoneidad epistémica.

Componentes	Indicadores
Situaciones problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. - Nivel del lenguaje adecuado a estudiantes a los que se dirige

	- Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Por otra parte la *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

Este elemento analiza la proximidad y demanda cognitiva como la comprensión situacional, conceptual, proposicional; competencia procedimental, argumentativa y comunicativa, así como la competencia metacognitiva.

Tabla 3. Componentes de la Idoneidad cognitiva.

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)

	- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: • Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones

Otro elemento es la *Idoneidad interaccional*, que un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

Este elemento analiza la parte de la comunicación entre los participantes intervinientes dándole total importancia al diálogo y la interacción del profesor con el estudiante y de los estudiantes en sí.

Tabla 4. Componentes de la Idoneidad interaccional.

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)

	- Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase
Interacción entre alumnos	- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes - Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

Otro elemento que compone la *Idoneidad didáctica* es la *Idoneidad mediacional,* que es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este elemento como se menciona, valora los recursos en general, tanto recursos técnicos como la logística de las intervenciones como los recursos materiales que se utilizarán en el proceso de las intervenciones.

Tabla 5. Componentes de la Idoneidad mediacional.

COMPONENTES	INDICADORES
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes,

	procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión

Por otra parte, la *Idoneidad emocional,* es el grado de implicación (interés, motivación,…) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

Este elemento analiza la involucración del estudiante con respecto a las intervenciones, es decir actitudes, motivaciones y creencias acerca de lo que está haciendo. En otras palabras, este elemento brinda los componentes para valorar la problematización del estudiante.

Tabla 6. Componentes de la Idoneidad emocional.

COMPONENTES	INDICADORES
Intereses y necesidades	-Las tareas tienen interés para los alumnos - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
Actitudes	- - Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Y por último, la *Idoneidad ecológica,* es el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Este elemento analiza la adaptación, por ejemplo, el currículo con respecto a los contenidos que se abordarán en la intervención; la escuela sobre la estructura y zona de ubicación; y la sociedad por la que esté compuesta dicha escuela.

Tabla 7. Componentes de la Idoneidad ecológica.

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo

Adaptación socioprofesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares

(Godino, 2013)

2.5 Configuración didáctica

Existe una relación de configuraciones que se complementan para realizar lo que llamamos una configuración didáctica. El EOS analiza esta relación con base en un sistema entre elementos que lo conforman dentro de un trasfondo ecológico. Uno de estos elementos es la configuración epistémica que se asocia a una tarea o práctica, y los elementos primarios antes mencionados como lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, producidos ya sea parte del profesor, del alumno o ambos. Relacionado con la configuración anterior está la configuración instruccional que consiste en el conjunto de objetos por parte del profesor y el alumno así como los objetos mediacionales, que son los recursos materiales con los que cuentan tanto profesor como alumno. Y por último la descripción de la construcción de los aprendizajes que se desarrolla a los largo de las sesiones es consecuencia de una configuración cognitiva, que son el conjunto de objetos previos y emergentes de las prácticas personales puestas en juego durante la implementación de la configuración epistémica antes descrita.

"Sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático." (Godino, et al, 2008).

En nuestro trabajo nos enfocaremos en la trayectoria epistémica, la cual será descrita a continuación.

2.5.1 Trayectoria epistémica

El EOS cuenta con un modelo cognitivo elaborado de tal manera que distingue seis categorías de entidades primarias que se constituyen de los sistemas de prácticas ya mencionadas previamente, estas entidades primarias son las siguientes: lenguajes, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución de los componentes mencionados a través de un proceso de estudio.

"Se distinguen seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución en el tiempo de estos componentes en un proceso de estudio. Distinguiremos, por tanto, en ellas seis estados posibles, según el tipo de componente del significado sistémico que se estudia en cada momento." (Godino, 2008)

- Situacional: se aborda el planteamiento de un ejemplar del tipo de problemas incluidos en el significado.
- Actuativo: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.
- Notacional: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.
- Conceptual: se formulan, interpretan o aplican definiciones de los objetos puestos en juego.
- Proposicional: se enuncian, interpretan y aplican propiedades.
- Argumentativo: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

En el estudio de un cierto tema, estos estados del proceso instruccional van emergiendo conforme avanza el estudio.

"El análisis de la trayectoria epistémica (análisis epistémico) de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado sistémico efectivamente implementado. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis, considerando una nueva unidad cuando la trayectoria epistémica cambia de estado, esto es, el estudio se centra en un tipo de entidad primaria diferente." (Godino, 2008).

2.6 Acciones metodológicas

Para la realización de este trabajo de tesis se han seguido una serie de etapas o fases con el propósito de cumplir con los objetivos, tanto el general como los específicos, en concordancia con el grado de avance que se iba logrando y se estipuló en un cronograma de actividades que requirió de una actualización permanente. Las fases se hicieron con base en los objetivos específicos de la tesis y, aunque se programaron cronológicamente, se tomó en cuenta la necesidad de trabajar, en algunos momentos simultáneamente, en algunas de esas fases.

A continuación describimos dichas etapas o fases.

2.6.1 Fase 1. Análisis preliminares sobre el desarrollo de las ideas del cálculo y la emergencia de las cantidades infinitamente pequeñas.

Dadas las características de la tesis, con el diseño de actividades basadas en la noción de "magnitud infinitamente pequeña" en lugar del límite de una función, una primer etapa del trabajo consistió en determinar las situaciones problema que se pretenden resolver con el estudio de Cálculo Diferencial e Integral I de las carreas de ingeniería y posteriormente hacer un estudio bibliográfico sobre los diferentes acercamientos que se dieron al cálculo de razones instantáneas de cambio u obtención de las dimensiones de alguna característica de interés en un fenómeno, empleando los procesos infinitos y particularmente los referentes a las noción de las magnitudes infinitesimales.

Para ello se hizo una revisión de libros, artículos y tesis que desarrollaran o incluyeran aspectos referentes al tema de nuestro interés.

2.6.2 Fase 2. El significado institucional de referencia y el establecimiento del significado institucional pretendido por el diseño.

En esta parte se hizo un estudio del programa del curso de Cálculo Diferencial e Integral I de las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora, mediante el cual se detectaron los tipos de situaciones problema que se pretende resolver con el curso, así como la determinación general de los objetos matemáticos puestos en juego mediante la utilización de la noción de límite.

Una vez determinado el significado pretendido por el currículo, se realizó una búsqueda de propuestas de enseñanza del cálculo usando las magnitudes infinitamente pequeñas, que sirvieran también como referencia para el diseño de nuestra propia propuesta, mediante la cual se pretende que los estudiantes construyan sistemas de prácticas para la resolución de las situaciones problema señaladas en el plan de estudios, pero con base en el acercamiento con las magnitudes infinitamente pequeñas.

Una vez realizadas estas dos acciones se hizo la selección de contenidos para el estudio de la derivada de una función, con énfasis en la noción de razón instantánea de cambio.

2.6.3 Fase 3. Elaboración del diseño.

Con los contenidos seleccionados, se hizo entonces un bosquejo de la trayectoria epistémica que organizara secuencialmente las secuencias y actividades por proponer.

Se elaboró la propuesta por medio de secuencias didácticas con actividades de inicio, desarrollo y cierre (como se propone en el currículo de México). En el diseño de las actividades se incorporaron análisis diversos de carácter cognitivo (que las actividades estuvieran en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes), ecológico, afectivo o actitudinal, mediacional e interaccional.

Con base en estos elementos y los criterios de idoneidad didáctica se hizo un análisis a priori de la propuesta.

2.6.4 Fase 4. La implementación, el análisis a posteriori y modificaciones al diseño.

En una primera etapa se realizó una aplicación piloto de la propuesta, con 15 estudiantes de Cálculo Diferencial e Integral II de las carreras de Ingeniería, pero no habían hecho un análisis como el presentado en estas secuencias. La experimentación piloto quedó inconclusa por el inicio del confinamiento motivado por la enfermedad COVID-19 pero con lo realizado se pudieron detectar algunos aspectos que se necesitaban modificar, principalmente los se relacionados con la idoneidad interaccional, con la consideración de que en otros rubros era aún complejo extraer conclusiones.

Ante la situación imperante, se optó por realizar una experimentación completa en la modalidad de educación a distancia, lo cual arrojó diferencias respecto al trabajo presencial, algunos favorables y otros en desventaja. Una desventaja que se tuvo consistió en que la realización se hizo como se había contemplado en un origen, como un estudio de casos, pero ahora las posibilidades de selección de estudiantes estuvo más restringida y se trabajó con 8 estudiantes que recientemente habían concluido su curso de Cálculo Diferencial e Integral II, quienes voluntariamente manifestaron su disposición a colaborar en este trabajo, el cual forma parte de las actividades realizadas con una nueva concepción de lo que es el cálculo y de cuáles son sus contenidos.

La plataforma utilizada para la experimentación permitió organizarlos para el trabajo en dos equipos de 4 integrantes cada uno, a los que era posible observar pero no de forma simultánea. Esta forma de trabajo, consecuentemente, no permitía tener una visión panorámica del trabajo pero facilitaba escuchar lo que los estudiantes comentaban entre sí y observar las anotaciones que compartían en pantalla.

Las sesiones de trabajo, tanto las de equipo como las de discusiones grupales fueron grabadas y los estudiantes entregaron por escrito sus apuntes para la resolución de problemas planteados, con lo cual se pudo hacer un estudio completo de su actividad.

De esta manera, se tuvieron los elementos para hacer un análisis a posteriori y contrastarlo con el análisis a priori realizado con anterioridad, con el propósito de contar con elementos justificados para hacer modificaciones a las secuencias didácticas propuestas. Tanto el análisis a priori como el análisis a posteriori se realizaron con base en los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

Por último y como acción consecuente, se hicieron las modificaciones al diseño de las secuencias didácticas, con el propósito de mejorar la idoneidad didáctica en los puntos que se juzgó apropiado hacerlo.

2.7 Características metodológicas del trabajo experimental.

Un trabajo de tesis como el presente, centrado en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza y el aprendizaje no sigue propiamente las metodologías empleadas en los procesos de investigación, pero tampoco le son ajenos, pues al someter el diseño a experimentación, en los hechos se realiza algún tipo de investigación y eso nos motiva a decidir elementos mínimos a considerar para esta fase experimental.

Lo primero que debemos destacar es que el propósito de la investigación no consiste en profundizar en el conocimiento de un determinado fenómeno u objeto, sino, partiendo de lo que se asume como construido por la comunidad que nos sirve de referencia se procede a hacer el diseño (con elementos epistémicos, cognitivos, y otros) y la experimentación busca detectar las deficiencias e inconsistencias del diseño, para tener elementos que contribuyan a mejorar el mismo, con base en los análisis que el marco teórico seleccionado nos permite hacer.

Sin embargo, nos parece que la metodología de investigación proporciona directrices que pueden retomarse para hacer los análisis de la fase experimental con el propósito de mejorar el diseño de las actividades didácticas, pues el diseño se hizo a partir de análisis preliminares que vaticinaban el posible éxito de su aplicación y a partir de lo sucedido en la fase experimental se hizo un análisis a posteriori para contrastarlo con el análisis preliminar, con el propósito, insistimos, no de profundizar en el conocimiento del fenómeno de estudio, sino de mejorar el diseño.

Con estas consideraciones, se decidió que lo más conveniente para tener elementos de análisis era hacer un estudio basado en los criterios de la *idoneidad didáctica* propuestos en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y el Conocimiento Matemáticos, con lo cual estamos en condiciones de hacer un estudio descriptivo del funcionamiento del diseño de actividades didácticas.

En Hernández (2006, p. 102) se dice que:

> "Con frecuencia, la meta del investigador consiste en describir fenómenos, situaciones, contextos y eventos; esto es, detallar cómo son y se manifiestan. Los **estudios descriptivos** buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (Danhke, 1989). Es decir, miden, evalúan o recolectan datos sobre diversos conceptos (variables), aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno a investigar. En un estudio descriptivo se selecciona una serie de cuestiones y se mide o recolecta información sobre cada una de ellas, para así (valga la redundancia) describir lo que se investiga".

Precisamente el análisis de la idoneidad didáctica, a partir de los indicadores usados, conducen a hacer un análisis exhaustivo de carácter descriptivo de la práctica educativa en el aula, de un texto, de una secuencia didáctica u otros aspectos educativos.

Las razones expuestas nos conducen a aplicar los criterios de idoneidad didáctica señalados con la finalidad de hacer un estudio descriptivo tanto del diseño de las secuencias didácticas, como de los resultados contenidos al llevarlos a la práctica.

A continuación presentamos la propuesta didáctica, a la que se le dedica el capítulo 3 del presente trabajo.

CAPÍTULO 3. LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Tomando en cuenta los elementos teóricos señalados, diseñamos una propuesta cuyo esquema general es el descrito en las líneas siguientes, con la realización de seis secuencias didácticas que en su conjunto constituyen la trayectoria epistémica del diseño. Para mayor claridad, cada secuencia se presenta con su correspondiente trayectoria.

3.1 Ilustración de las actividades diseñadas

Con el propósito de ilustrar el tipo de actividades diseñadas, a continuación, se muestran partes de cada secuencia.

3.1.1 Secuencia 1

La contaminación mundial por desechos plásticos es un problema que nos responsabiliza a todos. Actualmente se producen 300 000 000 de toneladas de plástico al año en todo el mundo. Debido a esta producción de plástico, se estima que para el año 2050 haya más plástico que peces en el mar. A consecuencia de la producción y acumulación de plástico, existen islas de plástico del tamaño de continentes, como la "Gran Mancha de Basura del Pacífico".

- **I.- Contesta lo que se te pide.**

1.- ¿Realizas alguna actividad en tu vida cotidiana para la disminución de contaminación? ¿Cuáles?

2.- ¿Qué productos plásticos utilizas? Menciona mínimo tres.

3.- De todos esos que ya mencionaste. ¿Cuál consideras que se aprovecha mejor al momento de reciclarlo? ¿Por qué?

- **II.- Contesta lo que se te pide, sin hacer uso de la notación científica. Puedes utilizar calculadora. Describe el procedimiento.**

1.- ¿Cuántos kilogramos equivalen a la cantidad de plástico que se produce al año en el mundo? *Recuerda que 1 ton = 1000 kg.*

2.- Si sabemos que hay 7 450 000 000 de habitantes en el mundo y suponemos que todos generamos la misma cantidad de basura plástica:

a) ¿Cuántos kilogramos generaría una sola persona en un año?

b) ¿Qué porcentaje representa la basura generada por una persona en la contaminación mundial?

- **III.- Con base a los datos calculados anteriormente. Contesta lo que se te pide.**

a) ¿Qué diferencia hay entre una persona que no genera basura en su día a día y una que genera el peso promedio de basura, con respecto al porcentaje de contaminación mundial?

b) ¿Qué diferencia habría entre el porcentaje de una persona que genera el peso promedio de basura al día y una que generaría el doble?

Desarrollo: Contaminación y reciclaje en México

Con base a las estadísticas que registra la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos), México es uno de los países que más produce basura en el planeta. Se genera alrededor de 43 800 000 toneladas de residuos al año. Sin embargo, también es el país encargado de reciclar el 70% del de plástico que se consumen cada año.

- **I.- Contesta lo que se pide. Utiliza tu calculadora. Muestra el procedimiento.**

1.- ¿Qué porcentaje de contaminación mundial aporta México al año?

2.- Si se estima que el 1% del total de basura es plástico. ¿Cuántos kilogramos de plástico se reciclaría al año en México?

3.- Si sabemos que hay 126 800 000 habitantes en México según el censo del año 2019. ¿Qué porcentaje aporta México si se sumara el porcentaje de un habitante más?

4.- Supongamos que todos reciclan la misma cantidad de plástico. ¿Cuánto peso de reciclaje generaría una persona en México? ¿Y qué porcentaje representaría dentro del reciclaje total en México?

5- Conociendo los datos anteriores

a) ¿Qué porcentaje representaría el reciclaje de dos personas?

b) Si tenemos una cierta cantidad de alumnos, ¿qué porcentaje representaríamos?

- **II.- Señala en la recta cada porcentaje que calculaste en el transcurso de la actividad. Señala de manera distinta cada uno de los puntos.**

Cierre

Cantidades grandes y pequeñas

Como se observó, existen magnitudes grandes, muy grandes, naturales hasta cierto punto, pequeñas y muy pequeñas. Lo que hace que una cantidad sea clasificada de esta manera es la comparación de una cantidad con otra. Sin compararlas puede resultar no tan clara la identificación del tamaño de su magnitud, por ejemplo 0.1, 1, 10, 100, y es que además de su comparación, el contexto de la situación en la que se plantee también juega un papel importante, por ejemplo: El Producto Interno Bruto (PIB) de México en el año 2017 era de \$22,494,218,500,000.00 de pesos, donde \$1,000,000 de pesos es tan solo el 0.000004% del PIB en México. En cambio, si la porción de concentración de plomo en el aire de algún sitio excede los 0.0000015 gramos por metro cúbico, cualquier persona que respire en dicho sitio corre el riesgo de intoxicarse gravemente. Aparentemente un millón es una cantidad grande en comparación con los gramos de plomo, pero estas cantidades al ser comparadas con su respectivo contexto son vistas de manera distinta.

- **I.- Con base a la información anterior contesta lo que se te pide.**

1. ¿Cómo es el peso de un protón comparado con el peso de 2 protones?
2. ¿Cómo es el peso de un neutrón comparado con el peso de una bacteria?
3. ¿Cómo es la longitud de tu pie derecho comparada con la longitud de tu pie izquierdo?
4. ¿Cómo es el peso de un pez comparado con el peso de un cardumen con 30 peces?
5. ¿Cómo es el peso de un camarón comparado con el peso de 5 tiburones?
6. ¿Cómo es el peso de un ratón comparado con el peso de una ballena azul?
7. ¿Cómo es el peso de un alga comparado con el peso del Tule?
8. ¿Cómo es el peso de una hormiga comparado con el peso de 10 elefantes?
9. ¿Cómo es el peso de un microbio comparado con el peso de 20 ballenas azules?
10. ¿Cómo es el peso de una partícula subatómica comparado con el peso de Júpiter?

- **II.- Describe 3 situaciones que se comparen y representen las siguientes diferencias.**

- Diferencia muy pequeña

- Diferencia pequeña

- Diferencia grande

- Diferencia muy grande

- **III.- Conteste lo que se te pide.**

1.- Un protón tiene una masa de 1.6×10^{-27} kg. ¿Puedes dar una cantidad de masa más pequeña a esa? ¿Cuál?

2.- Si elevamos a una potencia de dos la masa del protón. ¿Qué valor resulta? ¿Se hace más grande o más pequeño al valor original?

3.- En el caso que se hiciese más pequeño. ¿Siempre podemos hacer una cantidad dada más pequeña? ¿Por qué?

4.- ¿Cómo podríamos hacer una cantidad más pequeña si esta es infinitamente pequeña?

3.1.2 Secuencia 2

Inicio

Supongamos que tiene un segmento de recta numérica con un rango de 0 a 10 cm.

- **I. Conteste lo que se le pide.**

1.- Dibuje un segmento de recta y represente 5 valores numéricos mayores a cero.

2.- Dibuje un segmento de recta y grafique 5 valores de entre el 0 y el 3.

3.- Dibuje un segmento de recta y grafique 5 valores de entre el 0 y el 1.

4.- ¿Cuál es el valor más pequeño que se puede representar en la recta? Grafíquelo

Si se asumiera que x es el número real positivo más pequeño, estaríamos en una contradicción, pues es evidente que x dividido entre dos es más pequeño. En otras palabras. $\forall\, x \in \mathbb{R}, x > 0$, se cumple que $0 < \frac{x}{2} < x$.

- **II. Con el mismo segmento de recta del ejercicio anterior. Resuelva lo que se le pide.**

Los infinitésimos son números infinitamente pequeños. Se representan con el símbolo δ y cumplen con las siguientes características: $\delta > 0$ y $\delta^2 = 0$.

1.- Grafique en la recta todos los valores de la actividad anterior. Represente con x a un número real muy pequeño y grafique δ.

2.- Compare 0, x, y δ en la recta, y ordene de manera ascendente 0, x^2 y δ^2. Recuerde: $a < b \rightarrow a^2 < b^2 \leftrightarrow a, b > 1$.

Si $x < \delta$, entonces $x^2 < \delta^2 \rightarrow 0 < x^2 < 0$. Por lo que x no existe.

3.- Con la información anterior, grafique 0, δ, y x.

4.- ¿Existe un valor entre 0 y δ? Grafíquelo y argumente la respuesta con sus palabras.

Sabiendo que $0 < \delta \ll x\ \forall x \in \mathbb{R}$. Se deduce que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x \rightarrow 0 < \delta < x$

5.- ¿Qué distancia hay entre δ y $\frac{\delta}{2}$?

Si x, y son tan cercanos, entonces $x \cdot y$ es infinitesimal $\rightarrow x \approx y$.

Desarrollo

- **I. Con la recta que ya se ha utilizado. Conteste lo siguiente.**

1.- Marque un punto arbitrario en la recta. ¿Cuál es el siguiente punto más cercano? Grafíquelo.

2.- ¿Cuál es el punto anterior más cercano? Grafíquelo.

3.- ¿Existe algún otro número entre el que está antes y después, que no sea el marcado inicialmente? Argumente su respuesta.

4.- ¿Cuánto mide la distancia entre el 1 y el siguiente valor en la recta numérica? Grafíquelo.

5.- Marque en la recta numérica el 1, $1 + \delta$ y el $1 + \frac{\delta}{2}$.

6.- ¿Qué distancia es mayor, la del 1 al $1 + \delta$ o la del 1 al $1 + \frac{\delta}{2}$? ¿Se puede medir esa longitud? Argumente su respuesta.

Las cantidades infinitamente pequeñas son tan pequeñas que no hay otra más pequeña que la misma. De ser operada como cociente entre un número real para reducir su tamaño esta volvería a ser la más pequeña. La diferencia entre una cantidad infinitesimal y otra es tan pequeña que no se puede medir.

La relación entre un número natural n y un infinitesimal δ consiste en que su producto siempre es infinitesimal, es decir $\forall n \; n\delta \approx \delta$. O bien, el producto de un número natural por un número infinitesimal es un número infinitesimal.

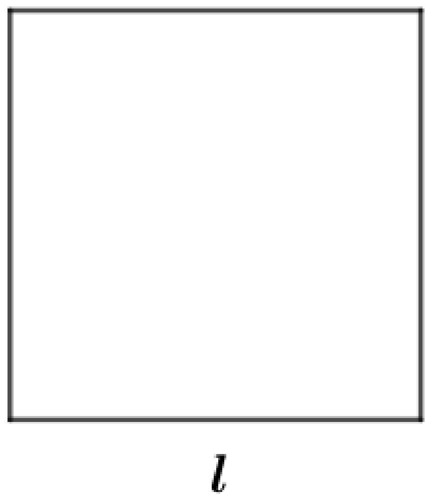
- **II. En una recta numérica grafique lo siguiente.**

1.- $2(3+\delta)$

2.- $3(-1+\delta)$

3.- $1(2-\delta)$

Cierre



- **I. Conteste lo que se te pide con base a la figura. Utilice una regla de ser necesario.**

1.- ¿Cuál es el área del cuadrado? Exprese con símbolos matemáticos.

2.- ¿Cuánto mediría la base del cuadrado si el lado l incrementara 2 cm? ¿Y si aumentara 1 cm? ¿Y si aumentara 0.5 cm? ¿Y si aumentara 0.1 cm? ¿Y si aumentara δ cm?

Suponiendo que x es el valor medido de l

3.- Calcule y represente el área del cuadrado con cada uno de sus incrementos. Expréselo con símbolos matemáticos y fórmulas correspondientes.

Los aumentos mínimos siempre serán números infinitesimales, y por lo que ya hemos observado hay más de un número infinitesimal. Por lo que es importante diferenciar el significado que tienen o lo que representan en diversas situaciones.

4.- Represente geométricamente los incrementos de 2 y δ

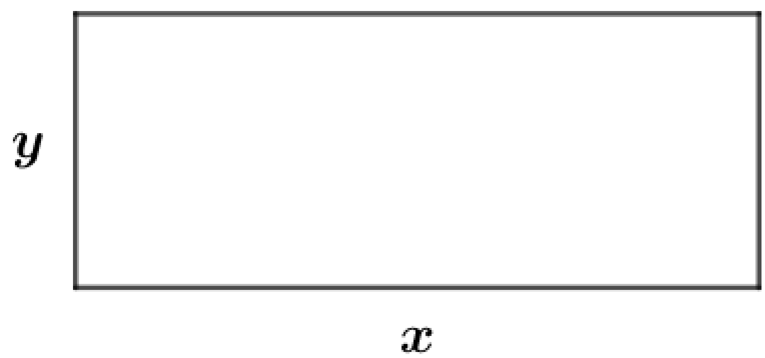
3.1.3 Secuencia 3

Inicio

- **I. Con base en la siguiente figura, conteste las siguientes preguntas.**

1.- Con base en las medidas de la figura anterior. ¿Cuál es su área?

2.- Supongamos que el lado x de la figura incrementó $2\,cm$. ¿Cómo serían las dimensiones de la figura? Dibuje el incremento en la figura.



3.- Supongamos que ahora el lado x de la figura incrementa $1\,cm$. ¿Cómo serían las dimensiones de la figura? ¿Y si incrementa $0.1\,cm$? Dibuje los incrementos en la figura del inciso 2 con una marca diferente para cada medida.

4.- Si fijáramos las dimensiones del lado x de la primera figura, es decir, las dimensiones originales, pero esta vez los incrementos dados afecten al lado y. ¿Cómo serían las dimensiones si incrementaran las mismas medidas que el lado x en los incisos anteriores? Dibuje en la siguiente figura cada una de sus medidas con diferentes marcas.

Desarrollo

- **I. Con base en la figura del ejercicio anterior, conteste las siguientes preguntas.**

1.- Si el lado x incrementara en un valor infinitesimal, ¿cómo se representaría el incremento con símbolos matemáticos? Explíquelo.

2.- Si el lado y incrementa un valor infinitesimal, ¿cómo se representaría dicho incremento en símbolos matemáticos? Explíquelo.

3.- ¿Cómo se calculan los incrementos δx y δy de los lados x y y? Explíquelo con sus palabras y símbolos matemáticos.

4.- ¿Cómo se representaría el área de la figura con el incremento infinitesimal solamente en el lado x? ¿Cómo lo representaría solamente para el lado y?

5.- ¿Cómo se representaría el área de la figura si ambos incrementos ocurrieran al mismo tiempo?

6.- ¿Cómo se calcularía el área incrementada?

Letra griega "δ", es una letra que se utiliza con más de un. Algunos de sus significados son los siguientes:

- Representa una magnitud escalar infinitesimal.
- Si se piensa como algo dinámico, puede ser representada como una variación infinitesimal de alguna variable determinada. Si una variable representa el valor de una cantidad cuyo valor varía, podemos decir que las variables varían, siempre.

- **II. Conteste las siguientes preguntas.**

1.- Si en una figura cuadrangular el lado y incrementa tres veces de lo que incrementa el lado x. Explique verbalmente.

a) ¿Qué es x y y?
b) ¿Qué es δx?
c) ¿Qué es δy?
d) ¿Qué es δy con respecto a δx?
e) Expresa con símbolos matemáticos las relaciones proporcionales de incrementos δy y δx. Explique con sus palabras lo que el significado de cada una.

f) Expresa con símbolos matemáticos el procedimiento para el cálculo del diferencial del área de la figura.

2.- Exprese con símbolos matemáticos las siguientes situaciones. Tome en cuenta que estas situaciones cambian proporcionalmente unas con respecto a las otras.

a) δy varía 4.5 veces cuando δx varía una vez.
b) δs varía 65 veces cuando δt varía una vez.
c) δA varía m veces cuando δB varía una ve

3.- En el inciso C, ¿qué significa la m?

Cuando existe una variación infinitesimal en una variable independiente, entonces el valor de dicha variable, varía a través de intervalos fijos en el dominio. Estos intervalos se representan como Δx. Sin embargo, existen variaciones infinitesimales de una variable que varía a consecuencia de otra variable, la cual se denomina variable dependiente. A este tipo de variaciones se les conoce como *diferenciales*.

Cierre

- **I.- Conteste lo que se te pide.**

1.- Supongamos que δs representa un diferencial en la posición (en metros) de un objeto que se mueve durante un cierto período, y que δt representa un diferencial en el número de minutos durante los que ocurre δs. Entonces $\delta s = 3\delta t$ a medida que el valor de δt está variando.

a) Cuando $\delta t = 2\ min$, ¿cuánto varió la posición?
b) Cuando $\delta t = 0.5\ min$. ¿cuánto varió la posición
c) Cuando $\delta t = 0.0001\ min$, ¿cuánto varió la posición?
d) Cuando $\delta t = -2\ min$, ¿cuánto varió la posición?

2.- Un automóvil con un motor grande y potente alcanza una velocidad máxima de 490 km/h, supongamos que r representa dicha velocidad, que D representa la distancia en km que recorrió a su máxima velocidad y que t representa el tiempo transcurrido, en horas.

a) Explique con palabras lo que representan δD y δt.
b) ¿Cuál es la diferencia de D y δD?
c) ¿A qué es igual δD cuando $\delta t = 5$ horas? No olvides las unidades.
d) ¿A qué es igual δD cuando $\delta t = 0.00005$ horas? No olvides las unidades.
e) ¿A qué es igual δt cuando $\delta D = 200\ km$?

3.- Un tren viaja a una velocidad constante de 120 km/h durante 15 minutos. Si representamos con s el número de kilómetros que viajó dicho tren y con t el número de minutos que ha viajado de una estación a otra.

a) ¿Qué representan δs y δt?
b) ¿A qué es igual δs cuando $\delta t = 0.0001$ min?
c) ¿A qué es igual δt cuando δs es igual a 1 km?

4.- ¿Qué significa que y varía a razón constante con respecto a x? ¿Cómo varía δx? ¿Cómo varía δy?

5.- Un autobús viaja a una velocidad constante de 95 km/h desde que ingresa a la autopista. Es decir, la cantidad de kilómetros que recorre en cualquier período de tiempo a esta velocidad constante es 95 veces la cantidad de horas en ese período de tiempo.

a) ¿Cuáles son las cantidades y y x en el contexto? ¿Qué son δy y δx? Exprese la relación simbólica de ambos diferenciales.
b) Después de llegar al destino, el autobús viaja durante 0.5 horas a una velocidad constante de 95 km/h. Durante ese período de tiempo, la cantidad de kilómetros que recorrió el autobús ese día aumenta en (95) (0.5) kilómetros. ¿Qué son y y x en esta situación? ¿Qué son δy y δx? ¿Qué es m?
c) ¿Hay alguna diferencia entre afirmar que $y = mx$ o que $\delta y = m\delta x$? Explique en términos del movimiento del autobús.

6.- Un autobús salió de Hermosillo en dirección a Culiacán. Este viaja a una velocidad constante de 90 km/h. Sea y el número de kilómetros del autobús medidos desde Culiacán (no desde Hermosillo), y x sea el número de horas conducidas ese día. ¿Cuál de las siguiente afirmaciones sobre la relación entre y y x es verdadera? Explique.

a) $y = mx$
b) $\delta y = m\delta x$

7.- Se llena de gasolina el tanque de un automóvil a una rapidez constante de 0.2 l/seg. El tanque ya contenía 20 litros cuando el automóvil llegó. Sea y el número de litros de gasolina del tanque, y sea x el número de segundos transcurridos desde que se empezó a llenar. ¿Qué afirmación sobre la relación entre y y x es verdadera? Explique.

a) $y = mx$
b) $\delta y = m\delta x$

3.1.4 Secuencia 4

Inicio (Individual)

- **I. Siga las indicaciones, y conteste las preguntas correspondientes.**

Grafique las siguientes funciones:

a) $y = x$
b) $y = x^2$

1.- ¿Cómo aumenta la variable y en cada caso?

2.- ¿Cuál es la diferencia de aumentos en cada caso?

3.- ¿Qué significados tienen los siguientes elementos? Expréselo con palabras y símbolos matemáticos.

a) δx:
b) δy:
c) y:

Desarrollo (Equipo)

- **I. Siga las indicaciones, y conteste las preguntas correspondientes.**

Dibuje la gráfica de una función cualquiera que varíe de manera no constante, y que al mismo tiempo cumpla con la siguiente condición: Dicha función f debe variar a una tasa constante de 0.8 con respecto a las variaciones en x, pero solo durante un $\Delta x = 1.5 \leq x \leq 2$, y $f(1.5) = 2$.

1.- ¿Cómo es el comportamiento de la función dibujada? ¿Cómo es el comportamiento de variación en el intervalo Δx de la función? Exprese con sus palabras.

2.- ¿Qué significados tienen los siguientes elementos? Expréselo con palabras y símbolos matemáticos.

d) δx:
e) δy:
f) m:
g) y:

3.- Escribe el valor numérico que tiene y en las siguientes situaciones. Marca con un punto cada coordenada resultada en la gráfica dibujada previamente.

a) $\delta x = 0.1$
b) $\delta x = 0.3$
c) $\delta x = 0.5$

Discusión: Dos cantidades que varían a una tasa constante entre sí se relacionan linealmente. Es decir, en coordenadas cartesianas es una línea recta. Por lo tanto, los diferenciales están relacionados linealmente. La gráfica en coordenadas cartesianas de uno en relación con el otro será una línea recta.

Cierre (Individual)

- **I. Lea la situación y responda lo que se le pide.**

Un carrito de control remoto viaja sobre una pista a una velocidad constante de 5 m/seg, y recorre 13 m.

1.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de 1 m. ¿Cuántos segundos pasa el automóvil en cada intervalo?

2.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de 1/250 m. ¿Cuántos segundos pasa el automóvil en cada intervalo?

3.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de 1/5000 m. ¿Cuántos segundos pasa el automóvil en cada intervalo?

4.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de δx pies (δx puede ser un número muy pequeño o infinitésimo). ¿Cuántos segundos pasa el auto en cada intervalo?

5.- ¿Qué relación encuentras entre las preguntas 1-4 con los diferenciales?

Discusión: Como se declaró previamente, un *diferencial* es un término polisémico. Sus es una variación infinitesimal de una variable, ya sea independiente o dependiente. A su vez, este tipo de variaciones pueden ser pensadas como momentos, es decir, momento anterior, momento actual y momento posterior. Donde el momento posterior es el momento actual más el diferencial y el momento anterior es el momento actual menos el diferencial. El cálculo de diferenciales con ayuda de momentos según sea el caso, es el siguiente:

- La diferencia del momento actual y el momento anterior
- La diferencia del momento posterior y el momento anterior.
- La diferencia del momento posterior y el momento actual.

Como se puede observar los *diferenciales* pueden ser pensados como una diferencia de momentos, cambios o variaciones.

3.1.5 Secuencia 5

Inicio

- **I. Resuelva los siguientes problemas. (Equipo)**

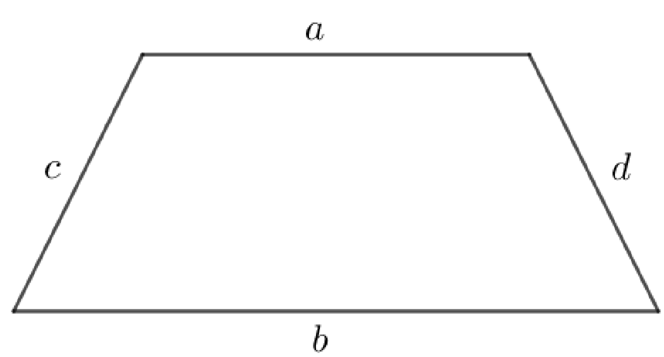
1.- Una moto se mueve a una velocidad constante de 90 km/h por una autopista recta.

a) ¿Qué distancia recorre en 2 horas?
b) ¿Qué distancia recorre en un segundo?
c) Con base en la fórmula de la posición $x = vt + x_0$, calcule los diferenciales de la posición y del tiempo del problema previamente mencionado. Recuerde que un diferencial puede representar variación y a su vez diferencia de variaciones.
d) Calcule el diferencial de la posición con respecto al tiempo
e) Explique con sus palabras el resultado del inciso anterior.
f) ¿Pueden existir cambios en el resultado del diferencial de la posición con respecto al tiempo? Explíquelo con sus palabras.

Desarrollo

- **I.- Dada la siguiente figura, utilice las medidas de los lados de la figura y conteste las siguientes preguntas. (Individual)**

$\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = 5}$, $\boldsymbol{c = 2.66}$, $\boldsymbol{d = 2.66}$



a) Calcule el perímetro

b) Calcule el diferencial de cada uno de sus lados

c) Calcule el diferencial del perímetro

Discusión: El diferencial de una suma de variables, es la suma de sus diferenciales.

Cierre

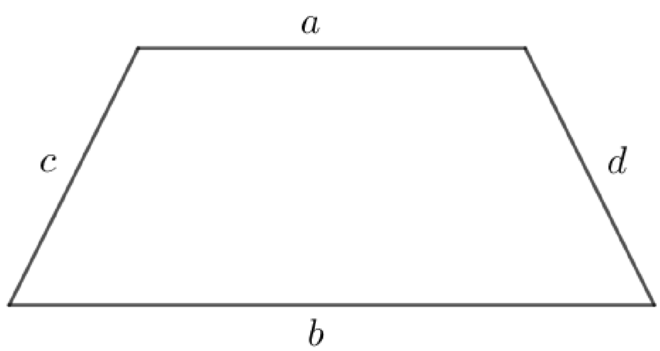
I.- Siga las indicaciones y conteste lo que se le pide. (Equipo)

Dibuje un rectángulo, donde la medida de su ancho sea v, y la de su largo sea u. Así como un incremento δ para cada uno de estos lados.

a) Calcule el área de la figura sin incrementos.
b) Calcule el área de la figura con incrementos.
c) Calcule el diferencial del área.

Discusión: El diferencial de un producto de variables, es la suma de productos resultantes del diferencial de la primera variable por la segunda variable y la primera variable por el diferencial de la segunda variable.

II.- Dada la siguiente figura, utilice su regla para medir los lados de la figura y conteste las siguientes preguntas. (Individual)



a) Calcule el perímetro

b) Calcule el diferencial de cada uno de sus lados

c) Calcule el diferencial del perímetro

3.1.6 Secuencia 6

Inicio (Individual)

- **I. Resuelva los siguientes problemas.**

1.- Con el uso de diferenciales aproxime el área de una pompa de jabón cuando su radio aumenta de 2 a 2.015 cm.
2.- Un tanque cilíndrico tiene una altura de 1.5 metros, y un diámetro de 60 centímetros. ¿Cuánto disminuirá el volumen si a las paredes internas (no a la tapa y base) se les coloca una capa de pintura de 1 mm?

Desarrollo (Equipo)

- **I. Resuelva los siguientes problemas.**

1.- Supongamos que un pintor pinta 90 metros cuadrados de pared en una hora y otro pintor pinta 100 metros de la misma pared en una hora. ¿A qué razón se pinta dicha pared cuando ambos pintores están trabajando al mismo tiempo, con respecto al tiempo? Use diferenciales.

2.- La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $P \times V = C$, donde C es una constante. ¿Con qué razón cambia el volumen con respecto a la presión? Use diferenciales.

Cierre (Individual)

- **I. Resuelva el siguiente problema.**

1.- La ley de gravitación universal de Isaac Newton establece una relación proporcional de la fuerza con que se atraen dos puntuales con masa. Newton dedujo que la fuerza con que se atraen dos cuerpos tenía que ser directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Es decir:

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

¿Con qué razón cambia la fuerza de atracción gravitatoria F, entre dos masas puntuales m_1 y m_2, con respecto a la distancia r entre ella? Use diferenciales.

- **II.- Dada la siguiente esfera de radio r, conteste lo siguiente.**

a) Calcule el área de la figura

b) Calcule el diferencial del área de la figura con respecto a su radio

c) Calcule el diferencial del área con respecto al radio

d) Calcule el volumen de la figura

e) Calcule el diferencial del volumen de la figura

f) Calcule el diferencial del volumen con respecto al radio

3.2 Análisis de las secuencias didácticas

Con el propósito de mostrar los análisis de cada secuencia presentada previamente, en las siguientes líneas se encuentran las directrices con las que se realizaron los diseños de las secuencias, que en su conjunto son la base para la trayectoria epistémica global seguida.

3.2.1 Descripción de la secuencia 1

La primera secuencia de este diseño está enfocada en cantidades grandes y pequeñas. Esta secuencia está compuesta por dos problemas de contexto extramatemático. El primer contexto consta de tres bloques, y el segundo de dos bloques. La razón de esta separación se debe, a que se espera que de esa forma se cree una manera eficiente a la hora de analizar la secuencia completa con respecto a la estructura de los contenidos. Cada bloque fue desarrollado con base en las distintas herramientas del marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Estas herramientas son los llamados objetos primarios (*situaciones, lenguaje, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos*), e idoneidades (*epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, ecológica, interaccional)*. A continuación se mostrará una descripción de la secuencia y sus respectivos bloques con respecto a las herramientas del marco teórico ya mencionado.

Al iniciar, se da breve una descripción de lo que es el contexto extramatemático, en este caso la contaminación mundial. Se muestran datos adicionales sobre el tema para complementar al desarrollo de las actividades.

I.- El primer bloque consta de tres preguntas, cuya intención principal es atender la idoneidad emocional y ecológica. Se abordan preguntas como: *"¿Realizas alguna actividad en tu vida cotidiana para la disminución de contaminación? ¿Cuáles?"*. Si bien, este bloque no trata acerca de nada matemático, contribuye en generar un ambiente en el cual irse familiarizando para situaciones posteriores. Dentro de los objetos primarios, solo se trata de un *Lenguaje* natural. *Situaciones* extramatemáticas. A*rgumentos* Expresar acciones o hábitos dentro del contexto extramatemático.

II.- El segundo bloque también consta de tres preguntas, mediante las cuales se tratan cosas como, *"¿A cuántos kilógramos asciende la cantidad de plástico que se produce al año en el mundo? Recuerda que 1 ton = 1000 kg."*. Como se mencionó, el problema estaba formulado en unidades distintas al del sistema internacional de mediciones con la intención de dar otra atención a la idoneidad ecológica, epistémica y cognitiva. Al tener que realizar la conversión de unidades, también se generaría un acercamiento a las unidades que se utilizan más frecuentemente para este tipo de casos. Además que se obliga a realizar una operación de conversión de unidades, también se puede observar si el alumno tiene en su zona de desarrollo potencial el significado de una conversión, ya que será necesaria dentro de toda la secuencia, y de no ser así, poder tener un punto de partida. La aparición de los objetos primarios puede estar implícitamente en el problema o pueden surgir mediante las respuestas esperadas, es decir, pueden ser intervinientes o emergentes, según sea el caso. En este caso, los objetos que aparecen son: *Lenguaje* natural y numérico, "1 ton = 1000 kg, entonces, si sé cuánto vale una tonelada en kilogramos, basta con multiplicar esa cantidad, por la cantidad de toneladas que tengo que convertir.". C*onceptos* como las cantidades muy grandes "$300000000000\ kg$", y muy pequeñas, "0.00000001342%". *Procedimientos* como los cocientes de cantidades muy grandes entre cantidades muy grandes, el cociente entre dos cantidades con una grande, y de productos de cantidades naturales entre cantidades muy grandes, por ejemplo, "$\frac{3000000000}{7450000000}$."

III.- El tercer bloque consta de solo dos preguntas, referidas al segundo bloque, y se busca que el estudiante reflexione acerca de los resultados obtenidos, por ejemplo, *"¿Qué diferencia hay entre una persona que no genera basura en su día a día y una que genera el peso promedio de basura, con respecto al porcentaje de contaminación mundial?"*. Ahí se espera que el estudiante note que una cantidad muy pequeña, que no es cero, pero que tampoco existe una diferencia apreciable de una cantidad y la otra, por otro lado, la pregunta restante provoca que el alumno compare esa primera cantidad muy pequeña, con el doble de la misma y argumente si existe alguna diferencia de una con la otra respecto a sus magnitudes. Los objetos primarios que aparecen son: *Lenguaje* lengua materna. *Concepto* cantidad muy pequeña, cero. *Procedimiento* diferenciación de magnitudes, operación con cantidades muy pequeñas. *Proposiciones* un número pequeño se parece a un número de su misma magnitud muy pequeña; un número muy pequeño no es cero, pero es casi cero; el producto de un número natural por un número muy pequeño, sigue siendo un número muy pequeño. *Argumentos* la diferencia de una cantidad muy pequeña es casi cero, pero no es cero. La diferencia de una cantidad muy pequeña y el doble de la misma es casi nula.

Después de concretar con esta serie de preguntas, inicia el segundo contexto extramatemático, Referido a la contaminación en México, en el se busca que el entorno ecológico sea aún más familiar que el anterior, para lo cual se presentan estadísticas tanto en cantidades numéricas, como en porcentajes. Con base en esos datos, los estudiantes deberán realizar operaciones parecidas a las que ya realizaron anteriormente, pero con otro tipo de conclusiones y argumentos.

IV.- En este cuarto bloque, primero se parte de una pregunta que liga con el contexto anterior, que es, *"¿Qué porcentaje de contaminación mundial aporta México al año?"*, con ella se busca que haya una relación entre contextos y a su vez que se vaya generando la conversión numérica a porcentaje, ya que este resultado será un índice de comparación resultados posteriores. Acto seguido, se brindan datos extras como: *"Si se estima que el 1% del total de basura es plástico"* o *"Si sabemos que hay 126 800 000 habitantes en México."*. Esto para la obtención de relaciones entre magnitudes, como la relación kg/habitante. Hecho esto, se simula una situación en la que hay que calcular el porcentaje total de la producción de basura por cada habitante, más la suma de uno. Con esto, se busca generar una reflexión sobre la repercusión de una cantidad muy pequeña, dentro de una cantidad normal. Para después concluir que una cantidad de esa magnitud tiene el valor de cero al sumarla con una de magnitud considerablemente mayor. Después se hacen comparaciones parecidas, como, *"¿Cuánto peso de reciclaje generaría una persona en México? ¿Y qué porcentaje representaría dentro del reciclaje total en México?"* y se provocan situaciones de múltiplos naturales a cantidades pequeñas, como *"Si tenemos en cuenta que en el salón somos 50 personas, ¿qué porcentaje representaríamos?"*. Con todo esto, los objetos primarios que aparecen son: *Lenguaje* natural, numérico, porcentaje. *Concepto* cantidades muy pequeñas. *Procedimientos* cocientes de cantidades pequeñas grandes entre grandes, productos entre cantidades grandes, naturales y muy pequeñas, suma de cantidad muy pequeña con cantidad natural. *Proposición* la suma de una cantidad muy pequeña a una cantidad natural es imperceptible o cero. *Argumento* se mostraron relaciones entre números y cantidades, donde se mostró que una cantidad por una cantidad muy pequeña sigue siendo muy pequeña, se mostró que al sumar una cantidad muy pequeña a una cantidad natural esta última ignora la más pequeña a tal punto de reflejarla como una adición nula, se mostraron porcentajes con representación numérica de cantidades muy pequeña, y magnitudes de kilogramos con representaciones numéricas de cantidades muy grandes.

V.- En este último bloque, se espera que el estudiante pueda representar en una recta numérica todos y cada uno de los porcentajes anteriormente calculados y obtenidos. La intención de esto es conocer la capacidad de representación de números en un segmento de recta, y plantear un acercamiento a la relatividad de cantidades. Con esta idea, se espera que el profesor introduzca cuestiones como, *"¿Qué pasaría si quisiéramos señalar un número tan pequeño, que incluso con los parámetros de números muy pequeños aún no* *se pudiese manifestar la diferencia entre ellos? ¿Cómo le llamarías?"*, esto para dar entrada a números infinitesimales. Los objetos primarios que aparecen en este bloque son: *Lenguaje* gráfico, natural. *Conceptos* cantidades muy pequeñas, cantidades naturales. *Procedimientos* representación en una recta numérica de cantidades porcentuales. *Argumentos* dificultad para la identificación de las magnitudes cerca del cero.

Después de este bloque, se formula una breve explicación de lo que se hizo en las actividades con la intención de esto es de consolidar a idea de tal manera que haya un concepto institucionalizado.

VI.- En este bloque se busca que los estudiantes hagan comparaciones sobre diversas cantidades, desde el peso de un protón comparado con el peso de dos protones, hasta el peso de una partícula subatómica comparado con el peso del planeta Júpiter. Se hacen 10 comparaciones donde cada vez la diferencia entre ejemplos es más grande, esto implica que un número cada vez es más pequeño con respecto al otro. Los objetos primarios que emergen son: *Lenguaje* natural. *Conceptos* cantidades muy pequeñas. *Procedimientos* resta entre cantidades, identificación de cantidades numéricas *Argumentos* la secuencia de comparaciones de números provocaban que cada vez un número fuese más y más pequeño con respecto a otro número.

VII.-En este bloque se busca concretar la idea de cantidad muy pequeña, pero con una pequeña intervención de cantidad finita. Se parte de la masa de una partícula subatómica como es el protón, para así preguntar una masa o un número más pequeño que ése, el cual efectivamente existe. Después se opera con esa cantidad con la intención de que se comprenda que siempre habrá un número más pequeño, y que para obtenerlo con restar o dividir entre algún otro número dicha cantidad. Al final, se plantea la siguiente pregunta, "*¿Cómo podríamos hacer una cantidad más pequeña si ésta es infinitamente pequeña?"*. Ya que solo habíamos manejado cantidades finitas, esta operación consiste en obtener una cantidad cada vez más pequeña era posible, pero con cantidades infinitamente pequeñas ya se no puede. Los objetos primarios que aparecen son: *Lenguaje* natural, decimal. *Concepto* cantidades muy pequeñas, cantidades infinitamente pequeñas. *Proposición* una cantidad finita siempre puede ser más pequeña si se opera adecuadamente, una cantidad infinitamente pequeña no puede ser más pequeña. *Procedimientos* potenciación al cuadrado de una cantidad pequeña, argumento para la validación de que siempre una cantidad finita siempre puede ser más pequeña bajo el efecto de alguna operación que lo provoque. *Argumentos* Una cantidad finita siempre podrá ser más pequeña si así lo desea, las cantidades infinitamente pequeñas no pueden ser más pequeñas.

3.2.2 Descripción de la secuencia 2

La segunda secuencia de este diseño está enfocada en números infinitamente pequeños. A lo largo de la secuencia se trata con la representación algebraica y gráfica de cantidades infinitesimales algebraica y gráfica, así como operaciones entre infinitesimales con naturales, la suma y la multiplicación entre ellos.

La secuencia consta de 4 bloques de actividades, se parte de dos nociones o recursos para el desarrollo del tema. Por una parte, se trabaja con un segmento de recta numérica de 0 a 10 y por otra parte, se utiliza la figura de un cuadrado con un lado de tamaño l con solo un bloque de actividades.

I. El primer bloque describe las diferentes condiciones de graficación en el segmento de recta planteado. Para esto se pide que se dibuje y represente 5 valores numéricos, después esos 5 valores pero con un rango más reducido de 0 a 1, para al último graficar el más pequeño. El bloque se cierra con una proposición según la cual todo número real siempre se podrá hacer más pequeño si se divide entre algún otro número natural. Los objetos primarios que aparecen: *Lenguaje* gráfico, natural y algebraico. *Concepto* cantidad natural y cantidad pequeña. *Proposición* un número real siempre será más pequeño al dividirle algún número natural. *Procedimientos* graficación de puntos en una recta, identificación de rangos entre cantidades. *Argumentos* puntos en una gráfica, en una recta real siempre habrá un número en medio de dos números por más pequeño que sean.

II. El segundo bloque formaliza lo que son los números infinitamente pequeños o infinitésimos, mostrando dos características de los mismos: $\delta > 0$ y $\delta^2 = 0$. Con esas características, se pide que se elaboren prácticas similares al primer bloque, por ejemplo: *"Grafica la recta y ordena el valor más pequeño y δ". "Compara 0, x, y δ en la recta, y ordena 0, x^2 y δ^2. Recuerda: $a < b \rightarrow a^2 < b^2$".* Acto seguido se argumenta de manera intuitiva que no existe un número real entre el cero y δ de manera intuitiva. Para confirmar que el concepto quedó claro, se grafica 0, δ y x. De nuevo se muestran otras dos características de los números infinitesimales, $0 < \delta \ll x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $0 > \delta \gg x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Para culminar la idea se pregunta sobre la diferencia entre un infinitesimal y ese infinitesimal dividido entre dos. Los objetos primarios que aparecen son: *Lenguaje* natural, gráfico, algebraico. *Concepto* números infinitesimales. *Proposición* $\delta > 0$, $0 < \delta \ll x \, \forall x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x \rightarrow 0 < \delta < x$

Procedimientos graficación de números reales e infinitesimales en una recta numérica, ordenación de cantidades de forma ascendente. *Argumentos* no existe número real más pequeño que δ, el número siguiente del cero es un número infinitesimal, la longitud entre un infinitesimal y otro es infinitesimal, por lo que puede decirse que son casi iguales.

III. En el tercer bloque se sigue trabajando con la misma recta, en este caso se parte graficando un número cualquiera en la recta, cualquiera, para después preguntar sobre el número siguiente y el anterior en esa misma recta. Procedemos a graficar específicamente el 1, para después comparar el 1, el $1 + \delta$ y el $1 + \frac{\delta}{2}$. Se pregunta sobre la diferencia entre la longitud de $1 + \delta$ y $1 + \frac{\delta}{2}$ en la que se puede concluir que esa diferencia es inmedible. También se añade una nota en la que se describen más relaciones de números naturales con infinitesimales, como que el producto de un número natural y un infinitesimal da como resultado un número infinitesimal. Los objetos primarios que aparecen son: *Lenguaje* gráfico, algebraico y natural. *Conceptos* números infinitesimales. *Procedimientos* suma de números naturales con infinitesimales, producto de números naturales con infinitesimales, graficación de números naturales e infinitesimales en una recta numérica. *Proposición* $\forall n \; n\delta \approx \delta$, las cantidades infinitamente pequeñas son tan pequeñas que no hay otra más pequeña que la misma. *Argumentos* la gráfica de números naturales e infinitesimales en una recta numérica, cantidad infinitesimal resultado del producto de un número natural y un número infinitesimal, la longitud entre un número infinitesimal y otro no es medible, la diferencia entre cantidades infinitesimales.

IV. El cuarto bloque consta de graficar tres productos de un número n por un número natural y una cantidad infinitesimal. Un número natural multiplicando una suma de natural con infinitesimal dará como resultado un número natural y un número infinitesimal. Este resultado será graficado en el segmento de recta. *Lenguaje* natural, gráfico, algebraico. *Concepto* números infinitesimales. *Procedimiento* graficación de productos con cantidades infinitesimales en una recta numérica. *Argumentos* el valor numérico será representado geométricamente en la recta numérica con un punto.

V. El quinto bloque se plantea una situación de una figura abstracta, en este caso un cuadrado de lado $l \, cm$. Se pregunta primero el área de dicho cuadrado, después se aumenta consecutivamente el lado de medida l, primero $2\ cm$, $1\ cm$, $0.5\ cm$, $0.1\ cm$ y por último $\delta\ cm$. Graficado lo anterior, se pregunta sobre el comportamiento del área del cuadrado con base en los incrementos dados previamente. La actividad culmina con una nota en la que se resume que siempre un aumento mínimo será un aumento infinitesimal, y que además existen diferentes tipos de representaciones para un número infinitesimal, por lo que habrá que aprender a diferenciarlas según sea el caso. *Lenguaje* natural, algebraico. *Concepto* números infinitesimales, incrementos infinitesimales. *Procedimientos* cálculo aritmético y algebraico de variaciones en el lado de un cuadrado, representación gráfico y algebraico de cantidades infinitesimales. *Argumentos* Incrementos algebraicos y gráficos del área de un cuadrado en dependencia de la medida del lado, medidas de variaciones del lado de un cuadrado, medidas de variaciones en el área de un cuadrado.

3.2.3 Descripción de la secuencia 3

La tercera secuencia de este diseño está enfocada sobre el símbolo δ. De tal manera que a lo largo de la secuencia se define en más de una ocasión; de manera fija, de manera variable, el efecto que ocurre al acompañar dicho símbolo de una variable y las diferencias con las que usamos los símbolos δx y Δx.

Esta secuencia se divide en tres bloques, que son formados por distintas actividades.

I. El primer bloque inicia con una figura rectangular de base x y altura y. Primero se realiza el cálculo del área de dicha figura, después se incrementan cada uno de los lados de manera independiente con incrementos que primero son de $2\ cm$, después de $1\ cm$, y por último de $0.1\ cm$. Estos incrementos son dibujados en la figura previamente mencionada. Después de la representación gráfica de los incrementos pertenecientes a cada uno de sus lados, estos mismos incrementos se representan de forma algebraica con símbolos matemáticos. La fórmula con la que se calcula el área de la figura inicial ahora retoma los incrementos en cada uno de sus lados de forma independiente, para después calcular el área tomando en cuenta los incrementos de sus lados, pero con los incrementos sucediendo simultáneamente. *Lenguaje* natural, numérico, simbólico, figural. *Concepto* valor infinitesimal, variable, variación infinitesimal. *Proposición* δ como variación muy pequeña o infinitesimal. *Procedimientos* cálculo de área de una figura abstracta, argumentación y representación de incrementos en los lados de la figura. *Argumentos* La representación infinitesimal de una variable en específico está representada con el símbolo δ y la variable.

II. El segundo bloque se centra sobre variaciones, que se ven como incrementos en una variable. Siguiendo el mismo ejemplo de la figura abstracta, se formula una serie de preguntas para la interpretación de símbolos, entre ellos δx y δy, así como la relación que éstos tienen entre sí. Esto con la intención de construir una serie de expresiones utilizando los elementos ya identificados. También se define una razón proporcional que relaciona una variación con otra. Para culminar con esta actividad del bloque, se agrega una nota que define las representaciones de la variación de la variable independiente, donde se trata la diferencia con la que usamos los símbolos δx y Δx. En la que Δx es tratada como la magnitud finita de los intervalos de tiempo, y δx como la variación infinitamente pequeña de la variable independiente. Por otro lado, también se trata a la variación de la variable dependiente δy, como la variación que ocurre gracias a que otra variable varía. *Situación* Lados variables de una figura abstracta. *Lenguaje* simbólico, natural. *Concepto* variación, variables, diferenciales. Proposición δx es un diferencial, Δx es un intervalo de variación de la variable independiente. *Procedimiento* Explicar el significado de cada elemento o símbolo matemático perteneciente a la situación planteada. *Argumentos* Definición de cada elemento de la situación, expresión de incrementos.

III. En el tercer bloque, las actividades se centraron en utilizar los diferenciales, tanto para su representación, como para su identificación en situaciones, dado que ya estaban declarados. En la primera actividad el objetivo es el manejo de diferenciales, se da una breve explicación de qué representa cada diferencial en el contexto, para después solucionar problemas. En los siguientes problemas, se explican las variables, pero no los diferenciales, aquí se deben identificar y explicar el papel que juegan dentro del contexto del problema. Después de los problemas con contexto, sigue un problema abstracto cuyo objetivo es que los estudiantes argumenten qué son los diferenciales y cómo es la relación entre ellos. Y por último vuelven a aparecer problemas de contexto extramatemático, pero esta vez solamente situaciones para que los estudiantes identifiquen cada elemento del problema: variables, diferenciales y razón proporcional de variación. *Situaciones* extramatemáticas e intramatemáticas. *Lenguaje* natural, simbólico. *Conceptos* variable, diferenciales, razón proporcional. *Procedimientos* Operar con diferenciales, modelar situaciones extramatemáticas con diferenciales, identificar diferenciales en situaciones extramatemáticas, describir la relación de un diferencial con respecto a otro. *Argumentos*

Las variaciones de un diferencial con respecto al otro, definición del diferencial de variable independiente y dependiente, el significado de diferenciales en contextos extramatemáticos, la diferencia de relaciones entre variables y diferenciales.

3.2.4 Descripción de la secuencia 4

La cuarta secuencia trata del uso de los diferenciales de manera pragmática utilizando funciones matemáticas- Funciones matemáticas, así como de la como la identificación de diferenciales en contextos diversos, para resolver problemas.

I.- En el primer bloque inicia solicitando al estudiante que grafique una función cualquiera cumpliendo la condición establecida en la actividad. Con ayuda de esa gráfica se resuelven problemas como el comportamiento de la función que se dibujó en el intervalo Δx. Después se identifican elementos de la función, así como diferenciales, como ya se había hecho en actividades previas. Se calcula el valor numérico de las variaciones de una variable. Y culmina con una proposición, que establece que cuando dos cantidades que varían a una tasa constante entre sí, su representación gráfica será lineal. *Situación*: una función cualquiera con un intervalo Δx de tamaño infinitesimal. *Lenguaje*: Verbal, figurativo, algebraico, numérico. *Conceptos*: Diferenciales, función, intervalo, linealidad. *Procedimientos*: Graficación de una función, análisis del comportamiento de la función, identificación de elementos de la función, cálculos numéricos de valores con base en los diferenciales de la variable dependiente. *Proposición*: Dos cantidades varían a una tasa constante entre sí se relacionan linealmente. *Argumentos*: Significados que los elementos de una función y sus diferenciales, comportamientos de una función, valor numérico de una diferencial de una función.

II.- Se plantea una situación extramatemática de un carrito de juguete, que viaja a una velocidad constante y recorre una cierta distancia. Después se plantean preguntas del siguiente estilo: *"Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de* $1\,m$. *¿Cuántos segundos pasa el automóvil en cada intervalo?"* Esto para hacer hincapié en las diferencias que existen entre el valor numérico de cada diferencial. Y por último se le pide al estudiante que argumente qué relación existe entre ese tipo de situaciones. *Situación*: Un carrito de juguete con una velocidad constante y una distancia recorrida. *Lenguaje*: Verbal, algebraico numérico. *Conceptos*: Diferenciales, linealidad. *Procedimientos*: Cálculos numéricos utilizando diferentes valores del diferencial de la variable independiente. *Argumentos*: El valor de cada diferencial cada vez es más pequeño. Sin importar el tamaño la representación gráfica del diferencial de la función siempre será una línea recta y su expresión algebraica será lineal.

3.2.5 Descripción de la secuencia 5

El propósito de esta secuencia es deducir las reglas de suma y producto de diferenciales mediante la resolución de problemas.

La parte de inicio está conformada por una actividad en la cual se presenta un contexto extramatemático sobre la velocidad de una moto. Con esto se plantean preguntas como: *¿Qué distancia recorre en 2 horas?* Con la finalidad de hacer un cálculo aritmético de una velocidad promedio con una velocidad relativamente grande, para después poder calcular una velocidad en intervalos de tiempo cada vez más pequeños. Con los progresos en las secuencias anteriores, podemos dar paso a un cálculo algebraico de diferenciales, calculando el diferencial de la posición de la moto en un determinado tiempo, y después el diferencial de la posición con respecto al tiempo. Con base en los cálculos previos, se pide que se argumente acerca de los resultados obtenidos respondiendo preguntas como: *¿Pueden existir cambios en el valor del diferencial de la posición con respecto al tiempo? Explíquelo con sus palabras.* Los objetos primarios que deberían aparecer son los siguientes: *Situación*: La velocidad de un moto en una autopista recta. *Lenguaje:* Verbal, algebraico y numérico. *Conceptos:* Velocidad, diferencial como variación, diferencial como diferencia de variaciones. *Procedimientos:* Cálculo de velocidad media, cálculo de diferenciales, argumentación de resultados. *Argumentos:* Velocidades medias, diferencial de posición, diferencial de posición con respecto al diferencial de tiempo, argumentación de la relación que existe entre una variación de posición con respecto a una variación de tiempo, validación de que no hay cambios de variaciones por la velocidad constante.

La parte de desarrollo aborda una figura geométrica, específicamente un trapecio, con medidas definidas en sus lados. Con base en dicha figura se plantea el cálculo de su perímetro, la representación algebraica del diferencial de cada uno de sus lados, el cálculo del diferencial de su perímetro. Todo esto para deducir la proposición de que el diferencial de una suma de variables, es la suma de sus diferenciales. Los objetos primarios que aparecen son los siguientes: *Situación:* La figura de un trapecio. *Lenguaje:* Figural, algebraico, numérico. *Conceptos:* Perímetro de un trapecio, diferencial como variación, diferencial como suma de variables. *Proposición:* El diferencial de una suma de variables, es la suma de sus diferenciales. *Procedimientos:* Cálculo de perímetro de un trapecio, cálculo del diferencial del perímetro del trapecio. *Argumentos:* El perímetro del trapecio, el diferencial de cada uno de sus lados, el diferencial del perímetro del trapecio.

Y para culminar con la secuencia, la parte de cierre consta de dos incisos. El primer inciso requiere que el sujeto dibuje un rectángulo, el cual tendrá lados de medidas algebraicas, con un incremento de tamaño infinitesimal (δ). Con el rectángulo se deberá calcular su área, el área con sus incrementos, y el diferencial de su área. Esto para formalizar la proposición que declara que el diferencial de un producto de variables, es la suma de los productos resultantes del diferencial de la primera variable por la segunda variable, y la primera variable por el diferencial de la segunda variable. El segundo inciso aborda la misma figura geométrica del trapecio, solo que esta vez sin las medidas definidas en sus lados. El lado de este trapecio tiene literales como representación de medida de sus lados, el perímetro, el diferencial de cada uno de sus lados y el diferencial de su perímetro. Los objetos primarios que aparecen en este apartado son los siguientes: *Situación:* Un rectángulo con lados de medidas algebraicas, un trapecio con lados de medidas algebraicas. *Lenguaje:* Figural, algebraico y numérico. *Conceptos:* Área, perímetro, diferencial como la variación de una variable, diferencial como la suma de variaciones, diferencial como el producto de variaciones. *Proposición:* el diferencial de un producto de variables, es la suma de los productos resultantes del diferencial de la primera variable por la segunda variable, y la primera variable por el diferencial de la segunda variable. *Procedimiento:* Cálculo de área de un rectángulo, cálculo del diferencial de área de un rectángulo, cálculo de perímetro de un trapecio, cálculo de diferencial del perímetro de un trapecio.

3.2.6 Descripción de la secuencia 6

El propósito de esta secuencia es aplicar los conocimientos construidos sobre números infinitesimales y diferenciales en secuencias previas. Esta secuencia está conformada solamente por problemas extramatemáticos en los que se deberá hacer uso de variaciones infinitesimales.

La parte de inicio está conformada por dos problemas. El primer problema trata de calcular el área de una pompa de jabón, cuyo radio aumenta una cantidad indicada. Se deberá calcular el diferencial del área con respecto al diferencial del radio. Es decir la repercusión que tiene una variación infinitesimal en el radio, en la variación el área de la burbuja de jabón. En el segundo problema se plantea un tanque cilíndrico con una altura y un diámetro. Se busca determinar la disminución o la variación en su volumen si se le coloca una capa de pintura muy pequeña. En este caso se calcula el diferencial del volumen con respecto al diferencial del radio del cilindro. *Situación:* El área de una burbuja de jabón, el volumen de un tanque cilíndrico. *Lenguaje:* Algebraico. *Conceptos:* Diferencial como variación de una variable con relación a otra. *Procedimientos:* Cálculo del diferencial de área de una esfera, cálculo del diferencial de volumen de un cilindro. *Argumentos:* El diferencial de área y el diferencial de volumen.

La parte de desarrollo también está conformada por dos problemas, como se mencionó previamente, extramatemáticos ambos. El primer problema trata de un par de pintores que están pintando una pared de manera simultánea, pero con rendimientos distintos, y se calcula el diferencial de área de pared pintada. En el segundo problema se aborda la Ley de Boyle, la cual afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión y el volumen satisfacen la ecuación $P * V = C$. El objetivo del problema es calcular la razón a la que cambia el volumen con respecto a la presión, usando diferenciales. *Situación:* El área de una pared pintada por un par de pintores, La Ley de Boyle. *Lenguaje:* Algebraico. *Conceptos:* Diferencial como variación de una variable con relación a otra. *Procedimientos:* Cálculo del diferencial del área de una pared pintada, cálculo de la razón de cambio del volumen con respecto a la presión en la Ley de Boyle. *Argumentos:* El diferencial del área de la pared pintada, la razón de cambio del volumen con respecto a la presión en la Ley de Boyle.

Y para concluir la secuencia, se incluye un par de problemas en la parte de cierre. El primero trata de la Ley de la Gravitación Universal de Isaac Newton, la cual establece que la fuerza con que se atraen dos masas puntuales es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Se calcula la razón con la que cambia la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales con respecto a la distancia entre ellas, usando diferenciales. En el segundo problema, el único problema intramatemático, se calcula el diferencial de área y volumen de una esfera, con relación a su radio de medida r. *Situación:* La Ley de Gravitación Universal, una esfera. *Conceptos:* Diferencial como variación de una variable con relación a otra. *Procedimientos:* Cálculo del diferencial de la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales con respecto a la distancia entre ellas, cálculo del diferencial del área de una esfera con relación al diferencial del radio, cálculo del diferencial del volumen de una esfera con relación al diferencial del radio. *Argumentos:*

El diferencial de la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales con respecto a la distancia entre ellas, el diferencial del área de una esfera con relación al diferencial del radio, el diferencial del volumen de una esfera con relación al diferencial del radio.

3.3 Posibles respuestas de las secuencias diseñadas

Como parte del análisis a priori sobre la factibilidad de usar nuestras secuencias didácticas para la enseñanza del cálculo, nos dimos a la tarea de responder las secuencias didácticas previamente mostradas, con la intención de hacer un análisis de lo diseñado y una valoración de la idoneidad didáctica del mismo. Este análisis a priori nos permitirá contrastar con las respuestas efectivamente realizadas por los estudiantes, para tener una valoración más detallada y completa de nuestro diseño.

3.3.1 Posibles respuestas de la secuencia 1

Inicio: Contaminación Mundial (Individual)

La contaminación mundial es un problema que nos responsabiliza a todos. Actualmente se producen 300 000 000 de toneladas de plástico al año en todo el mundo. Debido a esta producción de plástico, se estima que para el año 2050 haya más plástico que peces en el mar. A consecuencia de la producción y acumulación de plástico, existen islas de plástico del tamaño de continentes, como la "Gran Mancha de Basura del Pacífico".

- **I.- Contesta lo que se te pide.**

1.- ¿Realizas alguna actividad en tu vida cotidiana para la disminución de contaminación? ¿Cuáles?

Sí, trato de tirar la basura en su lugar, evito el consumo de popotes, trato de reciclar lo más que puedo, etc.

2.- ¿Qué productos plásticos consumes? Menciona mínimo tres.

Las botellas de refrescos, los platos desechables, los cubiertos desechables.

3.- De todos esos que ya mencionaste. ¿Cuál consideras que se aprovecha mejor al momento de reciclarlo? ¿Por qué?

Botellas de plástico porque una vez se funde completamente el plástico se puede revertir en un recipiente como molde para crear diferentes figuras de plástico.

- **II.- Contesta lo que se te pide, sin hacer uso de la notación científica. Puedes utilizar calculadora. Describe el procedimiento.**

1.- ¿Cuántos kilogramos equivalen a la cantidad de plástico que se produce al año en el mundo? *Recuerda que 1 ton = 1000 kg.*

1 ton = 1000 kg, entonces, si sé cuánto vale una tonelada en kilogramos, basta con multiplicar esa cantidad, por la cantidad de toneladas que tengo que convertir. Es decir,

$$total\ de\ kilogramos = \frac{(1000\ kg)(300000000\ ton)}{(1\ ton)} = 300000000000\ kg$$

2.- Si sabemos que hay 7 450 000 000 de habitantes en el mundo y suponemos que todos generamos la misma cantidad de basura:

a) ¿Cuántos kilogramos generaría una sola persona en un año?

Si conozco la cantidad total de basura generada en un año y que la cantidad de basura generada en el mundo por cada habitante es la misma, entonces, basta con dividir la cantidad de basura generada al año entre la cantidad de habitantes. Es decir,

$$\frac{3000000000\ kg}{7450000000\ hab} = 40.26\ kg/hab$$

b) ¿Qué porcentaje representa la basura generada por una persona en la contaminación mundial?

Basta con conocer el total de basura, donde este sea el 100% y el producido por cada habitante, y aplicar una regla de 3.

$$\frac{(40.26\ kg)(100\%)}{300000000000\ kg} = 0.00000001342\%$$

- **III.- Con base a los datos calculados anteriormente. Contesta lo que se te pide.**

a) ¿Qué diferencia hay entre la cantidad promedio de basura que genera una persona basura en día y la ausencia de basura en el caso de otra persona, con respecto al porcentaje de contaminación mundial?

La cantidad promedio de basura de una persona que genera una persona, con respecto al total mundial de basura generado es una cantidad muy pequeña, de tal suerte que la diferencia entre dicha cantidad y la de quien no genera basura, es prácticamente insignificante.

b) ¿Qué diferencia habría entre el porcentaje de una persona que genera el peso promedio de basura al día y una que generaría el doble?

La diferencia entre una y otra es muy pequeña. Ambas son cantidades muy pequeñas y la diferencia entre ellas también es muy pequeña.

Desarrollo: Contaminación y reciclaje en México

Con base a las estadísticas que refleja la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos), México es uno de los países que más produce basura en el planeta. Se genera alrededor de 43 800 000 toneladas de residuos al año. Sin embargo, también es el país encargado de reciclar el 70% del de plástico que se consumen cada año.

- **I.- Contesta lo que se pide. Utiliza tu calculadora. Muestra el procedimiento.**

1.- ¿Qué porcentaje de contaminación mundial aporta México al año?

Si sabemos que en el mundo se producen 300000000000 kg al año, entonces

$$\frac{43800000000}{300000000000} = 14.6\%$$

2.- Si se estima que el 1% del total de basura es plástico. ¿Cuántos kilogramos de plástico se reciclaría al año en México?

Si tenemos el total de toneladas, primero lo convierto a kg

$$43800000(1000) = 43800000000\ kg$$

Pero en México sólo el 1% de toda la basura es plástico, por lo tanto

$$43800000000(0.01) = 438000000\ kg$$

Y ya que sólo se recicla el 70% del plástico, entonces

$$438000000(0.7) = 306600000\ kg$$

3.- Si sabemos que hay 126 800 000 habitantes en México según el censo del año 2019. ¿Qué porcentaje aportaría México si se sumara el porcentaje de un habitante más?

Primero habrá que calcular, cuánto contamina un solo mexicano, por lo tanto

$$\frac{43800000000}{126800000} = 345.42\ kg$$

De esa cantidad, habrá que calcular su porcentaje,

$$\frac{345.42}{300000000000} = 0.00000000115\%$$

Para entonces sumarlo al total

$$14.6 + 0.00000000115 \ \approx\ 14.6\%$$

y en la calculadora:

$$14.6 + 0.00000000115 =\ 14\%$$

4.- Supongamos que todos reciclan la misma cantidad de plástico. ¿Cuánto peso de reciclaje generaría una persona en México? ¿Y qué porcentaje representaría dentro del reciclaje total en México?

Suponiendo que todos los habitantes en México reciclan lo mismo, tendríamos que cada persona reciclaría:

$$\frac{306600000}{126800000} = 2.41\ kg$$

Y si el 100% de reciclaje es 306600000 kg, entonces

$$\frac{2.41}{306600000} = 0.0000000786\%$$

5- Conociendo los datos anteriores

a) ¿Qué porcentaje representaría el reciclaje de dos personas?

Si sabemos que la cantidad de plástico que recicla una persona es 0.00000000786, entonces

$$0.00000000786(2) = 0.00000001572\%$$

b) Si tenemos una cierta cantidad de alumnos, ¿qué porcentaje representaríamos?

Con la misma escala anterior, podemos concretar que,

$$0.00000000786(50) = 0.000000393\%$$

- **II.- Señala en la recta cada porcentaje que calculaste en el transcurso de la actividad. Señala de manera distinta cada uno de los puntos.**

Cierre: Cantidades grandes y pequeñas

Como se observó, existen magnitudes grandes, muy grandes, naturales hasta cierto punto, pequeñas y muy pequeñas. Lo que hace que una cantidad sea clasificada de esta manera es la comparación de una cantidad con otra. Sin compararlas puede resultar no tan clara la identificación del tamaño de su magnitud, por ejemplo 0.1, 1, 10, 100, y es que además de su comparación, el contexto de la situación en la que se plantee también juega un papel importante, por ejemplo: El Producto Interno Bruto (PIB) de México en el año 2017 era de $22,494,218,500,000.00 de pesos, donde $1,000,000 de pesos es tan solo el 0.000004% del PIB en México. En cambio, si la porción de concentración de plomo en el aire de algún sitio excede los 0.0000015 gramos por metro cúbico, cualquier persona que respire en dicho sitio corre el riesgo de intoxicarse gravemente. Aparentemente un millón es una cantidad grande en comparación con los gramos de plomo, pero estas cantidades al ser comparadas con su respectivo contexto son vistas de manera distinta.

- **I.- Con base a la información anterior contesta lo que se te pide.**

1. ¿Cómo es el peso de un protón comparado con el peso de 2 protones?

Es casi igual

1. ¿Cómo es el peso de un neutrón comparado con el peso de una bacteria?

Es casi igual, ambas cantidades son muy pequeñas

2. ¿Cómo es la longitud de tu pie derecho comparada con la longitud de tu pie izquierdo?

Casi iguales, nuestro cuerpo no es simétrico, por lo tanto uno es más que otro

3. ¿Cómo es el peso de un pez comparado con el peso de un cardumen con 30 peces?

Es pequeño

4. ¿Cómo es el peso de un camarón comparado con el peso de 5 tiburones?

Es pequeñísimo

5. ¿Cómo es el peso de un ratón comparado con el peso de una ballena azul?

Es muy pequeño

6. ¿Cómo es el peso de un alga comparado con el peso del Tule?

Es muy muy pequeño

7. ¿Cómo es el peso de una hormiga comparado con el peso de 10 elefantes?

Es mucho muy pequeño

8. ¿Cómo es el peso de un microbio comparado con el peso de 20 ballenas azules?

Es pequeñísimo

9. ¿Cómo es el peso de una partícula subatómica comparado con el peso de Júpiter?

Es muchísimo muy pequeño

- **II.- Describe 3 situaciones que se comparen y representen las siguientes diferencias.**
    - Diferencia muy pequeña

Un átomo comparado con dos átomos

Un microbio comparado con dos microbios

Un grano de arena con dos granos de arena

- Diferencia pequeña

El peso de una hormiga comparado con el peso de una abeja

Un centímetro comparado con tres centímetros

El peso de una canica comparado con el peso de 5 canicas

- Diferencia grande

El peso de un camarón con el peso de una ballena

La distancia de Hermosillo a Navojoa comparado con la distancia de Hermosillo a París

El volumen de una gota de agua comparado con el volumen de una jarra de agua

- Diferencia muy grande

El peso de un grano de arena comparado con el peso del desierto del Sahara

El peso de un grano de azúcar comparado con el peso de un costal de azúcar

El peso de un átomo comparado con el peso de la Tierra

- **III.- Contesta lo que se te pide**

1.- Un protón tiene una masa de 1.6×10^{-27} kg. ¿Puedes dar una cantidad de masa más pequeña a esa? ¿Cuál?

Sí, 2×10^{-28} kg

2.- Si elevamos al cuadrado la masa del protón. ¿Qué valor resulta? ¿Se hace más grande o más pequeño al valor original?

2.56×10^{-56}, se hace más pequeño.

3.- En el caso que se hiciese más pequeño. ¿Siempre podemos hacer una cantidad dada más pequeña? ¿Por qué?

Sí, porque basta con que saber algún valor, siempre podré restarle uno y eso hará que se haga más pequeño.

4.- ¿Cómo podríamos hacer una cantidad más pequeña si esta es infinitamente pequeña?

No sé, no se podría.

3.3.2 Posibles respuestas de la secuencia 2

Inicio

Supongamos que tiene una recta numérica con un rango de 0 a 10 cm.

- **I. Conteste lo que se le pide.**

1.- Dibuje la recta y represente 5 valores numéricos mayores a cero.

2.- Dibuje la recta y grafique 5 valores de entre el 0 y el 3.

3.- Dibuje la recta y grafique 5 valores de entre el 0 y el 1.

4.- ¿Cuál es el valor más pequeño que se puede representar en la recta? Grafíquelo

Si se dice que x es el más pequeño, entonces, hay un número que dividido entre dos resulte más pequeño al original, lo que significa que no es el más pequeño. En otras palabras. $\forall\, x \in \mathbb{R}, x > 0$, se cumple que $0 < \frac{x}{2} < x$.

- **II. Con la misma recta del ejercicio anterior. Conteste lo que se le pide.**

Los infinitésimos son números infinitamente pequeños. Se representan con el símbolo δ y cumplen con las siguientes características: $\delta > 0$ y $\delta^2 = 0$.

1.- Grafique en la recta todos los valores de la actividad anterior. Represente con x al valor más pequeño y grafique δ.

2.- Compare 0, x, y δ en la recta, y ordene de manera ascendente 0, x^2 y δ^2. Recuerde: $a < b \;\rightarrow\; a^2 < b^2 \;\leftrightarrow a, b > 1$.

Si $x \,<\, \delta$, entonces $x^2 < \delta^2 \rightarrow 0 <\, x^2 < 0$. Por lo que x no existe.

3.- Con la información anterior, grafique 0, δ, y x.

4.- ¿Existe un valor entre 0 y δ? Grafíquelo y argumente la respuesta con sus palabras.

Sabiendo que $0 < \delta \ll x\; \forall x\; \in \mathbb{R}$. Se deduce que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x \rightarrow 0 < \delta < x$

5.- ¿Qué distancia hay entre δ y $\frac{\delta}{2}$?

Si x, y son tan cercanos, entonces $x \cdot y = infinitesimal \;\rightarrow x \approx y$.

Desarrollo

- **I. Con la recta que ya se ha utilizado. Conteste lo siguiente.**

1.- Marque un punto arbitrario en la recta. ¿Cuál es el siguiente punto más cercano? Grafíquelo.

2.- ¿Cuál es el punto anterior más cercano? Grafíquelo.

3.- ¿Existe algún otro número entre el que está antes y después, que no sea el marcado inicialmente? Argumente su respuesta.

4.- ¿Cuánto mide la distancia entre el 1 y el siguiente valor en la recta numérica? Grafíquelo.

5.- Marque en la recta numérica el 1, $1+\delta$ y el $1+\frac{\delta}{2}$.

6.- ¿Qué distancia es mayor, la del 1 al $1+\delta$ o la del 1 al $1+\frac{\delta}{2}$? ¿Se puede medir esa longitud? Argumente su respuesta.

Las cantidades infinitamente pequeñas son tan pequeñas que no hay otra más pequeña que la misma. De ser operada como cociente entre un número real para reducir su tamaño esta volvería a ser la más pequeña. La distancia entre una cantidad infinitesimal y otra es tan pequeña que no se puede medir.

La relación entre un número natural n y un infinitesimal δ consiste en que su producto siempre es infinitesimal, es decir $\forall n\; n\delta \approx \delta$. O bien, el producto de un número natural por un número infinitesimal es un número infinitesimal.

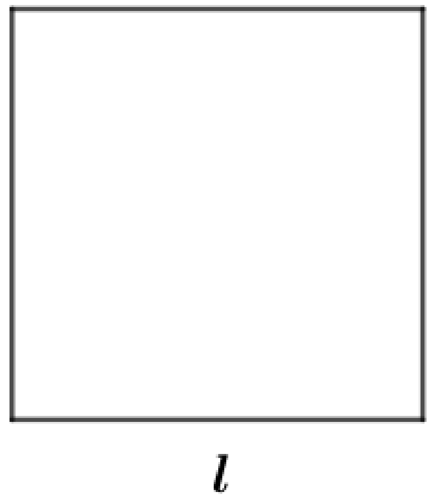
- **II. En una recta numérica grafique lo siguiente.**

1.- $2(3+\delta)$

2.- $3(-1+\delta)$

3.- $1(2-\delta)$

Cierre



- **I. Conteste lo que se te pide con base a la figura. Utilice una regla de ser necesario.**

1.- ¿Cuál es el área del cuadrado? Exprese con símbolos matemáticos.

$A = l^2$

2.- ¿Cuánto mediría la base del cuadrado si el lado l incrementara 2 cm? ¿Y si aumentara 1 cm? ¿Y si aumentara 0.5 cm? ¿Y si aumentara 0.1 cm? ¿Y si aumentara δ cm?

$Suponiendo\ que\ x\ es\ el\ valor\ medido\ de\ l$

1.- Aumento de 2 cm: $x + 2cm$ (Valor numérico)

2.- Aumento de 1 cm: $x + 1\ cm$ (Valor numérico)

3.- Aumento de 0.5 cm: $x + 0.5\ cm$ (Valor numérico)

4.- Aumento de 0.1 cm: $x + 0.1\ cm$ (Valor numérico)

5.- Aumento de δ cm: $x + \delta\ cm$ (Valor algebraico)

3.- Calcule y represente el área del cuadrado con cada uno de sus incrementos. Expréselo con símbolos matemáticos y fórmulas correspondientes.

1.- Aumento de 2 cm: $(x + 2)^2\ cm$ (Valor numérico)

2.- Aumento de 1 cm: $(x + 1)^2\ cm$ (Valor numérico)

3.- Aumento de 0.5 cm: $(x + 0.5)^2\ cm$ (Valor numérico)

4.- Aumento de 0.1 cm: $(x + 0.1)^2\ cm$ (Valor numérico)

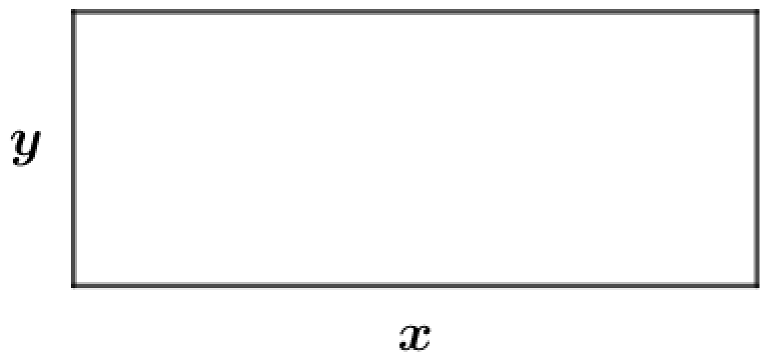
5.- Aumento de δ cm: $(x + \delta)^2\ cm$ (Valor algebraico)

Los aumentos mínimos siempre serán números infinitesimales, y por lo que ya hemos observado hay más de un número infinitesimal. Por lo que es importante diferenciar el significado que tienen o lo que representan en diversas situaciones.

4.- Represente algebraicamente los incrementos de 2 y δ

3.3.3 Posibles respuestas de la secuencia 3
Inicio

- **I. Con base en la siguiente figura, conteste las siguientes preguntas.**



1.- Con base en las medidas de la figura anterior. ¿Cuál es su área?

$A = xy$

2.- Supongamos que el lado x de la figura incrementó $2\,cm$. ¿Cómo serían las dimensiones de la figura? Dibuje el incremento en la figura.

3.- Supongamos que ahora el lado x de la figura incrementa $1\,cm$. ¿Cómo serían las dimensiones de la figura? ¿Y si incrementa 0.1 cm? Dibuje los incrementos en la figura del inciso 2 con una marca diferente para cada medida.

4.- Si fijáramos las dimensiones del lado x de la primera figura, es decir, las dimensiones originales, pero esta vez los incrementos dados afecten al lado y. ¿Cómo serían las dimensiones si incrementaran las mismas medidas que el lado x en los incisos anteriores? Dibuje en la siguiente figura cada una de sus medidas con diferentes marcas.

Desarrollo

1.- Si el lado x incrementara un valor infinitesimal, ¿cómo se representaría el incremento con símbolos matemáticos? Explíquelo.

δx, dado que δ es un valor infinitesimal, basta con asociarlo a una variable x.

2.- Si el lado y incrementa un valor infinitesimal, ¿cómo se representaría dicho incremento en símbolos matemáticos? Explíquelo.

δy, dado que δ es un valor infinitesimal, lo asocié con el lado y.

3.- ¿Cómo se calcularía los incrementos δx y δy de los lados x y y? Explíquelo con sus palabras y símbolos matemáticos.

Al valor con incremento le resto el valor original.

$(x + \delta x) - (x) = x + \delta x - x = \delta x$

$(y + \delta y) - (y) = y + \delta y - y = \delta y$

4.- ¿Cómo se representaría el área de la figura con el incremento infinitesimal solamente en el lado x? ¿Cómo lo representaría solamente para el lado y?

Lado x: $A = (x + \delta x)y$

Lado y: $A = x(y + \delta y)$

5.- ¿Cómo se representaría el área de la figura si ambos incrementos ocurrieran al mismo tiempo?

$A = (x + \delta x)(y + \delta y)$

6.- ¿Cómo se calcularía el área incrementada?

$\delta A = (x + \delta x)(y + \delta y) - xy$

$\delta A = xy + x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y - xy$

$\delta A = x\delta y + y\delta x$

Letra griega "δ", es una letra polisémica, es decir, que tiene más de un significado. Algunos de sus significados son los siguientes:

- Representa una magnitud escalar infinitesimal.
- Si se piensa como algo dinámico, puede ser representada como una variación infinitesimal de alguna variable determinada. Si una variable representa el valor de una cantidad cuyo valor varía, podemos decir que las variables varían, siempre.

- **II. Conteste las siguientes preguntas.**

1.- Si en una figura cuadrangular el lado y incrementa tres veces de lo que incrementa el lado x. Explique verbalmente.

a) ¿Qué es x y y? Es la longitud de cada uno de los lados que conforman a la figura.
b) ¿Qué es δx? Es un incremento infinitesimal en la longitud del lado x.
c) ¿Qué es δy? Es un incremento infinitesimal en la longitud del lado y.
d) ¿Qué es δy con respecto a δx? Es el incremento infinitesimal del lado y proporcional al incremento infinitesimal del lado x.
e) Expresa con símbolos matemáticos las relaciones proporcionales de incrementos δy y δx. Explique con sus palabras lo que el significado de cada una.
$\frac{\delta y}{\delta x} = 3$
$\delta y = 3\delta x$
f) Expresa con símbolos matemáticos el procedimiento para el cálculo del diferencial del área de la figura.
$\delta A = (x + \delta x)(y + \delta y) - xy$
$\delta A = xy + x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y - xy$
$\delta A = x\delta y + y\delta x$
$\delta y = 3\delta x$
$\delta A = x(3\delta x) + y\delta x$
$\delta A = 3x\delta x + y\delta x$

2.- Exprese con símbolos matemáticos las siguientes situaciones.

a) δy varía 4.5 veces cuando δx varía una vez.
$\delta y = 4.5\delta x$
b) δs varía 65 veces cuando δt varía una vez.
$\delta s = 65\delta t$
c) δA varía m veces cuando δB varía una vez.
$\delta A = m\delta B$

.3.- En el inciso C, ¿qué significa la m?

Es la constante de proporción o la razón en la cual una variable, varía con respecto a otra.

Cuando existe una variación infinitesimal en una variable independiente, entonces el valor de dicha variable, varía a través de intervalos fijos en el dominio. Estos intervalos se representan como Δx. Sin embargo, existen variaciones infinitesimales de una variable que varía a consecuencia de otra variable, la cual se denomina variable dependiente. A este tipo de variaciones se les conoce como *diferenciales*.

Cierre

- **I.- Conteste lo que se te pide.**

1.- Supongamos que δs representa un diferencial en la posición (en metros) de un objeto que se mueve durante un cierto período, y que δt representa un diferencial en el número de minutos que durante los que ocurre δs. Entonces $\delta s = 3\delta t$ a medida que el valor de δt está variando.

a) Cuando $\delta t = 2\ min$, ¿cuánto varió la posición?
Varió 6 metros
b) Cuando $\delta t = 0.5\ min$. ¿cuánto varió la posición
Varió 1.5 metros
c) Cuando $\delta t = 0.0001\ min$, ¿cuánto varió la posición?
Varió 0.0003 metros
d) Cuando $\delta t = -2\ min$, ¿cuánto varió la posición?
Varió -6 metros

2.- Un automóvil con un motor grande y potente alcanza una velocidad máxima de 490 km/h, supongamos que r representa dicha velocidad, que D representa la distancia en km que recorrió a su máxima velocidad y que t representa el tiempo transcurrido, en horas.

a) Explique con palabras lo que representan δD y δt.
La variación de la distancia con respecto al tiempo, la variación del tiempo durante un intervalo fijo.
b) ¿Cuál es la diferencia de D y δD?
D es la distancia recorrida, δD es una variación en la distancia recorrida
c) ¿A qué es igual δD cuando $\delta t = 5$ horas? No olvides las unidades.
$\delta D = 2450\ m$
d) ¿A qué es igual δD cuando $\delta t = 0.00005$ horas? No olvides las unidades.
$\delta D = 0.0245\ m$
e) ¿A qué es igual δt cuando $\delta D = 200\ km$? $\delta t = 0.4\ horas$

3.- Un tren viaja a una velocidad constante de 120 km/h durante 15 minutos. Si representamos con s el número de kilómetros que viajó dicho tren y con t el número de minutos que ha viajado de una estación a otra.

a) ¿Qué representan δs y δt?
Una variación en la distancia recorrida con respecto al tiempo, una variación en el tiempo
b) ¿A qué es igual δs cuando $\delta t = 0.0001$ min?
$\delta s = 0.012$ km
c) ¿A qué es igual δt cuando δs es igual a 1 km? $\delta t = 0.008$ min

4.- ¿Qué significa que y varía a razón constante con respecto a x? ¿Cómo varía δx? ¿Cómo varía δy?

Que cuando existe una variación en x, habrá una variación en y de manera proporcional. δx es una variación en x cuando x varía en intervalos de tamaño Δx. δy es una variación en y cuando el valor de y varía en relación con la variación δx.

5.- Un autobús viaja a una velocidad constante de 95 km/h desde que ingresa a la autopista. Es decir, la cantidad de kilómetros que recorre en cualquier período de tiempo a esta velocidad constante es 95 veces la cantidad de horas en ese período de tiempo.

a) ¿Cuáles son las cantidades y y x en el contexto? ¿Qué son δy y δx? Exprese la relación simbólica de ambos diferenciales.

y: La cantidad de kilómetros recorridos

x: La cantidad de horas en un período de tiempo

δy: Es una cierta cantidad de kilómetros recorridos en un lapso de tiempo determinado

δx: Es un lapso de tiempo o cantidad de horas determinadas

$\delta y = 95\delta x$

b) Después de llegar al destino, el autobús viaja durante 0.5 horas a una velocidad constante de 95 km/h. Durante ese período de tiempo, la cantidad de kilómetros que recorrió el autobús ese día aumenta en (95) (0.5) kilómetros. ¿Qué son y y x en esta situación? ¿Qué son δy y δx? ¿Qué es m?

y: La cantidad de kilómetros recorridos

x: La cantidad de horas en un período de tiempo

δy: Es una cierta cantidad de kilómetros recorridos en un lapso de tiempo determinado

δx: Es un lapso de tiempo o cantidad de horas determinadas

$\delta y = 95\delta x$

m: La razón constante con la que varía un diferencial con respecto al otro

c) ¿Hay alguna diferencia entre afirmar que $y = mx$ o que $\delta y = m\delta x$? Explique en términos del movimiento del autobús.

Sí, $y = mx$ significa la distancia recorrida en todo el tiempo, o en un tiempo promedio. $\delta y = m\delta x$ significa la distancia recorrida en un momento, o en un tiempo más preciso.

6.- Un autobús salió de Hermosillo en dirección a Culiacán. Este viaja a una velocidad constante de 90 km/h. Sea y el número de kilómetros del autobús medidos desde Culiacán (no desde Hermosillo), y x sea el número de horas conducidas ese día. ¿Cuál de las siguiente afirmaciones sobre la relación entre y y x es verdadera? Explique.

c) $y = mx$

d) $\delta y = m\delta x$

$\delta y = m\delta x$ Porque se calcula solo un momento dentro del recorrido completo que tuvo el autobús.

7.- Se llena de gasolina el tanque de un automóvil a una rapidez constante de 0.2 l/s. El tanque ya contenía 20 litros cuando el automóvil llegó. Sea y el número de litros de gasolina del tanque, y sea x el número de segundos transcurridos desde que se empezó a llenar. ¿Qué afirmación sobre la relación entre y y x es verdadera? Explique.

a) $y = mx$

b) $\delta y = m\delta x$

$\delta y = m\delta x$ Porque solo forma parte de un total, no es un total de gasolina. Es decir, es una variación en un total ya existente. La variación en y es proporcional a la variación en x.

3.3.4 Posibles respuestas de la secuencia 4

Inicio

- **I. Siga las indicaciones, y conteste las preguntas correspondientes.**

Grafique las siguientes funciones:

c) $y = x$
d) $y = x^2$

1.- ¿Cómo aumenta la variable y en cada caso?

2.- ¿Cuál es la diferencia de aumentos en cada caso?

3.- ¿Qué significados tienen los siguientes elementos? Expréselo con palabras y símbolos matemáticos.

a) δx: La variación de x
b) δy: La variación de y
c) y: Es el valor evaluado de la función más la suma del producto de la constante de proporcionalidad por la variación de x // $f(x) + 0.8\delta x$

Desarrollo

- **I. Siga las indicaciones, y conteste las preguntas correspondientes.**

Dibuje la gráfica de una función cualquiera que varíe de manera no constante, y que al mismo tiempo cumpla con la siguiente condición: Dicha función f debe variar a una tasa constante de 0.8 con respecto a las variaciones en x, pero solo durante un $\Delta x = 1.5 \leq x \leq 2$, y $f(1.5) = 2$.

1.- ¿Cómo es el comportamiento de la función dibujada? ¿Cómo es el comportamiento de variación en el intervalo Δx de la función? Exprese con sus palabras.

El comportamiento del intervalo Δx es lineal

2.- ¿Qué significados tienen los siguientes elementos? Expréselo con palabras y símbolos matemáticos.

a) δx: La variación de x en un intervalo Δx

b) δy: La variación de y proporcionalmente a la variación de x
c) m: La constante de proporcionalidad entre las variaciones de las distintas variables
d) y: Es el valor evaluado de la función más la suma del producto de la constante de proporcionalidad por la variación de x // $f(x) + 0.8\delta x$

3.- Escribe el valor numérico que tiene y en las siguientes situaciones. Marca con un punto cada coordenada resultada en la gráfica dibujada previamente.

a) $\delta x = 0.1 \; y = 2.08$
b) $\delta x = 0.3 \; y = 2.24$
c) $\delta x = 0.5 \; y = 2.4$

Dos cantidades que varían a una tasa constante entre sí se relacionan linealmente. Es decir, en coordenadas cartesianas es una línea recta. Por lo tanto, los diferenciales están relacionados linealmente. La gráfica en coordenadas cartesianas de uno en relación con el otro será una línea recta.

Cierre

- **I. Lea la situación y responda lo que se le pide.**

Un carrito de control remoto viaja sobre una pista a una velocidad constante de 5 m/seg, y recorre 13 m.

1.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de 1 m. ¿Cuántos segundos pasa el automóvil en cada intervalo?

$$\delta t = \frac{\delta D}{v} = \frac{13}{5} = 2.6\, m$$

2.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de 1/250 m. ¿Cuántos segundos pasa el automóvil en cada intervalo?

$$\delta t = \frac{\delta D}{v} = \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{250} = 0.0104\, m$$

3.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de 1/5000 m. ¿Cuántos segundos pasa el automóvil en cada intervalo?

$$\delta t = \frac{\delta D}{v} = \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5000} = 0.00052\, m$$

4.- Si la pista está marcada con intervalos cuya longitud es de δx pies (δx puede ser un número muy pequeño o infinitésimo). ¿Cuántos segundos pasa el auto en cada intervalo?

$$\delta t = \frac{\delta D}{v} = \frac{13}{5} \cdot \delta x\, m$$

5.- ¿Qué relación encuentras entre las preguntas 1-4 con los diferenciales?

Cada intervalo de tiempo mostraba un diferencial diferente. Los diferenciales son vistos como momentos en el que la variación proporcional varía dependiendo del tamaño de dicho intervalo. Y en una representación gráfica su comportamiento siempre será lineal.

Como se declaró previamente, un *diferencial* es un término polisémico. Sus es una variación infinitesimal de una variable, ya sea independiente o dependiente. A su vez, este tipo de variaciones pueden ser pensadas como momentos, es decir, momento anterior, momento actual y momento posterior. Donde el momento posterior es el momento actual más el diferencial y el momento anterior es el momento actual menos el diferencial. El cálculo de diferenciales con ayuda de momentos según sea el caso, es el siguiente:

- La diferencia del momento actual y el momento anterior
- La diferencia del momento posterior y el momento anterior.
- La diferencia del momento posterior y el momento actual.

Como se puede observar los *diferenciales* pueden ser pensados como una diferencia de momentos, cambios o variaciones.

3.3.5 Posibles respuestas de la secuencia 5
Inicio

- **I. Resuelva los siguientes problemas.**

1.- Una moto se mueve a una velocidad constante de 90 km/h por una autopista recta.

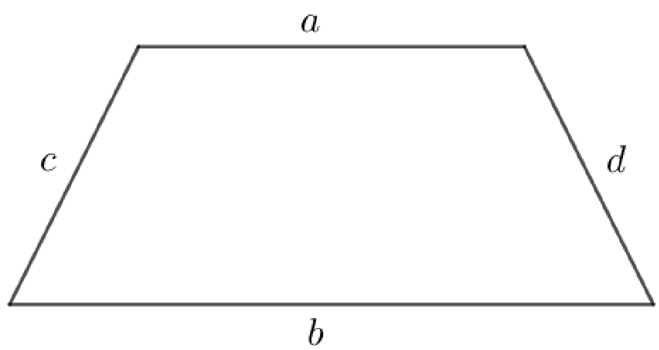
a) ¿Qué distancia recorre en 2 horas?
$$d = v \cdot t = 90\frac{km}{h} \cdot 2h = 180\ km$$
b) ¿Qué distancia recorre en un segundo?
$$d = v \cdot t = 90\frac{km}{h} \cdot 1s = 90\frac{km}{3600\ s} \cdot 1s = 0.025\ km$$

c) Con base en la fórmula de la posición $x = vt + x_0$, calcule los diferenciales de la posición y del tiempo del problema previamente mencionado. Recuerde que un diferencial puede representar variación y a su vez diferencia de variaciones.
$x = vt + x_0$
$(x + \delta x) = v(t + \delta t) + x_0 = vt + v\delta t + x_0$
$\delta x = (x + \delta x) - x$
$\delta x = vt + v\delta t + x_0 - (vt + x_0)$
$\delta x = v\delta t$
d) Calcule el diferencial de la posición con respecto al tiempo
$$\frac{\delta x}{\delta t} = v$$
e) Explique con sus palabras el resultado del inciso anterior.
La relación de la posición con respecto al tiempo es la velocidad, la cual es constante.
f) ¿Pueden existir cambios en el resultado del diferencial de la posición con respecto al tiempo? Explíquelo con sus palabras.
No, la velocidad es el resultado del diferencial, y ya que la velocidad es constante, entonces no habrá cambios.

Desarrollo

- **I. Dada la siguiente figura, utilice las medidas de los lados de la figura y conteste las siguientes preguntas.**

$\boldsymbol{a = 3}$ **,** $\boldsymbol{b = 5}$ **,** $\boldsymbol{c = 2.66}$ **,** $\boldsymbol{d = 2.66}$



a) Calcule el perímetro

$P = 3 + 5 + 2.66 + 2.66$

$P = 13.32$

b) Calcule el diferencial de cada uno de sus lados

$\delta a, \delta b, \delta c, \delta d$

c) Calcule el diferencial del perímetro

$P = a + b + c + d$

$(P + \delta) = (3 + \delta a) + (5 + \delta b) + (2.66 + \delta c) + (2.66 + \delta d)$

$\delta P = (P + \delta P) - P$

$\delta P = (3 + \delta a) + (5 + \delta b) + (2.66 + \delta c) + (2.66 + \delta d) - (3 + 5 + 2.66 + 2.66)$

$\delta P = 3 + \delta a + 5 + \delta b + 2.66 + \delta c + 2.66 + \delta d - 3 - 5 - 2.66 - 2.66$

$\delta P = \delta a + \delta b + \delta c + \delta d$

El diferencial de una suma de variables, es la suma de sus diferenciales.

Cierre

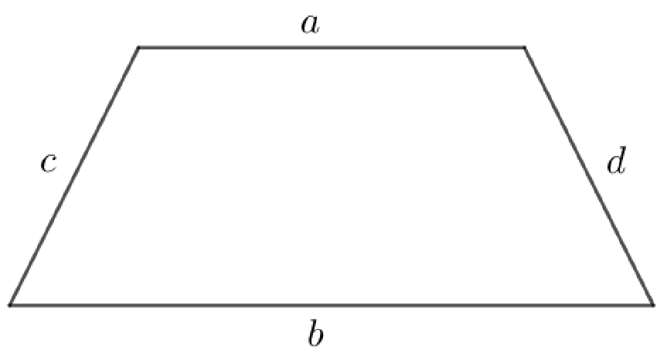
- **I. Siga las indicaciones y conteste lo que se le pide.**

Dibuje un rectángulo, donde la medida de su ancho sea v, y la de su largo sea u. Así como un incremento δ para cada uno de estos lados.

a) Calcule el área de la figura sin incrementos.
$A = uv$
b) Calcule el área de la figura con incrementos.
$A' = (u + \delta u)(v + \delta v)$
c) Calcule el diferencial del área.
$\delta A = A' - A$
$\delta A = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v - uv$
$\delta A = u\delta v + v\delta u$

El diferencial de un producto de variables, es la suma de productos resultantes del diferencial de la primera variable por la segunda variable y la primera variable por el diferencial de la segunda variable.

- **II. Dada la siguiente figura, utilice su regla para medir los lados de la figura y conteste las siguientes preguntas.**



a) Calcule el perímetro

$P = a + b + c + d$

b) Calcule el diferencial de cada uno de sus lados

$\delta a, \delta b, \delta c, \delta d$

c) Calcule el diferencial del perímetro

$P = a + b + c + d$

$(P + \delta) = (a + \delta a) + (b + \delta b) + (c + \delta c) + (d + \delta d)$

$\delta P = (P + \delta P) - P$

$\delta P = (a + \delta a) + (b + \delta b) + (c + \delta c) + (d + \delta d) - (a + b + c + d)$

$\delta P = a + \delta a + b + \delta b + c + \delta c + d + \delta d - a - b - c - d$

$\delta P = \delta a + \delta b + \delta c + \delta d$

3.3.6 Posibles respuestas de la secuencia 6

Inicio

- **I. Resuelva los siguientes problemas.**

1.- Con el uso de diferenciales aproxime el área de una pompa de jabón cuando su radio aumenta de 2 a 2.015 cm.

$A = 4\pi r^2$

$\delta A = 4\pi\delta(r^2)$

$(A + \delta A) = 4\pi(r + \delta r)^2$

$\delta A = (A + \delta A) - A$

$\delta(r^2) = \delta(r \cdot r) = r\delta r + r\delta r = 2r\delta r$

$\delta(r^2) = 2r\delta r$

$\delta A = 4\pi(2r\delta r)$

$\delta A = 8\pi r\delta r$

$\delta A = 8\pi(2\ cm)(0.10) = 0.75\ cm^2$

2.- Un tanque cilíndrico tiene una altura de 1.5 metros, y un diámetro de 60 centímetros. ¿Cuánto disminuirá el volumen si a las paredes internas (no a la tapa y base) se les coloca una capa de pintura de 1 mm?

$V = \pi r^2 h$
$\delta V = \pi h\delta(r^2)$
$(V + \delta V) = \pi h(r + \delta r)^2$
$\delta(r^2) = \delta(r \cdot r) = r\delta r + r\delta r = 2r\delta r$
$\delta(r^2) = 2r\delta r$
$\delta V = \pi h(2r\delta r)$
$\delta V = \pi r^2 h + \pi h(2r\delta r) - \pi r^2 h$
$\delta V = \ \pi h(2r\delta r) = 3\pi r \cdot \delta r$
$\delta V = 3\pi(0.6)(0.001) = 5.654x10^{-3}$

Desarrollo

- **I. Resuelva los siguientes problemas.**

1.- Supongamos que un pintor pinta 90 metros cuadrados de pared en una hora y otro pintor pinta 100 metros de la misma pared en una hora. ¿A qué razón se pinta dicha pared cuando ambos pintores están trabajando al mismo tiempo, con respecto al tiempo? Use diferenciales.

$A_p = P_1 + P_2$
$\delta A_p = \left(A_p + \delta A_p\right) - A_p$
$\delta A_p = (P_1 + \delta P_1) + (P_2 + \delta P_2) - P_1 + P_2$
$A_p = \delta P_1 + \delta P_2$

2.- La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $P \times V = C$, donde C es una constante. ¿Con qué razón cambia el volumen con respecto a la presión? Use diferenciales.

$$PV = C$$

$$\delta PV = \delta C$$

$$P\delta V + V\delta P = 0$$

$$\delta V = -\frac{V}{P}\delta P$$

$$V = \frac{C}{P}$$

$$\delta V = -\frac{\frac{C}{P}}{P}\delta P = -\frac{C}{P^2}\delta P$$

$$\frac{\delta V}{\delta P} = -\frac{C}{P^2}$$

Cierre

- **I. Resuelva los siguientes problemas.**

1.- La ley de gravitación universal de Isaac Newton establece una relación proporcional de la fuerza con que se atraen dos puntuales con masa. Newton dedujo que la fuerza con que se atraen dos cuerpos tenía que ser directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Es decir:

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

¿Con qué razón cambia la fuerza de atracción gravitatoria F, entre dos masas puntuales m_1 y m_2, con respecto a la distancia r entre ella? Use diferenciales.

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$Fr^2 = Gm_1 m_2$$

$$\delta Fr^2 = \delta(Gm_1 m_2)$$

$$\delta Fr^2 = 0$$

$$r^2\delta F + F\delta r^2 = 0$$

$$\delta(r^2) = \delta(r \cdot r) = r\delta r + r\delta r = 2r\delta r$$

$$r^2\delta F + 2Fr\delta r = 0$$

$$r^2\delta F = -2Fr\delta r$$

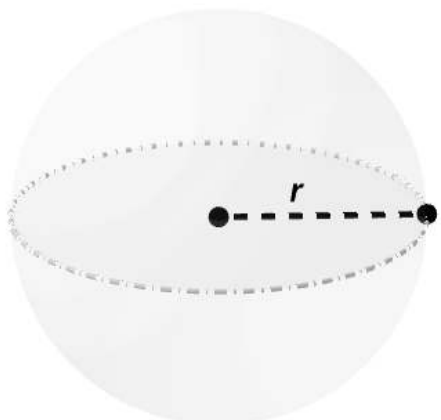
$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$r^2\delta F = -\,2G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} r\delta r$$

$$\delta F = -\,2G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^4} r\delta r = -\,2G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^3} \delta r$$

$$\frac{\delta F}{\delta r} = -\,2G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^3}$$

2.- Con base en la siguiente esfera de radio r, conteste lo siguiente.



a) Calcule el área de la figura

$$A = 4\pi r^2$$

b) Calcule el diferencial del área de la figura con respecto a su radio

$$A = 4\pi r^2$$

$$\delta A = 4\pi \delta r^2$$

$$(A + \delta A) = 4\pi(r + \delta r)^2$$

$$\delta A = (A + \delta A) - A$$

$$\delta r^2 = (r + \delta r)^2 - r^2$$

$$\delta r^2 = r^2 + r\delta r + r\delta r + \delta r^2 - r^2$$

$$\delta r^2 = 2r\delta r$$

$$\delta A = 4\pi(2r\delta r)$$

$$\delta A = 8\pi r\delta r$$

c) Calcule el diferencial del área con respecto al radio

$$\frac{\delta A}{\delta r} = 8\pi r$$

d) Calcule el volumen de la figura

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

e) Calcule el diferencial del volumen de la figura

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\delta V = (V + \delta V) - V$$

$$\delta V = \frac{4}{3}\pi \delta r^3$$

$$\delta r^3 = (r + \delta r)^3 - r^3$$

$$\delta r^3 = r^3 + 3r^2\delta r + 3r\delta r^2 + \delta r^3 - r^3$$

$$\delta r^3 = 3r^2\delta r$$

$$\delta V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2\delta r$$

$$\delta V = 4\pi r^2\delta r$$

f) Calcule el diferencial del volumen con respecto al radio

$$\frac{\delta V}{\delta r} = 4\pi r^2$$

3.4 Trayectorias epistémicas

Además de las posibilidades de análisis que nos da el haber resuelto la mayoría de las actividades didácticas de nuestras secuencias, es de utilidad analizar las trayectorias epistémicas de cada secuencia, con el fin de ubicar los objetos matemáticos primarios que se espera deberán emerger al resolver las diferentes situaciones problemas planteados.

Para hacer dichas trayectorias epistémicas tomamos las diferentes actividades y las organizamos en las diferentes configuraciones epistémicas, con lo cual se resalta el carácter fundamental que se pretende desarrollar en un conjunto de actividades. Así por ejemplo, cuando una serie de actividades pretenden establecer una determinada propiedad de los objetos matemáticos primarios en juego diremos que dicha configuración es proposicional.

3.4.1 Trayectoria epistémica 1

Configuraciones epistémicas	**Descripción**	**Estado**
CE1	Planteamiento del problema extramatemático	Situacional
CE2	Descripción subjetiva del papel propio sobre el problema	Argumentativo

CE3	Uso de la notación “kg” para la identificación de kilogramos y “ton” para la tonelada	Proposicional
CE4	Aplicación de cocientes para la conversión de toneladas a kilogramos	Actuativo
CE5	Aplicación de cocientes para el cálculo de kilogramos de basura por habitante en el mundo	Actuativo
CE6	Aplicación de la “regla de tres” para el cálculo de porcentaje de la repercusión de una persona en la contaminación mundial	Actuativo
CE7	Distinción de cantidades, entre una cantidad pequeña y el cero.	Argumentativo
CE8	Distinción entre una cantidad pequeña y otra de magnitud casi igual.	Argumentativo
CE9	Planteamiento del segundo problema extramatemático	Situacional
CE10	Aplicación de cocientes entre cantidades grandes	Actuativo
CE11	Aplicación de productos de cantidades grandes con grandes y de cantidades grandes con pequeños	Actuativo
CE12	Aplicación de cocientes cuando una cantidad es grande.	Actuativo
CE13	Suma cuando una cantidad es pequeña.	Actuativo
CE14	Utilización del símbolo $\approx$ para denotar que es la aproximación de una cantidad.	Proposicional
CE15	Utilización de calculadora para obtener la suma de cantidad natural y pequeña.	Actuativo
CE16	Aplicación de cociente entre cantidades grandes.	Actuativo
CE17	Aplicación de cociente cuando una cantidad es grande.	Actuativo

CE18	Aplicación de producto cuando una cantidad es pequeña.	Actuativo
CE19	Graficación de porcentajes anteriormente calculados.	Notacional
CE20	Descripción de rasgos esenciales para la identificación de cantidades grandes y pequeñas	Conceptual
CE21	Planteamiento de situaciones para su comparación	Situacional
CE22	Diferenciación de tamaño entre cantidades por medio de situaciones diversas	Actuativo
CE23	Planteamiento de situación con base en la diferencia de cantidades	Situacional
CE24	Análisis de situaciones con base en el tamaño de diferencias planteadas	Actuativo
CE25	Planteamiento de una situación con base en la masa de un átomo	Situacional
CE26	Operación con cantidades pequeñas	Actuativo
CE27	Una cantidad dada siempre se puede hacer más pequeña si ésta es real	Proposicional
CE28	Distinción entre cantidades muy pequeñas e infinitamente pequeñas	Argumentativo
CE29	Las cantidades infinitamente pequeñas no se pueden hacer más pequeñas	Proposicional

En la actividad de inicio se plantea una situación problema referente a la contaminación mundial (**CE1**). La primer serie de preguntas tiene como propósito que el estudiante se problematice con el contexto y argumente la repercusión de su papel en dicho contexto (**CE2**). La segunda serie de preguntas establece una relación de magnitudes proporcionales con referencia a la situación problema para realizar conversiones entre magnitudes utilizando la regla de tres (**CE3, CE4, CE5, CE6**). La tercera serie de preguntas tiene como propósito que el estudiante argumente las diferencias entre los cocientes calculados de la serie de preguntas previa (**CE7, CE8**). En la actividad de desarrollo, se plantea una segunda situación problema con referencia a la contaminación y reciclaje en México (**CE9**). En la primera serie de preguntas, el estudiante calcula cocientes de cantidades grandes y pequeñas para obtener diferentes porcentajes (**CE10, CE11, CE12**), realiza sumas entre porcentajes para observar la repercusión que tienen las cantidades pequeñas en cantidades más grandes, sin tecnología y con tecnología, en este caso una calculadora científica (**CE13, CE14, CE15**), y calcula cocientes entre cantidad grande y pequeña, cantidad pequeña y grande, y cantidades naturales (**CE16, CE17, CE18**). Después, se presenta una recta numérica de porcentajes para que el estudiante represente en ella todos los porcentajes calculados previamente (**CE19**). En la actividad de cierre, se establece la relatividad de las cantidades según sea su comparación (**CE20**). En el primer inciso de esta actividad el estudiante identifica el tamaño de diferencias entre dos números (**CE21, CE22**). En el segundo inciso la dinámica se torna al revés, por medio de indicadores, deben plantear situaciones (**CE23, CE24**). Por último, en el tercer inciso se parte desde el planteamiento del peso de un protón, para enseguida pasar a cuestionar si un número tan pequeño, puede ser más pequeño (**CE25, CE26**). Se declara también que siempre que se trata de un número real, éste puede ser tan pequeño como se desee (**CE27**). Y para culminar la actividad se plantean números infinitamente pequeños y se discute la posibilidad de poder hacerlos más pequeños de alguna manera (**CE28, CE29**).

3.4.2 Trayectoria epistémica 2

Configuraciones epistémicas	**Descripción**	**Estado**
CE1	Representación de gráfica de números reales mayores a cero.	Notacional
CE2	Identificación y graficación de números en la recta numérica.	Actuativo y Notacional
CE3	Planteamiento de que “no existe un número real que sea el más pequeño”.	Proposicional
CE4	Formalización de los números infinitesimales como números más pequeños que cualquier número real positivo.	Conceptual
CE5	Representación de una cantidad infinitesimal en la recta numérica.	Notacional

CE6	Representación gráfica de la adición de un número infinitesimal a un número real.	Notacional
CE7	La diferencia entre δ y $n\delta$ no es medible.	Argumentativo
CE8	Cualquier número real multiplicado por un número infinitesimal da como resultado un número infinitesimal $\forall n : n\delta \approx \delta$.	Proposicional
CE9	Construcción de la representación gráfica de los números infinitesimales.	Notacional
CE10	Introducción de un cuadrado con medidas de lado l.	Situacional y Notacional
CE11	Relación entre los infinitésimos de las variables dependiente e independiente.	Conceptual
CE12	Representación algebraica y aritmética de incrementos infinitesimales de las variables.	Actuativo
CE13	Representación geométrica de los incrementos infinitesimales de las variables.	Notacional y Actuativo
CE14	Los incrementos mínimos siempre serán de tamaño infinitesimal.	Proposicional
CE15	Diferenciación entre los distintos tipos de representación de un número infinitesimal según sea el caso.	Proposicional

En la actividad de inicio se plantea una escala unitaria en la recta numérica y se pide graficar en ella ciertos números (**CE1, CE2**). Se declara con base en la propiedad Arquimediana que todo número real por más pequeño que sea, siempre puede ser más pequeño si se divide entre dos (**CE3**). En la actividad de desarrollo se introduce la notación formal δ como representación de los números infinitamente pequeños o infinitesimales, que son números más pequeños que cualquier número real positivo y que al multiplicarse por sí mismos dan como resultado cero (**CE4**). En el primer inciso se vuelve a graficar números, pero esta vez con δ y números naturales sumados y multiplicados por δ, así como se induce un argumento acerca de la diferencia medible entre δ y $n\delta$ (**CE5, CE6, CE7**). Al término de este inciso se establece la propiedad de que cualquier número real multiplicado por un número infinitesimal da como resultado un número infinitesimal (**CE8**). En el segundo inciso se grafican números que son productos de naturales con infinitesimales (**CE9**). En la actividad de cierre se introduce un cuadrado de lado l para contestar diversas preguntas (**CE10**). Las preguntas planteadas son acerca de incrementos de varios tamaños que sufre la figura antes mencionada, esto con el propósito de hacer notar que un incremento mínimo es infinitamente pequeño, y se supone que esto generará la asociación de δ con una variable, en un contexto algebraico y geométrico (**CE11, CE12, CE13, CE14**). Al finalizar la secuencia se menciona acerca de los diferentes significados con los que se utiliza el símbolo δ (**CE15**).

3.4.3 Trayectoria epistémica 3

Configuraciones epistémicas	**Descripción**	**Estado**
CE1	Problemas sobre incrementos en una figura abstracta	Situacional y Notacional
CE2	Cálculo y representación geométrica de incrementos en una figura abstracta	Actuativo y Notacional
CE3	Representación algebraica de incrementos con números infinitesimales	Actuativo
CE4	Asociación de δ con una variable y definición de letra δ como una variación infinitesimal.	Actuativo y Proposicional
CE5	Cálculo del incremento como la diferencia entre el valor incrementado y el valor original.	Actuativo
CE6	Declaración de los diferentes usos del símbolo δ.	Proposicional
CE7	Planteamiento de problema intramatemático.	Situacional
CE8	Identificación de elementos variacionales dentro de un contexto.	Argumentativo y Conceptual
CE9	Representación algebraica de elementos variacionales en diversas situaciones.	Actuativo y Conceptual

CE10	Definición de constante de proporcionalidad y representación algebraica.	Argumentativo y Actuativo
CE11	Diferenciación entre significados con los que usamos los símbolos δ, δx y Δx. Primer acercamiento al concepto de diferencial.	Proposicional y Conceptual
CE12	Planteamiento de situaciones variacionales que involucran diferenciales.	Situacional y Conceptual
CE13	Solución de problemas variacionales con diferenciales.	Actuativo
CE14	Argumentación de comportamientos de los diferenciales de las variables dependientes e independientes.	Argumentativo
CE15	Identificación de diferenciales en situaciones extramatemáticas.	Argumentativo y Conceptual
CE16	Argumentación sobre la diferencia entre $y = mx$ y $\delta y = m\delta x$.	Argumentativo

En la actividad de inicio se presenta una figura rectangular con medidas x y y (**CE1**), con base en ella se formulan preguntas relativas a los incrementos geométricos que podría sufrir cada lado de la figura de manera independiente (**CE2**). En la actividad de desarrollo, en el primer inciso se utiliza la misma figura, esta vez para la representación de incrementos de forma algebraica. Se aplica la asociación de δ a más de una variable, y se calcula el incremento mínimo en la figura (**CE3, CE4, CE5**). Al finalizar este inciso se establecen los diferentes usos el símbolo δ según sea el caso (**CE6**). En el segundo inciso de la actividad de desarrollo se plantea una situación problema de una figura rectangular, uno de cuyos lados se incrementa de manera proporcional a lo que incrementa el otro lado (**CE7**). Con base en ese problema, se identifican símbolos matemáticos dentro del problema, a su vez se representan algebraicamente situaciones problema con base en ese mismo problema principal y se calcula la constante de proporcionalidad (**CE8, CE9, CE10**). Al término de la actividad de desarrollo se establece la diferenciación entre símbolos δ, δx y Δx y el concepto de *diferencial* (**CE11**). En la actividad de cierre se plantean diversas situaciones variacionales con diferenciales, se identifica el significado de ciertos símbolos matemáticos relacionados al problema y se resuelven problemas variacionales con diferenciales (**CE12, CE13**). Dentro de ese mismo inciso se plantean situaciones para la argumentación de los comportamientos diferenciales dependientes e independientes según sea el caso, la identificación de diferenciales y la argumentación sobre la diferencia entre $y = mx$ y $\delta y = m\delta x$ (**CE14, CE15, CE16**).

3.4.4 Trayectoria epistémica 4

Configuraciones epistémicas	**Descripción**	**Estado**
CE1	Graficación de una función cualquiera con un intervalo constante.	Notacional y Actuativo
CE2	Solución de problemas e identificación de elementos pertenecientes al problema.	Actuativo y Conceptual
CE3	Graficación de una función bajo ciertas indicaciones	Notacional y Situacional
CE4	Identificación de comportamientos gráficos de una función	Actuativo
CE5	Identificación de significados de símbolos matemáticos	Actuativo
CE6	Graficación de coordenadas calculadas con diferenciales	Notacional y Actuativo
CE7	Dos cantidades que varían a una tasa constante entre sí se relacionan de forma lineal.	Proposicional
CE8	Planteamiento de situación problema extramatemático.	Actuativo
CE9	Resolución de problemas utilizando diferenciales	Actuativo
CE10	Argumentación de la diferencia entre los distintos problemas de diferenciales	Argumentativo
CE11	Distinción conceptual polisémica del término diferencial	Proposicional y Conceptual

CE12	Descripción del cálculo de diferenciales como diferencia de momentos, cambios o variaciones	Proposicional

En la actividad de inicio se grafican dos funciones matemáticas, y se contestan una serie de preguntas en las que habrá que identificar el significado de los símbolos matemáticos con respecto al problema planteado. (**CE1, CE2**). Para la actividad de desarrollo se grafica una función bajo ciertas circunstancias para así identificar y describir su comportamiento gráfico (**CE3, CE4**). Se plantean preguntas con el propósito de identificar y describir el significado de los símbolos matemáticos con relación a las funciones graficadas previamente, y se plantean preguntas para el cálculo de coordenadas de una variable utilizando diferenciales (**CE5, CE6**). Para culminar con la actividad de desarrollo se propone una discusión para establecer que cuando dos cantidades carían a una tasa constante entre sí la representación geométrica será lineal (**CE7**). En la actividad de cierre se plantea una situación problema extramatemática para ser resuelta utilizando diferenciales, se hacen 4 situaciones y se argumenta la diferencia entre las situaciones diferenciales. (**CE8, CE9, CE10**). Por último se establece el significado polisémico del diferencial y sus diferentes enfoques (**CE11, CE12**).

3.4.5 Trayectoria epistémica 5

Configuraciones epistémicas	**Descripción**	**Estado**
CE1	Planteamiento de problema del movimiento de una moto.	Situacional
CE2	Solución de problemas de distancia	Actuativo
CE3	Cálculo de diferenciales utilizando fórmula física	Actuativo
CE4	Argumentación de comportamiento de las diferenciales en fórmula física.	Argumentativo
CE5	Planteamiento de un trapecio con medida de sus lados.	Situacional
CE6	Solución de problema de perímetro con el uso de las diferenciales.	Actuativo y Conceptual
CE7	El diferencial de la suma, es la suma de sus diferenciales.	Proposicional

CE8	Planteamiento de una figura abstracta con lados variables	Situacional y Notacional
CE9	Cálculo de diferenciales de área de la figura	Actuativo
CE10	El diferencial de un producto de variables, es la suma de productos resultantes del diferencial de la primera variable por la segunda variable y la primera variable por el diferencial de la segunda variable.	Proposicional
CE11	Planteamiento de un trapecio con lados variables	Situacional
CE12	Cálculo de perímetro con el uso de diferenciales	Actuativo

En la actividad de inicio se plantea una situación problema extramatemática y con base en esto una serie de preguntas, con la intención de la resolución de problemas con el uso de diferenciales en un contexto físico y su argumentación (**CE1, CE2, CE3, CE4**). En la actividad de desarrollo se plantea un trapecio con medidas definidas, con la cual se calcula el perímetro utilizando diferenciales (**CE5, CE6**). Al término de esta actividad se establece el diferencial de una suma de variable (**CE7**). El primer inciso de la actividad de cierre se plantea indicaciones para el trazo de una figura rectangular con lados variables para el cálculo del área con incrementos y sin incrementos (**CE8, CE9**). Lo que da paso a la institucionalización del diferencial de un producto (**CE10**). Por último, el segundo inciso de la actividad de cierre se plantea una figura en forma de trapecio con todos sus lados variables para el cálculo del diferencial de su perímetro (**CE11, CE12**).

3.4.6 Trayectoria epistémica 6

Configuraciones epistémicas	**Descripción**	**Estado**
CE1	Planteamiento de problema del incremento del área de una pompa de jabón.	Situacional
CE2	Cálculo del diferencial para aproximar el área de una pompa de jabón según su radio.	Actuativo
CE3	Planteamiento de situación problema referente al volumen de un tanque cilíndrico	Situacional

CE4	Cálculo del diferencial de volumen de un tanque cilíndrico	Actuativo
CE5	Planteamiento de problema de dos pintores que pintan una pared.	Situacional
CE6	Cálculo del diferencial del área pintada.	Actuativo
CE7	Planteamiento de situación problema de Ley de Boyle.	Situacional
CE8	Cálculo de la razón de cambio del volumen con respecto a la presión con diferenciales.	Actuativo
CE9	Planteamiento de problema de Ley de Gravitación Universal de Isaac Newton.	Situacional
CE10	Cálculo de razón de cambio de la fuerza de atracción gravitatoria F, entre dos masas puntuales m_1 y m_2, con respecto a la distacia r entre ellas.	Actuativo
CE11	Planteamiento de una esfera con radio r.	Situacional
CE12	Cálculo de diferenciales de área y volumen de una esfera con respecto al radio.	Actuativo

En la actividad de inicio se plantean dos situaciones problema para la resolución con diferenciales. La primera situación problema es sobre el incremento de área de una pompa de jabón con respecto al radio (**CE1, CE2**). La segunda situación problema es sobre la disminución de un tanque cilíndrico (**CE3, CE4**). En la actividad de desarrollo se plantean otras dos situaciones problema. La primera situación problema es sobre el trabajo de dos pintores sobre una pared (**CE5, CE6**). La segunda situación problema es sobre la razón de cambio del volumen con respeto a la presión en la Ley de Boyle (**CE7, CE8**). En la actividad de cierre se plantean otro par de situaciones problema. La primera situación problema es sobre la razón con la que cambia la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas con respecto a la distancia entre ella (**CE9, CE10**). Y por último, la segunda situación problema es sobre el cálculo de los diferenciales de área y volumen de una esfera con respecto al radio (**CE11, CE12**).

CAPÍTULO 4. PUESTA EN ESCENA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo hablaremos acerca de los detalles principales de la puesta en escena de las seis secuencias didácticas diseñadas por nuestra propuesta, la cual se llevó a cabo con dos grupos de 3 estudiantes cada uno. Trabajamos durante tres días en sesiones de dos a tres horas diarias, por medio de la plataforma Microsoft Teams.

Las actividades de nuestras secuencias se diseñaron utilizando las herramientas del marco teórico del EOS, de tal manera que los estudiantes pudiesen construir nuevos conocimientos de manera progresiva y estructurada. Es decir, primero diseñamos actividades con las que se pudiesen familiarizar con el entorno, utilizando problemas tanto extramatemáticos como intramatemáticos, para así, poco a poco ir diseñando una trayectoria didáctica hacia la construcción de los infinitesimales y nociones como la razón instantánea de cambio. Como evidencia del trabajo desarrollado, contamos con las hojas de trabajo con las respuestas de los estudiantes participante y las grabaciones de video correspondientes. Sin embargo, nos ha parecido pertinente que no es lo más adecuado incluirlas en el reporte escrito de la tesis.

Con base en nuestras secuencias didácticas, consideramos que podríamos obtener información acerca de los siguientes aspectos:

Por ejemplo, en qué medida se logró la emergencia de los objetos matemáticos pretendidos por la propuesta y el grado en el que se alcanzaron los objetivos de cada secuencia didáctica; algunos puntos generales son los siguientes:

- Para analizar y resolver las situaciones problema planteadas, los estudiantes utilizarán diferentes formas de lenguaje.
- Para modelar las situaciones problema, los estudiantes identificarán las magnitudes involucradas, establecerán relaciones entre éstas, y de ser necesario, determinarán los valores de dichas magnitudes que resuelven los problemas.

Estos objetivos generales buscan desarrollar un sistema de prácticas que promuevan la emergencia de objetos del cálculo diferencial con el uso de infinitesimales.

Del mismo modo, otro de los objetivos a valorar es el qué tan apropiados fueron los diseños de las actividades que conforman cada secuencia didáctica, es decir, la claridad en la redacción de cada pregunta e instrucción, la cimentación y estructuración de los conceptos previos antes de la construcción de uno nuevo, la pertinencia de las preposiciones como apoyo para el siguiente problema, los argumentos requeridos en cada pregunta, etc.

Si bien, los estudiantes que escogimos para la implementación de nuestra propuesta no eran los *idóneos*, ya que estos ya habían culminado el "Cálculo Diferencial e Integral I" en el cual se aborda nuestro tema principal que es la razón instantánea de cambio, aun así tuvimos oportunidad de ver reflejados aspectos importantes que destacar. Nuestra propuesta desarrolla otro tipo de enfoque, diferente al tratamiento tradicional que se le da a la razón instantánea de cambio. Es por ello que, a pesar de que los estudiantes ya habían culminado dicho curso, la experimentación con ellos era pertinente y aún así, apropiada.

La puesta en escena se desarrolló de la siguiente manera:

- Debido a situaciones que no estaban en nuestras manos, pues la pandemia ocasionada por el coronavirus SARS-COV-2 obligó al confinamiento, por lo que era inadecuado hacer trabajo de manera presencial. A consecuencia de ello, la implementación se desarrolló en el software desarrollado por Microsoft llamado Teams. Por ese medio se presentaron las hojas de trabajo de cada estudiante y se realizaron los comentarios e intervenciones pertinentes.
- Debido a la situación previamente narrada, los grupos que se prestaron para colaborar con nosotros eran pequeños. Los dos grupos estaban conformados por 3 estudiantes cada uno.
- Las sesiones de implementación tenían una duración de dos a tres horas aproximadamente para la resolución de dos secuencias didácticas por día, por lo que utilizamos 3 sesiones.
- Cada estudiante contaba con su equipo de cómputo desde su respectiva casa, conexión a internet y el recurso del correo electrónico por el cual hacían llegar sus hojas de trabajo.
- El diseñador de las actividades fue el encargado de dirigir los equipos de trabajo, realizar las intervenciones necesarias e institucionalizar conceptos para las secuencias didácticas presentes y posteriores.
- Se realizaron grabaciones simultáneas, una en donde participábamos todos los integrantes de la sesión para atender dudas o dar alguna indicación, y otra donde grabábamos a cada equipo trabajando por separado para un mejor análisis individual de cada equipo.
- Al terminar una secuencia se hacía una pausa para atender los temas abordados dentro de dicha secuencia. El diseñador de las actividades preguntaba dudas, e institucionalizaba de manera breve lo realizado al final de cada sesión. Antes de comenzar las sesiones 2 y 3, se hizo una retroalimentación de lo sucedido en las actividades del día anterior para resolver dudas nuevamente, discutir sobre lo entendido e institucionalizar lo pretendido.

Durante las sesiones, se realizó un proceso guiado por el diseñador de las actividades de tal manera que cubriera todos los elementos que se consideraban necesarios. Los elementos de las sesiones son los que se muestran a continuación:

1. Un diálogo grupal con el cual se acerca al estudiante al contexto que queremos promover para el desarrollo de las cosas grandes y pequeñas.
2. Provocar una exploración y descubrimiento sobre la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales y las propiedades que a éstas la definen como tal.
3. Utilizar contextos matemáticos para establecer una relación algebraica - geométrica sobre los infinitesimales, tomando como apoyo el significado de incremento infinitesimal y el símbolo δ.
4. Conocer e identificar los diversos significados que tiene el símbolo δ cuando se trata como un número infinitesimal en situaciones problema.
5. Realizar intervenciones para institucionalizar conceptos como los *diferenciales* en la relación que existe entre dos incrementos o variaciones infinitesimales dependiente e independiente.
6. Trabajar en equipo para identificar diversos elementos abordados a lo largo de las secuencias en contextos extramatemáticos.
7. Institucionalizar proposiciones como el producto de dos incrementos dependientes o la suma de incrementos.
8. Manipular los infinitesimales y *diferenciales* con sus diversos significados y propiedades para la modelación y resolución de problemas de la física.

4.1 Aspectos destacados

Durante la puesta en escena pudimos rescatar algunos aspectos importantes, como la aceptación de los estudiantes de los contextos elegidos para los problemas, ya que al elegir la contaminación mundial y la de nuestro país, mostraron un interés en las situaciones y alcanzaron a concientizar el impacto ecológico que los humanos causamos en el planeta.

Por otro lado, el no tener conocimientos previos acerca de los infinitesimales provocó que la mayoría tuviese cierta incertidumbre y dudas de muchas cosas, por ejemplo de mantener las propiedades de los números enteros a la hora de operar con infinitésimos, o confundirse cuando había que conceptualizarlo gráficamente por no tener muy claro qué era el infinito. Un problema sobresaliente era la frase “algo infinitamente pequeño”, ya que ellos decían que era algo que no se podía contar y al no poder contarlo, se les dificultaba trazarlo e incluso tomarlo en cuenta en las operaciones algebraicas.

Del mismo modo, pudimos notar que los estudiantes no asociaban los infinitesimales con nada, hasta un cierto periodo de tiempo. Cuando empezamos a resolver problemas más formales utilizando *diferenciales*, fue entonces que uno de los integrantes de un grupo dijo que estaban utilizando la derivada con ciertas dudas, pues los demás estudiantes no lo tenían muy claro. La última intervención con los estudiantes fue al inicio de la última secuencia donde se institucionalizaron todos los conceptos, propiedades y proposiciones. Ahí fue cuando el estudiante con dudas pudo asegurar que lo visto en las secuencias era efectivamente la derivada.

4.2 Narración de lo acontecido en la puesta en escena

La puesta en escena se desarrolló por medio de Microsoft Teams, en donde creábamos reuniones en línea para la interacción entre todos los participantes, compartir hojas de trabajo, realizar grabaciones, y cualquier otra acción que se requería durante la implementación.

Todos los estudiantes que participaron en la implementación de nuestra propuesta contaban con las mismas hojas de trabajo. Diseñamos seis secuencias didácticas, las cuales repartimos en tres días para su resolución. En ese periodo de tiempo, los estudiantes resolvían dos secuencias por día, tomándoles alrededor de dos a tres horas aproximadamente.

Las secuencias didácticas eran conformadas por actividades individuales y actividades en equipo. Debido a que eran seis estudiantes, se formaron dos equipos conformados por tres personas cada equipo.

4.2.1 Primera sesión de la puesta en escena (Secuencia 1 y 2)

Para comenzar con las sesiones, el profesor titular del grupo hizo una especie de presentación para diseñador/conductor de las secuencias, se mencionaron datos generales de los participantes y por medio de la plataforma Teams se hicieron llegar las hojas de trabajo. Una vez con las hojas listas, se dieron las indicaciones de leer las hojas detenidamente y contestarlas de manera amplia. Se tomó el tiempo de inicio para llevar un control de la duración, y esperamos el aviso de los estudiantes cada que terminaran una parte de la secuencia, en este caso, cuando terminaran la parte del inicio, desarrollo o cierre. El conductor de la secuencia cada tanto preguntaba si había dudas, algunos presentaban comodidad al resolver las actividades, otros preguntaron cosas esenciales acerca de lo que se pedía en la actividad.

De esa forma nos dimos cuenta que había que precisar las instrucciones y textos de apoyo que propusimos. La primera sección de inicio abordaba un tema general adentrando al estudiante a la problemática, y en el desarrollo ya implicaba realizar operaciones, tales como la regla de tres. Al llegar a la actividad de cierre fue donde se presentaron más problemas, ya que la redacción de las indicaciones no eran del todo claras, además que no precisamos los parámetros que queríamos que ellos escribieran, como: "pequeño", "grande", "muy pequeño" o "muy grande", y recibimos adjetivos comparativos de todo tipo. Esto no afectó en demasía los resultados, pero sin duda era algo que había que modificar. Al término de esa secuencia, se hizo una intervención para reportar comportamientos, dudas, expectativas, y platicar sobre el tema, ya que la mayoría parecía desconcertado al leer la última pregunta de dicha secuencia que era: *"¿Cómo podríamos hacer una cantidad más pequeña si esta es infinitamente pequeña?"* El término *infinitamente pequeña* había causado un tipo de desconcierto en los estudiantes y nadie parecía estar muy seguro de qué significado tenía eso.

Al culminar con la charla anterior, se entregaron las hojas de trabajo contestadas por medio de un correo electrónico y una vez entregadas, se repartieron las hojas de trabajo de la siguiente secuencia. La dinámica fue la misma, los estudiantes contestaron las hojas de trabajo de diferentes modos, unos en línea, otros la descargaron y la contestaron y otros mandaron fotos de sus procedimientos.

Al término del primer inciso de la actividad de inicio escribimos una breve explicación de cómo se demostraba que no existía un número más pequeño que todos en el campo de los números reales, pero causó mucha confusión ya que los estudiantes no sabían interpretar los símbolos matemáticos, por lo que hubo una intervención en ese momento, dicho momento que se aprovechó para institucionalizar a los números infinitamente pequeños y sus propiedades que los definían como tal. Estas propiedades eran que se simbolizaban con la letra δ y que cumplían con las siguientes características $\delta > 0$ y $\delta^2 = 0$. Dicho esto, ellos pudieron continuar con las actividades.

Poco más tarde, nuevamente se encontraban con información que nosotros creímos sería pertinente para ellos a la hora de contestar, como lo siguiente: "$a < b \rightarrow a^2 < b^2 \leftrightarrow a, b > 1$. *Si* $x < \delta$, *entonces* $x^2 < \delta^2 \rightarrow 0 < x^2 < 0$. *Por lo que x no existe"*. De tal manera que los estudiantes pudiesen concebir que no había un número más cercano al cero que un infinitesimal, pero causó una confusión importante en ellos, pues les era complicado entender que hablábamos de otro tipo de números, y que estos números no se parecían a los números con los que habían tratado antes. Estas mismas complicaciones se notaron en las hojas de trabajo, ya que a los estudiantes les costaba concebir que la distancia entre un infinitesimal y otro, era una distancia infinitesimal, así como que podía haber más un infinitesimal en un mismo lugar de la recta en este caso.

Cuando empezaron la etapa del desarrollo de la segunda secuencia los estudiantes se enfrentaron a la adición de los infinitesimales, lo cual también fue complicado para ellos, debido a que las propiedades gráficas no habían quedado del todo claras, en el desarrollo cuando tuvieron que graficar las adiciones infinitesimales, tomaron al valor como mayor, pero lo situaron es una posición distinta, es decir, decían que $1 + \delta > 1 + \frac{\delta}{2}$, lo cual no era verídico. Con ayuda de ese resultado, notamos que había que hacerse más énfasis en las propiedades gráficas de los infinitesimales. Acto seguido se presenta un texto de los que hemos estado hablando para ayudar al estudiante en su actividad posterior, en donde se indicaba la relevancia de la multiplicación de un número natural con un número infinitesimal, diciendo que este producto se convertía en un infinitesimal. Se presentaron prácticas matemáticas personales diferentes a las de referencia en lo que respecta a la propiedad distributiva a la hora de la multiplicación de naturales con infinitesimales, así como hubo complicación a la hora de graficar en la recta numérica dichos productos.

Por último, la actividad de cierre trataba de una figura geométrica, en este caso un cuadrado de lado l, el cual planteaba incrementos de medida precisa y un incremento de medida mínima (δ). Por motivos de familiarización, optamos por llamar x al valor de l, y así pudiesen hacer sus representaciones algebraicas como acostumbraban. La actividad culminaba con lectura de uno de los textos de apoyo para institucionalizar a los incrementos mínimos como incrementos infinitesimales, y hacer una última actividad de esa secuencia, donde tenían que graficar geométricamente los incrementos de 2 cm y de δ cm. En este caso observamos algunas cosas, como que no hubo una aplicación de productos notables, sí hubo una aplicación de la propiedad $\delta^2 = 0$ en la representación algebraica, pero no una relación del símbolo δ con una variable para la modelación del incremento de lado de la figura, ni tampoco hubo incrementos gráficos mostrando los incrementos δ por la mayoría de los participantes. Terminó la sesión, se realizó una cita para el próximo día y mandaron sus hojas de trabajo.

4.2.2 Segunda sesión de la puesta en escena (Secuencia 3 y 4)

Antes de iniciar con las actividades, el conductor de la puesta en escena hizo una breve introducción para la institucionalización de conceptos que notó que no habían quedado muy claros, e hizo una recapitulación de los temas y conceptos abordados en la secuencia anterior. A consecuencia que el primer día no hubo ninguna actividad en equipo, el profesor titular propuso dejar por lo menos una, ya que lo consideraba importante. Se realizó un acuerdo, se hicieron dos equipos de tres integrantes, y empezamos a trabajar.

Se repartían las hojas de trabajo, nuevamente se tomaba el tiempo y empezábamos a trabajar. La actividad de inicio que era de forma individual, partía con una figura geométrica, en este caso un rectángulo el cual tenía incrementos de lados, primero de un lado, luego del otro. Tenían que dibujar los incrementos y posteriormente hacer un análisis algebraico de los comportamientos del área. Los estudiantes manejaron muy bien la situación, no hubo dudas, y lo pudieron resolver sin problema.

Al iniciar el desarrollo que era en equipo, los integrantes se separaron y el conductor de la puesta en escena debía estar intercalando entre las salas de reunión para preguntar por dudas, etc. Las preguntas de esta actividad promovían la asociación de símbolos con variables que en secuencias previas no se logró, de tal manera que debían escribir representaciones algebraicas de incrementos independientes primero, para luego construir una representación con incrementos dependientes y poder calcular el área de la figura incrementada. Después de culminar esa actividad, se realiza una breve intervención para la institucionalización del significado polinomial del símbolo δ, y así poder seguir con la secuencia. En el inciso dos de la actividad se presentan los símbolos, esperando que le estudiante pueda identificar qué significa cada símbolo con base en el contexto planteado, del mismo modo se solicita al estudiante que haga un cálculo diferencial del área de la figura. La actividad continúa con expresiones utilizando símbolos matemáticos para que el estudiante modele matemáticamente lo sugerido y culminar con el significado de m, que en este caso sería la constante de cambio. Al término del desarrollo proponemos una nota que institucionaliza la definición de un *diferencial* como la relación que hay entre las variaciones de una variable con respecto a otra. Se notó una gran diferencia entre el comportamiento de los equipos, ya que uno trabajó por su parte, sin consultar al conductor ni aportar gran cosa, a diferencia del otro donde permitían escuchar los diálogos y discusiones al conductor y así darle oportunidad de intervenir cuando creía pertinente.

El cierre de la actividad era nuevamente individual y comenzaba con planteamientos de situaciones extramatemáticas en la cual el estudiante deberá identificar el significado de los símbolos matemáticos en dichas situaciones, de igual manera, una vez identificados los símbolos hará uso de ellos para cálculos sugeridos por la actividad, del mismo modo argumentará el porqué de las elecciones que toma en su identificación de símbolos según sea el contexto.

Una vez culminada la secuencia tres, hubo una intervención para repasar dudas en una sala de reunión donde estaban todos los estudiantes. Cuando se terminó de explicar las notas de ayuda que hay en el desarrollo de toda la secuencia y de consolidar las institucionalizaciones que se hicieron durante la resolución de dicha secuencia, fue entonces que los estudiantes mandan sus hojas de trabajo y nuevamente el conductor de la puesta en escena envía nuevas hojas de trabajo, esta vez de la secuencia 4. Las indicaciones principales son las mismas que las secuencias anteriores, el trabajo individual, pero como el conductor notó que trabajaban más cómodamente en sus salas de equipo, fue que se permitió que los estudiantes decidieran si querían trabajar en las salas individuales o en la sala donde estábamos todos, por lo que ellos eligieron trabajar más cómodamente en sus salas, aunque sin hacerlo en equipo lo que no tenían permitido hacer en equipo. Si bien, comentaban dudas, no pasaba a mayores.

La actividad de inicio era individual y no presentaron ningún tipo de dudas en ningún equipo, por lo que pasar a la actividad de desarrollo fue algo sencillo. Una vez ahí, ya se reunieron en equipo y los diálogos de equipo comenzaron de nuevo, solamente en un solo equipo aún. Hubo ligeras complicaciones y confusiones con las indicaciones del inciso uno, pero una vez aclaradas las dudas lo lograron concretar. Nuevamente realizaron actividades de identificación de significados de símbolos matemáticos, así como los utilizaron para realizar ciertos cálculos específicos.

Acto seguido se abre una discusión global, es decir en la sala con todos los participantes para institucionalizar el comportamiento lineal de dos cantidades que varían a una tasa constante. Esto para encadenar que el comportamiento gráfico de un diferencial es lineal. Después de ello, siguieron con la última sección que restaba del día, que era la del cierre de forma individual.

En esta actividad se propone un problema de contexto extramatemático en la cual se realizan cálculos utilizando diferenciales entre intervalos cada vez más pequeños.

Al término de la actividad se abre una nueva discusión para una institucionalización final acerca del significado polinomial de los diferenciales. Así terminó el segundo día de puesta en escena, los estudiantes mandaron por correo sus productos y el conductor de la puesta en escena preparó una intervención global para el siguiente día.

4.2.3 Tercera sesión de la puesta en escena (Secuencia 5 y 6)

La sesión empezaba en la sala global donde estábamos todos los participantes y el conductor empezó con una institucionalización global con todo lo abordado a lo largo de las sesiones previas y retocando detalles que se notaron en días anteriores. Estas últimas actividades eran las que promovían el uso de los conocimientos construidos, por lo que la prioridad era la solidez de todo en general.

La actividad de inicio se indicó que sería en equipo, por lo que los estudiantes se integraron a sus respectivas salas, se escuchaban diálogos nuevamente de un solo equipo, mientras que el otro se resistía a participar y declaraba que no tenía ningún problema con ninguna cosa en general

El primer problema abordaba un contexto extramatemático físico sobre una motocicleta y utilizando los conocimientos que a lo largo de las secuencias se habían construido había que solucionar desde distancias hasta el diferencial de posición con respecto al tiempo utilizando la fórmula de posición $x = vt + x_0$. Del mismo modo argumentaron los resultados que calcularon previamente en las hojas de trabajo.

La actividad de desarrollo consistía en una figura geométrica, en este caso un trapecio que sufría de incrementos con medidas establecidas, esta actividad era de forma individual y tenían que calcular el perímetro, el diferencial de sus lados, y por último el diferencial de su perímetro. Al final se abría una discusión para institucionalizar la proposición que consiste en que el diferencial de una suma de variables es la suma de sus diferenciales.

Para culminar, el cierre constaba de dos actividades, la primera en equipo y consistía en dibujar una figura geométrica, en este caso un rectángulo de medidas algebraicas e incrementos infinitesimales (δ) en cada uno de sus lados, para así calcular el área de la figura sin sus incrementos, el área con incrementos y el diferencial del área. Al término de esta actividad se institucionaliza la proposición del producto de diferenciales, la cual se obtiene con la suma de los productos resultantes del diferencial de la primera variable por la segunda variable y la primera variable por el diferencial de la segunda variable.

Por otro lado, la última actividad de la secuencia era de carácter individual y consistía en realizar el mismo procedimiento que la actividad de desarrollo, con la diferencia de que ahora los lados del trapecio tenían medidas algebraicas y no fijas. La actividad consistía en los cálculos iguales, cálculo de perímetro, diferencial de cada uno de sus lados y diferencial del perímetro.

Hacemos una discusión global con el motivo de institucionalizar nuevamente las proposiciones narradas, y aprovechar algún surgimiento de dudas o confusiones, pero esta vez no fue el caso y solo se repasó lo hecho previamente en la secuencia. Ellos entregan sus hojas de trabajo por vía correo electrónico y seguimos con la última secuencia de la propuesta.

La secuencia 6 se conformaba por 6 problemas de contexto físico, la actividad de inicio era de carácter individual y estaba conformada por dos problemas. Uno consistía en calcular el diferencial de una pompa de jabón con un incremento en su radio, mientras que el otro problema consistía en calcular el volumen de un cilindro a causa de una disminución en las paredes internas. Hubo diversas complicaciones al momento de aplicar los procedimientos promovidos por las diferentes institucionalizaciones que se hicieron en las discusiones e intervenciones. Interpretar el problema e identificar las variables eran algunas de las prácticas que no presentaban problemas, en la ejecución de utilizar todo como un conjunto era donde presentaban dificultades.

La etapa del desarrollo también estaba conformada por dos problemas de contexto extramatemático, sin embargo era en equipo, por lo que las dudas que solía escuchar el moderador por parte de los estudiantes ya podían ser compartidas más ampliamente. En este caso, el primer problema buscaba modelar el diferencial del desempeño de dos pintores pintando una misma pared simultáneamente con diferentes rendimientos, mientras que el otro problema abordaba la Ley de Boyle, y tenían que calcular la razón con que cambia el volumen con respecto a la presión. Este último problema en particular presentó muchas dificultades cuando los estudiantes intentaron analizar profundamente la Ley. Desconocían el contexto, y a pesar que no era lo relevante del problema, esto causó obstáculos en ellos a tal punto que no sabían por dónde empezar. El conductor los guio un poco, y entre los tres y el conductor se pudo llegar al objetivo. Esto solamente con el equipo que contribuía con la dinámica.

Por último, el cierre también constaba de dos problemas, solamente que esta vez sería de forma individual. El primer problema abordaba la Ley de la Gravitación Universal de Isaac Newton y se busca calcular la razón con que cambia la fuerza de atracción gravitatoria F, entre dos masas puntuales m_1 y m_2, con respecto a la distancia r entre ella. Mientras que el otro propone una figura geométrica, en este caso la esfera con un radio y se quiere calcular el área de la figura, el diferencial del área de la figura, el diferencial del área con respecto al radio, el volumen de la figura, el diferencial de su volumen y el diferencial de su volumen con respecto al radio. Aquí sin duda hubo demasiadas complicaciones por diversas cosas, confusiones en los procedimientos, conceptos, y proposiciones, sin mencionar que ya el cansancio, atareo, y debilitamiento corporal afectaba de una u otra forma. El conductor cooperó con el equipo que se permitió ayudar y orientar para que fuera algo cercano a lo esperado.

Se agradeció a todos los integrantes de manera global por haber participado con nosotros y se mandaron por última vez las hojas de trabajo de cada uno de los estudiantes.

4.3 Propuesta de modificaciones al diseño de las secuencias didácticas con base en la puesta en escena

Como resultado de lo observado, tanto en la puesta en escena, como en las hojas de trabajo, consideramos necesario modificar algunos aspectos de las actividades que conformaban las secuencias didácticas.

- Ambigüedad entre los términos “grandes” y “pequeñas” cuando a cantidades se refiere

En la primera actividad de cierre de la primera secuencia presentamos una serie de comparaciones, las cuales tenían como objetivo que el estudiante estableciera si era una diferencia grande, pequeña, muy grande o muy pequeña, así como la relatividad o ambigüedad que había entre lo *grande* y lo *pequeño.* Al no especificar qué parámetros queríamos que usaran, ellos optaron por utilizar otro tipo de adjetivos comparativos, lo cual nos dificultó el análisis de esa parte. Como solución a este problema, esclarecimos las indicaciones y decidimos realizar una breve intervención para explicar el sentido que queríamos que tuviera la actividad.

- Lenguaje matemático en las actividades

Si bien teníamos claro que los estudiantes eran de ingeniería, optamos por redactar propiedades matemáticas que demostraran lo realizado en las actividades y que sirvieran de apoyo para las actividades siguientes, pero los estudiantes presentaron diversas dificultades para leer y comprender los símbolos matemáticos, por lo que optamos por hacer modificaciones a un lenguaje digerible o natural.

- Una nueva interpretación gráfica de los números infinitamente pequeños

Durante la segunda secuencia, la prioridad era la representación gráfica de los infinitesimales, por lo que tratamos a estos números como aquellos números más cercanos a cualquier número de cualquier otro número, sin embargo, hubo una complicación generada por la intervención del diseñador, ya que al tener dos infinitesimales, se dejaban guiar por las propiedades de los enteros, donde 2 era más grande que 1, ignorando el hecho que $2\delta \approx \delta$. Por lo que, para mejorar ese aspecto, tomamos a decisión de hacer otro tipo de analogías para la explicación de esa propiedad, y en vez de verlo en una recta como un solo número, pensarlo como una nube de números, los cuales todos estén lo más cercano.

- Contribución al significado local de incremento infinitesimal

Siguiendo por el mismo sentido de lo gráfico, planteamos situaciones problema con diversas figuras geométricas, de tal manera que los estudiantes pudiesen representar con trazos su concepción de un incremento infinitamente pequeño, pero los resultados que obtuvimos están todavía alejados de lo que queremos, por lo que precisar más en el concepto gráfico de lo infinitesimal es algo que proponemos hacer para cubrir esa falla, ya que para ellos es algo que se tiene que observar.

- Otras consideraciones

La modalidad en línea se utilizó debido a las circunstancias preponderantes, produjo dificultades que en un aula presencial no existirían, por lo que las intervenciones fueron limitadas, y consideramos que nuestras participaciones entre secuencias eran importantes, por ejemplo la relación de una variable con un número infinitesimal y su significado, las propiedades algebraicas como la distributiva en los productos, mostrar con más profundidad los ejemplos de las hojas de trabajo y explicar más ejemplos con el propósito de que los estudiantes tuviesen una mejor construcción tanto de los conceptos, como de los procedimientos, lenguajes, etc.

4.4 Análisis *a posteriori* de la Idoneidad didáctica de la propuesta

El marco que utilizamos para la realización de este trabajo nos brinda herramientas para diseñar una secuencia didáctica con una idoneidad didáctica *a priori* satisfactoria.

Con base en el análisis *a posteriori* de la puesta en escena, hubo situaciones que no se satisficieron por completo. Por lo tanto, a continuación describiremos algunas modificaciones que consideramos contribuyen a mejorar algunos aspectos del diseño realizado.

4.4.1 Idoneidad epistémica

Análisis a priori**:** Los elementos del análisis *a priori* de la *idoneidad epistémica* de la propuesta son los siguientes:

- Se proponen situaciones variacionales y covariacionales para que el estudiante se problematice, además de que hacemos presente el significado polisémico de δ y los diferenciales.
- Se utilizan diferentes tipos de lenguaje en los problemas, así como conversiones entre estos lenguajes.
- Se presentan las definiciones, procedimientos y proposiciones fundamentales según el significado de referencia de los números infinitamente pequeños y diferenciales.
- Se identifican y articulan los diversos significados promovidos por la secuencia.

A continuación se presentan algunos puntos de valoración del trabajo desarrollado por los estudiantes, incluyendo de ser necesario respuestas a las situaciones planteadas y las respectivas recomendaciones con respecto el análisis *a posteriori* de la *idoneidad epistémica*.

Análisis a posteriori**:** Los elementos del análisis *a posteriori* de la *idoneidad epistémica* de la propuesta son los siguientes:

- Las situaciones problema planteadas a los estudiantes resultaron satisfactorias en el sentido de que se pudo notar en las diferentes discusiones y dudas que estos tuvieron. Desde dudas con el contexto del problema, hasta la resolución de este.
- Los lenguajes que intervienen en las secuencias varían entre el geométrico, algebraico, numérico y gráfico. Con estos lenguajes se realizaron conversiones entre ellos, por ejemplo de geométrico – algebraico, algebraico – geométrico, gráfico – algebraico, etc.
- Durante la resolución de problemas en las secuencias aparecían notitas informativas que ayudaban al estudiante a la construcción del significado pretendido, así como a recordar distintos conceptos. En las hojas de trabajo se pudieron observar las prácticas de los estudiantes donde desarrollaban los diferentes procedimientos para la resolución de problemas, así como la aplicación de proposiciones y conceptos.

- Las secuencias didácticas estaban diseñadas para que el estudiante pudiera desarrollar sus sistemas de prácticas de tal manera que los conocimientos construidos en secuencias previas ayudaran a la resolución de secuencias posteriores. Con base en los sistemas de prácticas de los estudiantes, las diferentes interacciones con ellos y la culminación de las secuencias, tuvimos los elementos necesarios para afirmar que los significados pretendidos por la secuencia se alcanzaron.

Desarrollo

- **I. Conteste las siguientes preguntas.**

1.- Si el lado x incrementara un valor infinitesimal, ¿cómo se representaría el incremento con símbolos matemáticos? Explíquelo. $x + \delta$

$\Delta x = \delta$ Representamos al incremento en el x como delta x, y lo que cambia por ser un valor muy pequeño, lo representamos con el símbolo gama.

2.- Si el lado y incrementa un valor infinitesimal, ¿cómo se representaría dicho incremento en símbolos matemáticos? Explíquelo.

$\Delta y = \delta$Representamos al incremento en el y como delta y, y lo que cambia por ser un valor muy pequeño, lo representamos con el símbolo gama.

3.- ¿Cómo se calcularía los incrementos δx y δy de los lados x y y? Explíquelo con sus palabras y símbolos matemáticos.

$\delta x = (x + \Delta x) - x$

$\delta y = (y + \Delta y) - y$

Figura 1: Hoja de trabajo perteneciente al desarrollo de la secuencia 3.

En la Figura 1 se muestra cómo confunden los significados de los símbolos matemáticos antes mencionados, así como el uso de lenguaje que no se utilizó, como el símbolo *gama*.

La redacción de las instrucciones deben esclarecerse, de tal manera que no haya oportunidad de ambigüedades al leer dichas instrucciones, así como cuidar los símbolos matemáticos a los que les damos prioridad, ya que el estudiante confunde el significado de Δ con el de δ.

Una posible solución al problema presentado sería el hacer hincapié a lado de las instrucciones un recordatorio de la polisemia de significados de los símbolos matemáticos o en su defecto, dar una breve introducción de dicha polisemia frente al grupo.

El tema de los infinitesimales crea dificultades de la naturaleza siguiente. Al nosotros presentar un símbolo polisémico, es decir con más de un significado, origina que el significado personal de cada uno se torne confuso, ya que el significado propuesto por la secuencia es diferente al personal, por lo que se necesita una institucionalización sólida del concepto para identificar los contextos con que los símbolos se utilizan, de no ser así, se corre el riesgo de que estos diferentes tipos de significados se tergiversen a lo largo de la resolución de la secuencia.

a) Calcule el área de la figura

$A=4\pi r^2$

b) Calcule el diferencial del área de la figura

$\Delta A= \delta A$

c) Calcule el diferencial del área con respecto al radio

$$\Delta A = 8\pi r \Delta r$$

d) Calcule el volumen de la figura

$V=\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^2$

e) Calcule el diferencial del volumen de la figura

$\Delta V= \delta V$

f) Calcule el diferencial del volumen con respecto al radio

$\Delta V= \frac{8}{3} \pi r \Delta r$

Figura 2: Hoja de trabajo perteneciente al desarrollo de la secuencia 6.

En la Figura 2 se muestra un ejemplo sobre lo que se describe anteriormente. El estudiante se olvida de los símbolos matemáticos propuestos por la secuencia para representar los diferenciales, y omite todo procedimiento requerido para resolver las situaciones problema. Sólo utiliza el símbolo Δ para señalar lo que su significado personal identifica como un diferencial.

Debido a los significados personales de cada uno de los estudiantes, pudo haberse mal interpretado a Δ como una representación directa de un diferencial, y quizás las instrucciones validaron sus respuestas, por lo que es necesario mejorar la redacción de las instrucciones para acercarnos a lo que la secuencia propone.

Como se menciona, es necesario indicar con énfasis la relevancia del procedimiento, ya sea de manera descriptiva en las indicaciones textuales de la actividad o dar una breve indicación general a todo el grupo. Otra corrección más es la incorporación de una nota, en donde se señale el concepto de diferencial propuesto en el diseño y brindar un breve ejemplo genérico de cómo se espera que calculen un diferencial, si por alguna razón haya quedado alguna duda al respecto o haya habido alguna complicación en el estudiante para la institucionalización en general.

Propuesta de modificación. Dado que el análisis *a posteriori* coincide en su mayoría con lo estipulado en el análisis *a priori*, no se proponen modificaciones en la trayectoria epistémica.

4.4.2 Idoneidad cognitiva

***Análisis a priori*:** Los elementos del análisis *a priori* de la *idoneidad cognitiva* de la propuesta son los siguientes:

Los alumnos seleccionados para la realización de esta puesta en escena ya han tomado el curso de Cálculo I, en donde se tratan los temas pretendidos por el diseño, por lo que sostener que tienen conocimientos previos es casi seguro de garantizar. Todos los alumnos ya tienen significados personales necesarios para el estudio de los números infinitamente pequeños y diferenciales. Los significados pretendidos se pueden alcanzar por la dificultad manejable con la que se diseñaron las actividades. También se incluyen actividades de aplicación y de esfuerzo, así como una diversidad de modos de evaluación que indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos.

Así pues, se hace mención de algunos puntos de valoración del trabajo desarrollado por los estudiantes, y las respectivas recomendaciones con respecto el análisis *a posteriori* de la *idoneidad cognitiva*.

***Análisis a posteriori*:** Los elementos del análisis *a posteriori* de la *idoneidad cognitiva* de la propuesta son los siguientes:

A pesar de que los estudiantes ya habían cursado Cálculo I, los significados pretendidos por el diseño no se asemejaban a los significados institucionales que habían construido. De esta manera los significados pretendidos por la secuencia dieron lugar a dudas, explicaciones, institucionalización de conceptos y preposiciones, así como una forma diferente de realizar procedimientos, ya que al utilizar el método de resolución por medio de infinitesimales se creó otro tipo de símbolos y procedimientos a los que previamente conocían por medio de límites.

Si bien contaban con conocimientos previos antes de la resolución de las diferentes secuencias, el diseño contaba con diferentes notas informativas para el apoyo de estos conocimientos previos y a su vez para la construcción de conocimientos nuevos.

La dificultad era progresiva según avanzaban en las secuencias, por lo que algunas veces la secuencia previa ayudaba a la resolución de la siguiente, algunas eran una réplica de la anterior pero con más elementos, y la última secuencia fue únicamente para probar la institucionalización de elementos durante todo el proceso de resolución de secuencias. De esta manera pudimos evaluar el progreso del estudiante y sus logros con base en su desempeño.

Figura 3: Hoja de trabajo perteneciente al cierre de la secuencia 2.

En la Figura 3 hacemos referencia a este tipo de conocimientos previos, en el que el estudiante desarrolla un binomio al cuadrado como la suma de los cuadrados de sus términos, cuando se esperaría que el desarrollo sea como el primer término al cuadrado, más el primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado. Estos conocimientos afectan de alguna manera al significado pretendido por el diseño.

3.- Un tren viaja a una velocidad constante de 120 km/h durante 15 minutos. Si representamos con s el número de kilómetros que viajó dicho tren y con t el número de minutos que ha viajado de una estación a otra.

a) ¿Qué representan δs y δt?
δs *el incremento del recorrido* y δt el incremento del tiempo
b) ¿A qué es igual δs cuando $\delta t = 0.0001$ min? 30.0002
120 60
30.0002 15.0001
c) ¿A qué es igual δt cuando δs es igual a 1 km? 30 Seg.
60 120
0.5 1

Figura 4: Hoja de trabajo perteneciente al cierre de la secuencia 3.

En el caso de la Figura 4, se puede observar que el estudiante ignoró por completo el uso de los diferenciales y optó por utilizar la regla de 3 para solucionar el problema.

Propuesta de modificación. Las recomendaciones correspondientes para una mejoría de la *idoneidad cognitiva* son las siguientes:

- Elaborar una breve introducción de conocimientos básicos que consideremos será necesario recordar, como los productos notables y la propiedad distributiva, ya que son elementos altamente importantes para el cálculo de variaciones con lenguaje algebraico.

- Al ser un grupo que ya había cursado la materia, los conocimientos ya construidos estropeaban la construcción de conocimientos nuevos, por lo que es necesario hacer énfasis en que, si bien, el diseño de la secuencia les haría evocar cosas que ya conocían, la similitud de esas cosas no era relevante para la resolución de la secuencia.

4.4.3 Idoneidad mediacional

***Análisis a priori*:** Los elementos del análisis *a priori* de la *idoneidad mediacional* de la propuesta son los siguientes:

- Se incorporaron recursos gráficos que permitían facilitar el planteamiento de situaciones variacionales, recursos como figuras y un pizarrón para aclaraciones o transformaciones entre representaciones necesarias.
- La hora del curso fue la apropiada, se estimaba que tuviésemos dos horas por sesión, y por medio de herramientas tecnológicas fue que se pudo lograr tanto. Tiempo que también se estimó para que sea el adecuado para el alumno en la construcción de nuevo conocimiento.

Por otra parte, se presentan algunos puntos de valoración del trabajo desarrollado por los estudiantes, incluyendo de ser necesario respuestas a las situaciones planteadas y las respectivas recomendaciones con respecto el análisis *a posteriori* de la *idoneidad mediacional*.

***Análisis a posteriori*:** Los elementos del análisis *a posteriori* de la *idoneidad mediacional* de la propuesta son los siguientes:

- Debido a circunstancias que no pudimos controlar, se trabajó mediante una plataforma en línea, la cual ayudó para la ejecución de la puesta en escena, pero a su vez nos generó, tanto complicaciones como ventajas. Por ejemplo, al momento en el que los estudiantes trabajaron en equipo, no podíamos monitorear de manera simultánea a ambos equipos y teníamos que turnarnos entre los equipos para escuchar dudas o comentarios. A diferencia de un salón de clase donde vemos a todos y escuchamos a todos al mismo tiempo. Del mismo modo, pudimos notar elementos positivos, como las participaciones de los estudiantes que fueron ligeramente diferentes a las participaciones que tienen en un salón de clase. Estas eran “más sueltas”, había intervenciones con un poco de efusividad en algunas ocasiones, no temían a participar ni decir lo que pensaban. El miedo del error estaba ausente. Si bien, la imagen del profesor en el salón de clase puede cohibir de alguna manera al alumno cuando se trabaja en el salón, ya sea individualmente o en equipo, aunque no se esté atendiendo directamente al equipo. La privacidad que generó esta nueva modalidad fue un factor importante para observar ese desenvolvimiento de los estudiantes en cada intervención o trabajo en equipo.

- La medición del tiempo para cada sesión fue monitoreada de manera precisa gracias a la forma de implementación que se realizó, de tal manera que las sesiones tenían una duración de 2 horas a 3 horas aproximadamente cada una. Si bien se logró lo que se esperaba con respecto a la duración de las sesiones, tuvimos inconvenientes algunas veces por lo que se llegó a prolongar un par de veces. Por otra parte, la distribución de días para la implementación fue adecuada, ya que dividimos las sesiones en 3, teniendo 2 sesiones por día.
- Los estudiantes utilizaron diferentes medios para la entrega de sus hojas de trabajo, algunos guardaban su trabajo electrónico en forma de PDF, algunos en formato Word y otros por medio de fotografías, pues optaron por resolver las secuencias a mano.
- El software que utilizamos contaba con herramientas como la de un pizarrón, en la cual los estudiantes podían participar escribiendo procedimientos y explicándolos, pero el hecho de no estar acostumbrados, hizo que hubiese quizás tanta claridad en comparación de un pintarrón.

En la Figura 5 se muestra el uso de la herramienta *pizarra* de la plataforma Teams en la cual se utilizó para una introducción de los conceptos que se habían abordado hasta ese momento como una manera de institucionalización general.

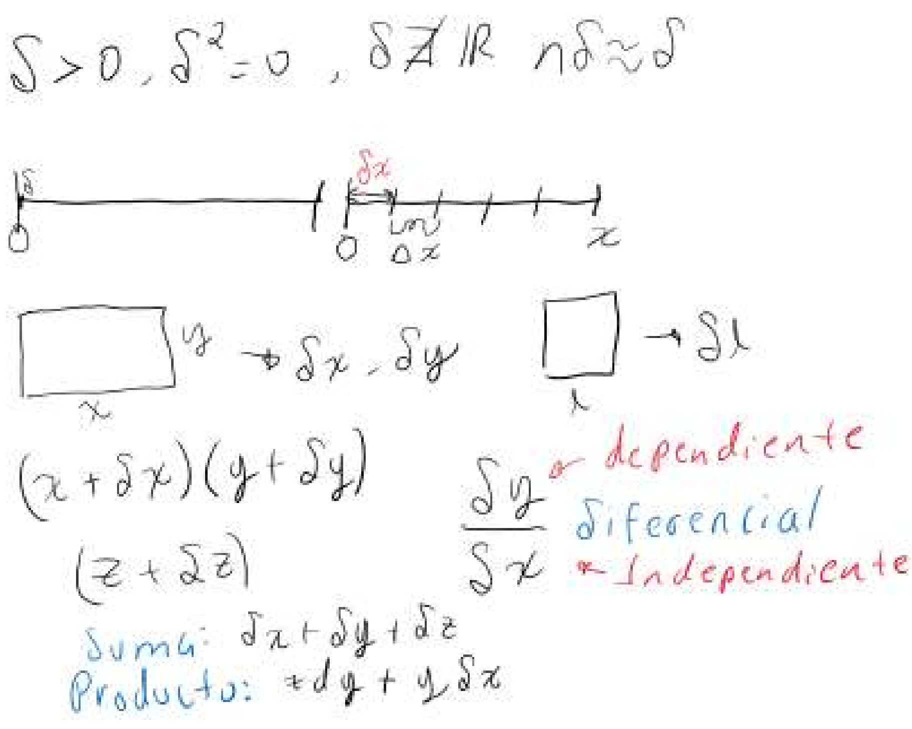


Figura 5: Pizarra por parte de la plataforma Teams

Propuesta de modificación. Dado que el análisis *a posteriori* coincide en su mayoría con lo estipulado en el análisis *a priori*, no se proponen modificaciones en la trayectoria mediacional.

4.4.4 Idoneidad emocional

***Análisis a priori*:** Los elementos del análisis *a priori* de la *idoneidad emocional* de la propuesta son los siguientes:

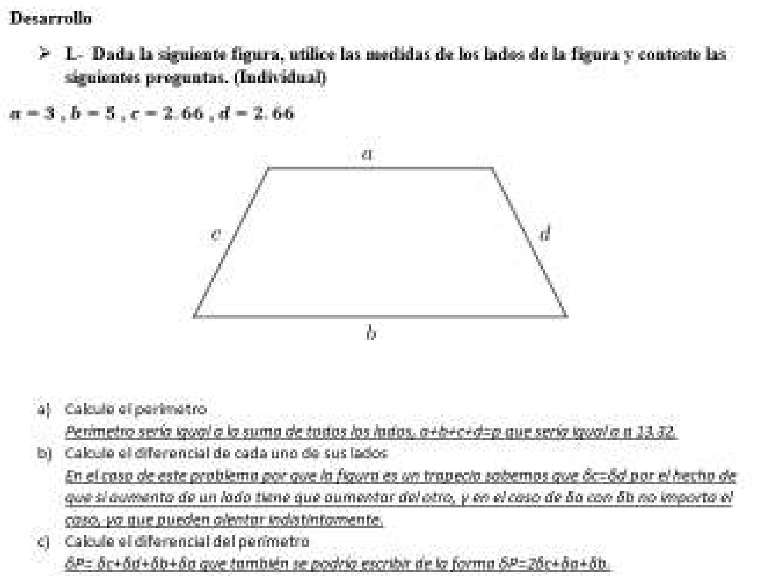
- Se propusieron situaciones de tal manera que el alumno pudiera valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, además en el diseño de las actividades favorecimos la argumentación en situaciones de igualdad, ya que tuvimos a 5 hombres y una sola mujer, la cual fue tratada del mismo modo que al resto.

Acto seguido, se presentan algunos puntos de valoración del trabajo desarrollado por los estudiantes, incluyendo de ser necesario respuestas a las situaciones planteadas y las respectivas recomendaciones con respecto el análisis *a posteriori* de la *idoneidad emocional*.

***Análisis a posteriori*:** Los elementos del análisis *a posteriori* de la *idoneidad emocional* de la propuesta son los siguientes:

- De los 6 integrantes que conformaban los dos equipos, solo una de ellas era de sexo femenino, y se notó que asumió el papel directriz dentro de su equipo y los demás lo aceptaron.
- Las respuestas, intervenciones y propuestas hechas por los compañeros de equipo eran respetadas de igual manera en todos los aspectos. Con base en argumentos sólidos y demostraciones se llevaban la razón de la discusión según se planteara el problema.

En las Figuras 6 y 7 se pueden mostrar los trabajos de un varón y una mujer respectivamente.



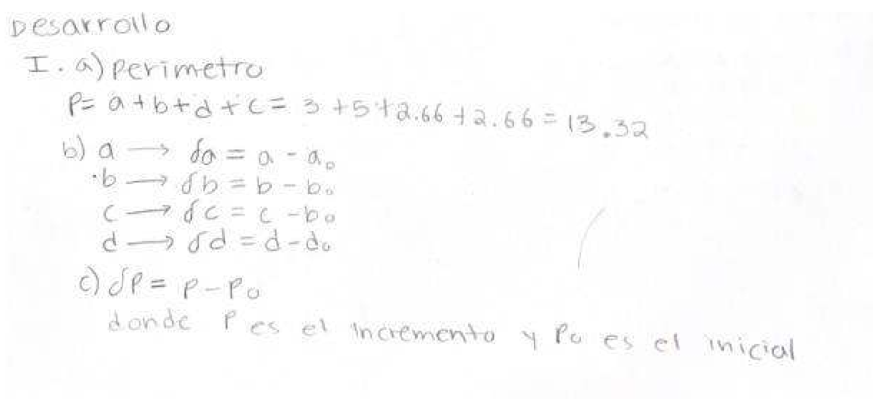
Desarrollo

➢ **I.- Dada la siguiente figura, utilice las medidas de los lados de la figura y conteste las siguientes preguntas. (Individual)**

$a = 3$, $b = 5$, $c = 2.66$, $d = 2.66$

a) Calcule el perímetro
Perímetro sería igual a la suma de todos los lados, a+b+c+d=p que sería igual a a 13.32.
b) Calcule el diferencial de cada uno de sus lados
En el caso de este problema por que la figura es un trapecio sabemos que δc=δd por el hecho de que si aumenta de un lado tiene que aumentar del otro, y en el caso de δa con δb no importa el caso, ya que pueden alentar indistintamente.
c) Calcule el diferencial del perímetro
δP= δc+δd+δb+δa que también se podría escribir de la forma δP=2δc+δa+δb.

Figura 6: Hoja de trabajo perteneciente al desarrollo de la secuencia 5 por un varón.



Desarrollo
I. a) Perimetro
$P = a+b+d+c = 3+5+2.66+2.66 = 13.32$
b) $a \longrightarrow \delta a = a - a_0$
$b \longrightarrow \delta b = b - b_0$
$c \longrightarrow \delta c = c - b_0$
$d \longrightarrow \delta d = d - d_0$
c) $\delta P = P - P_0$
donde P es el incremento y Po es el inicial

Figura 7: Hoja de trabajo perteneciente al desarrollo de la secuencia 5 por una mujer.

Propuesta de modificación. Continuamos con las recomendaciones para la idoneidad *emocional*:

- ➢ En las situaciones problema extramatemáticas, en este caso de la rama de la física, se presentaron dificultades con respecto a la familiarización de los contextos, ya que los conocimientos de fenómenos físicos eran relativamente nuevos para ellos como La Ley de Gravitación Universal de Isaac Newton o la Ley de Boyle.
- ➢ Tanto hombres como mujeres no mostraron resistencia a nuevas cosas que iban surgiendo. A pesar de haber sido un nuevo enfoque de cálculo, mostraron total interés y disposición en todo momento.

4.4.5 Idoneidad interaccional

Análisis a priori**:** Los elementos del análisis *a priori* de la *idoneidad interaccional* de la propuesta son los siguientes:

- Algunas actividades del diseño fueron seleccionadas para realizarlas en equipo, por lo que buscábamos favorecer el diálogo y la comunicación entre los estudiantes. También proponemos lapsos para discusión, expresar ideas e institucionalización de elementos necesarios para actividades posteriores.

Por otra parte, se presentan algunos puntos de valoración del trabajo desarrollado por los estudiantes, incluyendo de ser necesario respuestas a las situaciones planteadas y las respectivas recomendaciones con respecto el análisis *a posteriori* de la *idoneidad interaccional.*

***Análisis a posteriori*:** Los elementos del análisis *a posteriori* de la *idoneidad interaccional* de la propuesta son los siguientes:

- Hicimos pausas al término de cada sesión para dudas, aclaraciones e institucionalizaciones necesarias para que el desarrollo de las secuencias fuese fluido. Las dudas ayudaban a que los conceptos se esclarecieran y por otra parte, con base en las prácticas de secuencias anteriores mejoramos las indicaciones para buscar un mejor resultado en las hojas de trabajo.
- Como ya mencionamos se crearon dos equipos, que si bien ambos tuvieron participaciones en las sesiones, uno en específico sobresalió, y eso generó una diferencia evidente en las prácticas de los estudiantes de distintos equipos. Como se mencionó, el hecho de no estar presencialmente ayudó para que el desenvolvimiento del estudiante fuese distinto y hubiese un cambio positivo.

En las Figuras 8 y 9 se muestran las hojas de trabajo de un estudiante perteneciente a cada equipo con la intención de observar el contraste de resultados.

2.- La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $P \times V = C$, donde C es una constante. ¿Con qué razón cambia el volumen con respecto a la presión? Use diferenciales.

$$\Delta V = \frac{C}{\Delta P}$$

Figura 8: Estudiante de grupo 1 donde utiliza solamente el símbolo de Δ para resolver el problema.

2.- La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $P \times V = C$, donde C es una constante. ¿Con qué razón cambia el volumen con respecto a la presión? Use diferenciales.

$dv=-(c/p^2)dp$

$\delta(p*v)=0$

$v\delta p+p\delta v=0$

$(c/p)\, \delta p+p\delta v=0$

$P\delta v=-(c/p)\, \delta p$

$\delta v = -(c/p^2)\, \delta p$

$\delta v/\delta p = -c/p^2$

Figura 9: Estudiante del equipo 2 donde utiliza un procedimientos propuesto por la secuencia para la resolución de un problema utilizando diferenciales.

Propuesta de modificación. Continuamos con las recomendaciones para la idoneidad *interaccional* que son las siguientes:

- Se hizo la implementación 6 estudiantes, de los cuales se formaron 2 equipos de 3 personas. La plataforma que escogimos para la implementación contaba con herramientas necesarias para realizar sesiones por videollamada con estos dos equipos, pero sin la posibilidad de hacerlo simultáneamente.
- El limitante de no poder estar en llamada con los dos equipos al mismo tiempo, nos obligaba a intercalar entre la salas de los equipos. Con base en la relación de nosotros con los equipos, pudimos notar que uno era más participativo que el otro.
- Siguiendo con el punto anterior, también hubo cosas positivas como que las estrategias de trabajo de los diferentes equipos fueron distintas. Por una parte, el equipo 1 decidió tomar un solo documento y editarlo entre su equipo. Este equipo no interactúo tanto con nosotros, lo cual les dio una libertad más amplia al solo tenerse a ellos mismos y compartir conocimientos. En cambio, el equipo 2 utilizó diferentes documentos, interactúo con nosotros y se corregían dudas de haberlas tenido.
- Tuvimos la oportunidad de observar al equipo 2 con respecto a procedimientos, escuchar comentarios y conjeturar resultados con base en sus participaciones. A diferencia del otro equipo, el cual decía entender todo y no tener ninguna duda. Esto *a posteriori* reflejó las evidentes diferencias en las hojas de trabajo.

4.4.6 Idoneidad ecológica

***Análisis a priori*:** Los elementos del análisis *a priori* de la *idoneidad ecológica* de la propuesta son los siguientes:

- Los significados pretendidos/implementados, y evaluado se corresponden con las directrices curriculares
- Las actividades las diseñamos con una innovación basa en la investigación y la práctica reflexiva, así como integramos el uso de herramientas tecnológicas.

Por otra parte, se presentan algunos puntos de valoración del trabajo desarrollado por los estudiantes, incluyendo de ser necesario respuestas a las situaciones planteadas y las respectivas recomendaciones con respecto el análisis *a posteriori* de la *idoneidad ecológica.*

***Análisis a posteriori*: ** Los elementos del análisis *a posteriori* de la *idoneidad ecológica* de la propuesta son los siguientes:

- Hubo interés en los nuevos contextos que se presentaron, a pesar de no ser de la rama de estudio de su ingeniería en específico.
- Los significados pretendidos cumplían con las directrices curriculares, a pesar de no haberse abordado el tema de la manera en la que lo hicimos.
- Los estudiantes pasaron por un proceso de práctica reflexiva al tratar de comprender los diversos significados de δ según los contextos extramatemáticos.
- Los recursos tecnológicos usados fueron exitosos, ya que hubo una amplia libertad de su uso. Algunos utilizaron métodos con softwares matemáticos como Geogebra, calculadoras, el software con el cual nos comunicábamos, etc.

Propuesta de modificación. Dado que el análisis *a posteriori* coincide en su mayoría con lo estipulado en el análisis *a priori*, no se proponen modificaciones en la trayectoria ecológica.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En el capítulo uno dimos a conocer información acerca de la problemática existente en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, e hicimos un claro énfasis en nuestro tema de interés, en este caso, referente a las dificultades presentadas por los estudiantes en el tratamiento del concepto de límite. Nuestra aportación al respecto de tal problemática fue una propuesta didáctica que promoviera un acercamiento intuitivo y pragmático al cálculo, en particular a las cantidades infinitamente pequeñas, con base en la resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos.

Nuestra propuesta, como mostramos en el capítulo 3, consistió en el diseño de seis secuencias didácticas, que a su vez están conformadas por diversas actividades de inicio, desarrollo y cierre.

Por otra parte, el EOS nos facilitó las herramientas para el diseño de las actividades didácticas y la valoración de las mismas. Las nociones objeto y significado de esta teoría nos permitieron determinar los objetos matemáticos primarios, tanto intervinientes como emergentes, que conformarían el significado pretendido de nuestra propuesta. La trayectoria didáctica estructura las actividades didácticas de tal manera que favoreciera el uso y la emergencia de dichos objetos progresivamente. Por otro lado, la noción *idoneidad didáctica* nos permitió hacer una valoración *a priori* y *a posteriori* de la pertinencia de las secuencias didácticas dentro del sistema educativo correspondiente a la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

Como mencionamos en el capítulo uno, el propósito de nuestra propuesta fue promover en los estudiantes de Ingeniería la construcción del significado de la derivada, haciendo énfasis en la razón instantánea de cambio utilizando cantidades infinitesimales, y el manejo de diversos significados de otros objetos matemáticos del cálculo diferencial en problemas intramatemáticos y extramatemáticos.

Para la realización de las siguientes conclusiones que presentamos, tomamos en cuenta momentos importantes como: los referentes a lo que llamamos etapa *a priori,* que es la valoración de la propuesta al escribirse. Otro momento, es la evaluación de lo sucedido durante la puesta en escena que, a pesar de diversas limitaciones, nos permitió hacer una valoración que denominamos *a posteriori*.

Esta valoración a posteriori, realizada con los indicadores de la idoneidad didáctica contemplada en el EOS, nos permitió hacer un estudio descriptivo bastante completo de la propuesta didáctica y de su realización con los estudiantes que participaron en la puesta en escena.

Para presentar nuestras conclusiones es pertinente tomar en cuenta los propósitos que nos propusimos satisfacer con este trabajo.

Se establecieron cuatro objetivos específicos, de los cuales presentaremos un análisis a priori y uno a posteriori con la intención de hacer un contraste de lo sucedido.

1.- Determinar los propósitos curriculares y contenidos matemáticos asociados al estudio de la derivada en las áreas de ingeniería, estableciendo el significado institucional pretendido por el currículo.

A priori supusimos que este objetivo era posible de alcanzar por lo siguiente:

Debido que el diseño de nuestra propuesta era para estudiantes de la Universidad de Sonora, revisamos los programas de estudio de las carreras de Ingeniería, en los cuales estarían los contenidos matemáticos asociados al estudio de la derivada. Esto es análogo al *significado institucional de referencia*. Y de esta manera nos permitiría elaborar un *significado institucional pretendido* con base en el currículo.

A posteriori consideramos que el objetivo específico se alcanzó, pues al hacer la revisión de los contenidos matemáticos, hicimos una selección de temas que nos interesaba enfatizar, esos temas fueron las bases para el *significado institucional pretendido* de nuestra propuesta y que esta cumpliera con las características del currículo.

El segundo objetivo específico trata de que el estudiante logre:

2.- Caracterizar a la razón instantánea de cambio desde un enfoque infinitesimal, estableciendo el significado institucional pretendido por el diseño.

A priori consideramos que este objetivo se podía lograr, debido a que:

Era un proceso intuitivo el que promovía el diseño. Si bien los estudiantes no estaban familiarizados con el lenguaje infinitesimal, un ejemplo son las palabras “infinito” o “infinitesimal” que, mediante experiencias empíricas como estudiante, estas palabras contenían ciertas dificultades para concebir. Sin embargo, establecimos a la razón instantánea de cambio como una variación infinitesimal.

A posteriori consideramos que este objetivo se logró alcanzar debido que partimos de los conceptos de cantidades pequeñas, grandes, muy pequeñas y muy grandes, sin embargo lo que priorizamos fueron las cantidades pequeñas. Una vez concebida la relatividad de cantidades con base en comparaciones que nosotros planteamos en los problemas, procedimos a las cantidades infinitamente pequeñas, detallando sus propiedades. De esta forma, cuando planteamos problemas de razón instantánea de cambio, el significado de razón instantánea de cambio, era una variación de magnitud *infinitesimal.*

3.- Diseñar e implementar actividades para el estudio de la razón instantánea de cambio con un enfoque infinitesimal.

A priori consideramos que este objetivo se podía lograr, puesto que:

Hicimos un diseño de seis secuencias didácticas progresivas, con base en los indicadores de la *idoneidad didáctica* y una *trayectoria epistémica*. Por una parte, con ayuda de los indicadores antes mencionados, desarrollamos el contenido de nuestra propuesta. Es decir los conceptos que intervienen y emergen de las prácticas de los estudiantes; *los significados pretendidos.* Y por otra parte, la estructuración de la construcción de conceptos progresiva, es decir los conceptos tratados en actividades previas tomaban un papel importante en las actividades siguientes de las secuencias. En otras palabras, desarrollamos una *trayectoria epistémica*. Este diseño de actividades se planeó para implementarlo a estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

A posteriori consideramos que alcanzamos a lograr el objetivo, debido a que el diseño de actividades, efectivamente lo implementamos a seis estudiantes de Ingeniería. Las hojas de trabajo nos permitieron observar las *prácticas matemáticas* de los estudiantes, las cuales mostraron una construcción de significados progresivos como lo habíamos previsto.

4.- Valorar los diseños de estas actividades didácticas a través de su implementación y reformularlas para mejorarlas.

A priori supusimos que este objetivo era posible de alcanzar por lo siguiente:

Como mencionamos anteriormente, las bases para el contenido de nuestra propuesta fueron los indicadores de la *idoneidad didáctica*, por lo que tendríamos elementos para como referencia al momento de analizar lo sucedido en la puesta en escena. Sin duda la reformulación de algunas cosas es segura, ya que estamos sujeto a fallos y a mejoras constantes.

A posteriori podemos decir que el objetivo se cumplió. A pesar de realizado la implementación de actividades mediante la plataforma Teams, tuvimos la oportunidad de observar elementos necesarios para realizar un análisis de nuestra propuesta. Como mencionábamos en párrafos anteriores, los resultados de la puesta en escena iban a ser elementos que podemos decir que salieron como esperábamos, así como iban a ver elementos que habríamos que considerar para una reformulación de estos.

Algunos de los elementos que se lograron como esperábamos son los siguientes:

- Los contenidos matemáticos que tratamos en las secuencias didácticas fueron progresivos, de tal manera que los estudiantes hacían uso de las prácticas previas para orientarse en actividades posteriores.
- Nuestra propuesta presentaba dificultades intrínsecas, pero posibles de superar.
- Con base en las intervenciones que tenía el conductor de la implementación, los estudiantes resolvían dudas sobre las propiedades de los infinitesimales. Una vez resueltas las dudas, las institucionalizaciones se realizaron de forma más efectiva, que solo escrita como proposición en las hojas de trabajo.
- Las dificultades que presentaban los estudiantes para el desarrollo de sus procedimientos se limitaban al desarrollo de binomios cuadrados, a la imaginar algo muy pequeño, entre otros. Es decir, que estas dificultades evidencian lo intuitivo de los problemas.
- Algo a destacar que pudimos notar, fue la intervención y participación de los estudiantes. Como mencionamos anteriormente, la implementación fue ejecutada mediante una plataforma en línea, de esta forma, ellos se privaban de sentir una presencia mayor del docente, comparada a la presencial. Esta privación se hizo muy evidente en la libertad que estos tenían al participar, o al decir cosas relacionadas con las actividades. Si bien, de forma presencial en un salón de clase también participarían, sentimos una leve diferencia. De manera virtual, los estudiantes no se sentían presionados ni cohibidos por una figura "superior", y esto generó en ellos una respuesta positiva distinta a la habitual.

Por otro lado, elementos que presentan una oportunidad de mejora o reformulación son los siguientes:

- Se realizaron dos equipos, si bien el trabajo en equipo resultó favorable para un equipo, para otro resultó que podría mejorar. Las herramientas de la plataforma en la que implementamos no nos permitía tener un monitoreo de ambos equipos simultáneamente.

Por lo que la mejora podría ser el uso de más de un dispositivo con una misma cuenta para poder monitorear a la vez.

- Como se explica anteriormente, la causa por la que decimos que con un equipo no tuvimos resultados favorables fue por su escaza participación en dudas, preguntas, o explicaciones delante del grupo. Estas acciones se evidenciaron de manera notoria en las hojas de trabajo, ya que los equipos tuvieron un desarrollo de prácticas matemáticas distintas.
- Los estudiantes con los que implementamos nuestra propuesta eran estudiantes que ya habían cursado “Cálculo Diferencial e Integral I”, el cual era ideal para nosotros. Debido a esto el lenguaje que nosotros promovíamos era distinto al que ellos tenían, y eso mismo obstaculizaba por momentos la construcción de “lo mismo”, pero de diferente forma. Por lo que la mejora que proponemos es implementar nuevamente con estudiantes que apenas estén por cursar dicho curso.
- Los números infinitamente pequeños presentan dificultades que ya hablamos en párrafos anteriores. Sin embargo, es necesario hacer un énfasis importante en la representación gráfica de estos números, debido a que todos presentaron prácticas distintas a las esperadas. La propuesta como mejora sería tener más relevancia en las intervenciones con respecto a dicha representación, ya que creemos que en la puesta en escena se trató poco y por eso tuvimos esos resultados.
- Es necesario hacer una reformulación en la redacción de preguntas en algunas actividades para una mejor claridad de lo que queremos que el estudiante desarrolle en sus prácticas.

Esos fueron algunos de los elementos a destacar antes, durante y después de la puesta en escena. Creemos que los objetivos se cumplieron por los diversos resultados obtenidos. En el primer capítulo mencionábamos que nuestra propuesta se centraba en un enfoque distinto al del límite, puesto que este ya había sido documentado ampliamente acerca de sus tantas dificultades que presentan los estudiantes. Este enfoque distinto que nosotros proponemos, como podrán notar no es libre de dificultades, sin embargo a diferencia del límite, son dificultades distintas.

El propósito subyacente de esta propuesta, también es el de formar parte de una documentación acerca de este enfoque y de los diversos progresos que experimentan los estudiantes haciendo uso de las cantidades infinitesimales.

REFERENCIAS

Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, *1*, 97-140.

Barrioseta, L. (2014). *Derivadas de la vida cotidiana.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad de La Rioja.

Bell, J. L. (1998). A primer of infinitesimal analysis. Cambridge University Press.

Boyer, C. B. (1959). The History of the Calculus and Its Conceptual Development (First Edition). Dover Publications.

Cornu B. (1981) Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propes. Proceedings PME-V, Grenoble, France, Vol. I, p. 322-326.

Cuevas V., Rodríguez E., González O., (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. *ALME, 27, 2335-2345.*

Danhke, G. 1. (1989). Investigación y comunicación. En C. Fernández-Collado y G. L. Danhke (Eds.). *La comunicación humana: Ciencia social* (pp. 385-454). Mexico: McGraw-Hill.

Edwards, C. H. J. (2012). The Historical Development of the Calculus. Springer Publishing.

Dávila, M. (2010). La derivada a partir de problemas de optimización de ambientes dinámicos creados con Geogebra (Tesis de Maestría). Universidad de Sonora, Sonora.

Godino, J. D. (2002). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática".

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 111-132.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

González, L., Radillo, M. (2014). Una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada de una función, mediante actividades de visualización. *ALME, 27, 925-932.*

Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función* (tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, México.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. 4ª Edición. Editorial McGrawHill. Ciudad de México.

Klein, F. (2007). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis. Cosimo Classics.

Schivo, M., Sgreccia, N., Caligaris, M. (2014). Derivada y aplicaciones: la tecnología en el aula. *ALME, 27, 2075-2083.*

Thompson, Patrick W., & Ashbrook, Mark. (2019) *Calculus: Newton, Leibniz, and Robinson meet technology.* Retrieved from http://patthompson.net/ThompsonCalc/.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona, ESP: Crítica-Grijalbo, 1989.