

UNIVERSIDAD DE SONORA

**Estabilidad asintótica de la onda  
solitaria distorsionada de la ecuación  
GKdV: un análisis asintótico y numérico**

por

Miguel Ángel Valdez Grijalva

Una tesis sometida para el grado de  
Maestro en Ciencias (Física)

en la  
División de Ciencias Exactas y Naturales  
DIFUS

Diciembre 2013

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



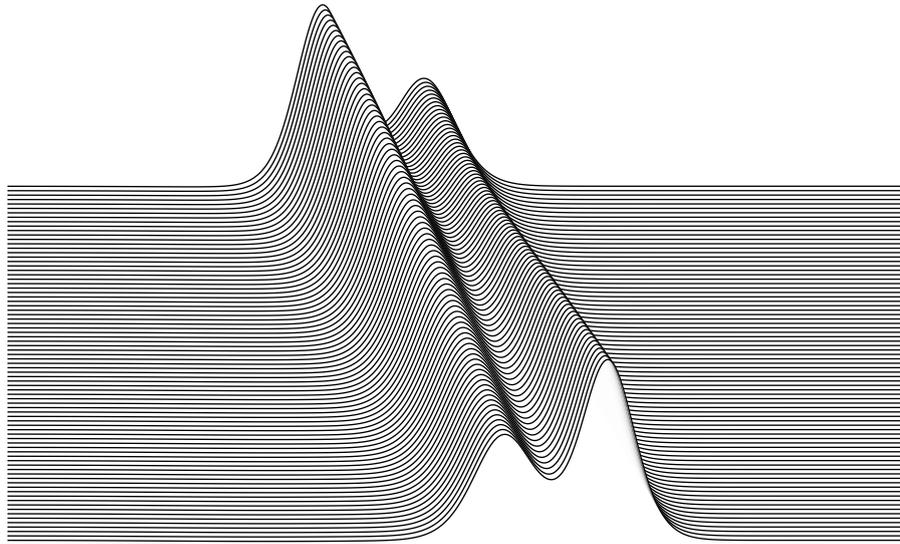
**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

*“Quería soñar un hombre: quería soñarlo con integridad minuciosa e imponerlo a la realidad. Ese proyecto mágico había agotado el espacio entero de su alma.”*

Jorge Luis Borges.



UNIVERSIDAD DE SONORA

## *Abstract*

División de Ciencias Exactas y Naturales

DIFUS

Maestría en Ciencias (Física)

por Miguel Ángel Valdez Grijalva

En la presente tesis estudiamos la estabilidad asintótica de la onda solitaria que es solución de un miembro de la familia de ecuaciones generalizadas de Korteweg-de Vries (GKdV) ante una perturbación no-lineal. Esta ecuación diferencial parcial tiene el término no-lineal  $(u^{3/2})_x$  solo de la clase de diferenciabilidad  $C^1$ . Además, la ecuación es esencialmente no-integrable por lo que en general es imposible encontrar analíticamente una solución explícita en el sentido clásico o débil. Encontramos la solución asintótica de precisión  $o(\varepsilon)$  con forma de solitón para esta ecuación cuando la dispersión es pequeña. Se construye un esquema de diferencias finitas para simular numéricamente la dinámica del sistema y se muestran resultados gráficos de las simulaciones. Las simulaciones corroboran las predicciones sobre la estabilidad desprendidas de la solución asintótica. Otro, inesperado, resultado es que la perturbación puede ser tal que elimine la interacción entre solitones.

# *Agradecimientos*

Gracias a mis padres por darme vida y cultura.

A María Isabel por su amor y apoyo incondicional.

Al Dr. Georgii Omel'yanov por su amistad y paciente asesoría.

A los sinodales, Drs. Anton Lipovka K., Felipe Ramos M., Sergio Barraza F.

Al DIFUS. A CONACYT. A la Universidad de Sonora.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La ecuación KdV: de ondas en el agua a ondas en un plasma . . . . .	1
1.2. La ecuación KdV generalizada . . . . .	2
1.3. Los métodos asintóticos para soluciones de tipo solitón . . . . .	3
1.4. La ecuación derivada por Schamel . . . . .	4
<b>2. Derivación de la ecuación</b>	<b>6</b>
2.1. Ecuación de estado electrónica . . . . .	10
2.2. La ecuación GKdV . . . . .	12
<b>3. Análisis de Estabilidad Asintótica</b>	<b>14</b>
3.1. Perturbación de la ecuación . . . . .	14
3.2. Notación . . . . .	16
3.3. Solución asintótica . . . . .	17
3.4. Análisis y observaciones . . . . .	27
<b>4. Esquema Numérico</b>	<b>29</b>
4.1. Diferencias finitas . . . . .	29
4.2. Esquema no-lineal preliminar . . . . .	30
4.3. Linealización . . . . .	31
4.4. Algoritmo de solución . . . . .	32
<b>5. Simulación Numérica</b>	<b>35</b>
5.1. Simulación de la ec. GKdV homogénea . . . . .	35
5.2. Simulación de la ec. GKdV perturbada . . . . .	37
5.2.1. $\alpha = \alpha^p$ . . . . .	38
5.2.2. $\alpha > \alpha^p$ . . . . .	39
5.2.3. $0 < \alpha < \alpha^p$ . . . . .	39
5.2.4. $\alpha \leq 0$ . . . . .	40

---

5.2.5. Perturbación pequeña . . . . .	41
<b>6. Resultados y Conclusiones</b>	<b>43</b>
6.1. Estabilidad de la onda solitaria . . . . .	43
6.2. Futuras direcciones de investigación . . . . .	45
<b>A. Código</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Índice de figuras

2.1. Espacio fase de una partícula confinada . . . . .	8
3.1. Amplitud de la onda solitaria distorsionada . . . . .	22
3.2. Fase del frente de onda . . . . .	23
3.3. La corrección sobre el frente de onda . . . . .	25
3.4. Las características del problema para la amplitud de la corrección . . . . .	27
5.1. Un solitón de la ec. GKdV homogénea . . . . .	36
5.2. Un solitón de la ec. GKdV perturbada con $\alpha = \alpha^p$ . . . . .	37
5.3. Un solitón de la ec. GKdV perturbada con $\alpha > \alpha^p$ . . . . .	38
5.4. Un solitón de la ec. GKdV perturbada con $0 < \alpha < \alpha^p$ . . . . .	39
5.5. Un solitón de la ec. GKdV perturbada con $\alpha = 0$ . . . . .	40
5.6. Un solitón de la ec. GKdV perturbada con $\alpha < 0$ . . . . .	41
5.7. Un solitón de la ec. GKdV perturbada con $\alpha = \alpha^p$ y constante pequeña del lado derecho . . . . .	42
6.1. Un solitón de la ec. GKdV perturbada con amplitud pequeña . . . . .	45
6.2. Interacción a detalle de dos solitones de la ec. GKdV homogénea . . . . .	46
6.3. Dos solitones de la ec. GKdV homogénea colisionan . . . . .	46
6.4. Imposibilidad de infracción de solitones para la ec. GKdV perturbada . . . . .	47

*Para María Isabel. . .*

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. La ecuación KdV: de ondas en el agua a ondas en un plasma

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) es una ecuación diferencial parcial (EDP) integrable no-lineal de tercer orden obtenida originalmente en 1895 como modelo hidrodinámico de ondas ‘largas’ sobre la superficie del agua en un canal rectangular de poca profundidad.[1] En su forma adimensional la ecuación es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1.1)$$

donde  $\varepsilon$  es una constante que caracteriza la dispersión del medio y  $u(x, t)$  representa el desplazamiento vertical local de la superficie del agua respecto a la posición de equilibrio. En adelante se usa la forma adimensional de las ecuaciones.

Las soluciones encontradas por Korteweg y de Vries representan ondas ‘cnoidales’ (llamadas así por estar descritas en términos de la función elíptica de Jacobi  $Cn$ ) que tienden en el límite en que la longitud de onda tiende a infinito a ondas solitarias. Una onda solitaria es una estructura localizada que se desliza preservando su forma.

Durante más de 50 años la ecuación (1.1) fue considerada no más que una curiosidad. La publicación del artículo paradigmático de Zabusky y Kruskal en 1965 cambió la situación haciendo de la ecuación KdV un modelo fundamental de las ciencias no-lineales. El resultado principal es que las ondas solitarias que admite como solución la ecuación KdV interactúan entre ellas de una manera muy similar a la colisión elástica de partículas; esta similitud llevó a los autores a formar el concepto de solitón. Por primera vez se observaba “un proceso físico no-lineal en el cual pulsos localizados interactuantes no se

dispersan irreversiblemente.” [2] Después, con el descubrimiento del método de dispersión inversa (*Inverse Scattering Method* en inglés) para la ecuación KdV, ésta se convertiría en piedra angular de la teoría de los sistemas integrables ([3], ver también [4] y referencias contenidas.)

Con el renovado interés en la ecuación KdV se encontró que también aparece en la descripción de ondas acústicas propagándose en un líquido con burbujas de gas [5] y en la propagación de ondas acústicas de iones en un plasma unidimensional.[6] En el caso último, la solución  $u(x, t)$  representa el potencial eléctrico (normalizado) y  $\varepsilon$  es una constante de dispersión que contiene varios parámetros del plasma.

La aparición de esta ecuación en varios contextos físicos no debiera extrañar ya que la ecuación KdV es la ecuación diferencial parcial más sencilla que incluye tanto los efectos de no-linealidad como de dispersión.

La ecuación KdV (1.1) describe el comportamiento asintótico unidimensional de ondas débilmente dispersivas con amplitud pequeña pero finita. Ejemplos de la aplicabilidad de la ‘teoría KdV’ en la física son abundantes. El punto principal de la teoría es que el efecto no-lineal de inclinamiento representado por el segundo término en (1.1) es compensado por la dispersión del medio (el tercer término de la ecuación) y no por disipación como en la dinámica de gases ordinaria donde la ecuación de Burgers puede derivarse. La ecuación KdV, por lo tanto, es incapaz de describir ondas de choque. Sin embargo, rinde como descripción del comportamiento asintótico de los trenes de ondas no-estacionarios de baja amplitud que se desarrollan si el número de Mach de una perturbación (producida por ejemplo por un pistón) se encuentra debajo del número de Mach crítico inferior.

En el caso de ondas acústicas de iones, la omisión de la disipación significa iones fríos. Los electrones, por otra parte, se asume que están en un estado de cuasi-equilibrio con la onda iónica de baja frecuencia, una premisa que no debe ser demasiado severa teniendo en cuenta la cercanía al equilibrio electrostático. Una segunda premisa para los electrones es que se comportan isotérmicamente mientras pasa la onda. Esta suposición, como veremos, no puede sostenerse si deseamos describir situaciones en las cuales los electrones son en verdad libres de colisiones.

## 1.2. La ecuación KdV generalizada

Tras la publicación de Zabusky y Kruskal y el descubrimiento del método de dispersión inversa se obtuvieron numerosos resultados importantes para la teoría de los sistemas integrables y en general para la teoría de las EDPs no-lineales. Una vez conocidas las

propiedades de la ecuación KdV surgió la idea de generalizar la ecuación cambiando la potencia que aparece en el término no-lineal por una potencia  $m$ , es decir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^m + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad m \geq 2; \quad (1.2)$$

ésta es la ecuación GKdV en su forma adimensional. La existencia y unicidad de la solución para el problema de Cauchy para la ecuación (1.2) ha sido probada en [7].

La intuición sugería que esta ecuación debía ser integrable. Sorpresivamente, esta ecuación solo es integrable para el caso  $m = 2, 3$ . El caso  $m = 3$  (llamado ecuación MKdV) también aparece en el contexto de la física de plasmas, obtenido para ondas acústicas en un plasma ‘polvoso’ (*dusty*.) [8] El caso  $m = 4$  es estable y el caso  $m = 6$  parece ser absolutamente inestable, mientras que el caso  $m = 5$  es condicionalmente estable (ver [9, 10].)

Las propiedades de la interacción de ondas solitarias para esta ecuación generalizada en sus casos no-integrables han sido estudiadas en [11] (ver también [12],) donde se ha demostrado la efectividad del método de asintóticas débiles para estudiar no sólo la interacción entre las ondas sino también la estabilidad asintótica de estas estructuras.

### 1.3. Los métodos asintóticos para soluciones de tipo solitón

Para sistemas esencialmente no-integrables en general es imposible construir tanto soluciones analíticas (clásicas o débiles) como soluciones asintóticas en el sentido clásico. Sin embargo, si el parámetro  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño es posible construir una solución asintótica. Este método para ondas distorsionadas (ver [13]) toma en cuenta el hecho de que solitones que son suaves para  $\varepsilon > 0$  se vuelven no-suaves en el límite en que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De modo que es posible tratar tales soluciones como un mapeo  $\mathcal{C}^\infty(0, T; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^1))$  para  $\varepsilon = \text{const.} > 0$  y solo como  $\mathcal{C}(0, T; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^1))$  uniformemente en  $\varepsilon \geq 0$ . De manera congruente, el residuo debe ser pequeño en el sentido débil.

En cuanto a la ecuación GKdV (1.2) hay que notar que hay un obstáculo para aplicar la construcción estándar de  $\mathcal{D}'$ .<sup>1</sup> De hecho, en el sentido de  $\mathcal{D}'$ , el término de dispersión de la ecuación (1.2) está subordinado a los otros términos. Esto significa que (1.2) coincide mod  $O(\varepsilon^2)$  en el sentido de  $\mathcal{D}'$  con la EDP de primer orden. Obviamente esto impide la construcción asintótica correcta para el problema de Cauchy. Este obstáculo ha sido

<sup>1</sup>denotamos con  $\mathcal{D}'$  el espacio de distribuciones de Schwartz.

superado con la construcción de una nueva definición de soluciones asintóticas para ecuaciones tipo GKdV (ver [11] y referencias contenidas.)

El método de asintóticas débiles (*weak asymptotics method*) para EDPs no-lineales, desarrollado por Danilov, Omel'yanov y Shelkovich (ver [11, 12, 14] y referencias contenidas,) ha sido usado con éxito para estudiar la propagación y la interacción de solitones de la familia de ecuaciones generalizadas de Korteweg-de Vries con el parámetro de dispersión  $\varepsilon$  pequeño.[11] Es conocida la importancia de esta familia de ecuaciones en la física matemática, siendo su miembro más famoso la ecuación KdV original derivada por Korteweg y de Vries en el estudio de ondas largas en el agua de un canal poco profundo. Es conocido también que contrario a la intuición, la ecuación generalizada GKdV solo es integrable en dos casos,  $m = 2, 3$ . El poder que han mostrado los métodos asintóticos para estudiar la propagación de solitones de los miembros no-integrables de la ecuación GKdV ( $m = 4, 5, 6$ ) nos ha motivado a aplicarlo para estudiar la estabilidad asintótica ante perturbaciones no-lineales de la onda solitaria que aparece en un caso de la familia GKdV obtenido por Schamel en el estudio de ondas acústicas de iones en un plasma sin magnetización de iones fríos, el caso en que el término no-lineal es  $(u^{3/2})_x$ . Para tal caso, hasta donde el autor tiene conocimiento, no ha sido estudiado el problema de estabilidad.

## 1.4. La ecuación derivada por Schamel

Schamel, de manera similar a la derivación de [6] encontró que bajo las condiciones de no-isotermalidad de los electrones en el plasma ([15]) la ecuación que describe las ondas acústicas de iones es la ecuación GKdV en un caso ‘nuevo’:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1.3)$$

De aquí en adelante nos referimos a esta ecuación indistintamente como ecuación de Schamel o ecuación GKdV. Por supuesto, esta ecuación no es integrable. Difiere de la ecuación KdV en que tiene una no-linealidad más fuerte que incluso es una función no-suave. Schamel encontró una solución analítica para el caso homogéneo (1.3) que describe una onda solitaria que se desplaza a la derecha con un perfil de la forma de  $\text{sech}^4$ . Como la ecuación no es integrable, soluciones analíticas de más de una onda solitaria son desconocidas.

El objeto de esta tesis es estudiar la estabilidad de una onda solitaria ante una perturbación de la ecuación (1.3) y qué efecto tiene la perturbación sobre la propagación de la onda solitaria distorsionada. Con ‘onda solitaria distorsionada’ nos referimos a la onda

solitaria con la amplitud y la velocidad que dependen del tiempo y la deformación de la estructura de la onda causada por la perturbación.

El análisis emprendido en el capítulo 3 emplea el método para construir la solución asintótica de tipo solitón al problema de Cauchy para ecuaciones de tipo GKdV con dispersión pequeña desarrollado por Maslov, Omel'yanov (ver [16].) El método será adaptado según sea necesario; en particular, ya que tenemos en el término no-lineal una función no-suave que pertenece solo a  $C^1$ , solo podemos construir la asintótica con precisión  $o(\varepsilon)$ .

Más adelante, construimos un esquema de diferencias finitas para la solución numérica de la ecuación GKdV. Esto nos sirve para comparar con los resultados obtenidos de la solución asintótica. El hecho de que la ecuación homogénea (1.3) tiene solución analítica de una onda solitaria será importante para revisar la precisión del método numérico antes de emplearlo con la ecuación perturbada.

Por completez de esta pequeña introducción referimos al lector interesado a resultados experimentales [17, 18] sobre la propagación de ondas solitarias en plasmas débilmente no-lineales.

## Capítulo 2

# Derivación de la ecuación

Los plasmas están caracterizados por la presencia de partículas cargadas, aunque como un todo sean eléctricamente cuasi-neutros. Se estima que hasta un 99 por ciento de la materia bariónica del universo es plasma.

En un plasma las fuerzas de Coulomb de largo alcance ejercidas sobre las partículas por las muchísimas lejanas son un factor importante en la determinación de sus propiedades estadísticas, usualmente mucho más importante que la interacción con partículas cercanas. Debido a esto los fenómenos colectivos, que son el objeto de estudio principal de la física de plasmas, tienen una gran influencia en el comportamiento del sistema.

El interior de las estrellas y planetas gaseosos, capas de nuestra atmósfera como la ionósfera y la magnetósfera, las descargas eléctricas producidas por rayos, grandes experimentos como aceleradores de partículas y tokamaks, una pequeña flama; son ejemplos comunes de sistemas estudiados por la física de plasmas. Por supuesto una gama tan amplia de condiciones físicas requiere muchas variadas descripciones y elegir la apropiada para cada circunstancia es en sí mismo un problema importante y no-trivial en la física de plasmas.

Los primeros avances teóricos se realizaron desde la perspectiva macroscópica del plasma, a través de una descripción hidrodinámica que ignora la distribución de velocidades de las partículas en una posición dada. Sin embargo, pronto se hizo evidente la existencia de un espectro interesante de fenómenos que solo pueden ser descritos si se toma en cuenta la distribución de velocidades. Entonces fue desarrollada una teoría cinética por Vlasov ([19]) y Landau ([20]) basada en el sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson o más generalmente el de Vlasov-Maxwell que introdujo una rica variedad de ondas a la disciplina. Aunque inicialmente la teoría estaba basada en una linealización de las ecuaciones, después fue suplementada con investigaciones sobre las resonancias entre

ondas y partículas y extensiones a escenarios de turbulencia fuerte o débil que trajeron a colación la no-linealidad.

La relevancia de los modelos cinéticos no-lineales es además enfatizada por una de las aplicaciones prácticas más desafiantes de la física de plasmas moderna: desarrollar un reactor de fusión nuclear. Con el fin de mantener las altas temperaturas y densidades necesarias al interior de tal máquina, la importancia de una comprensión profunda de los procesos de transporte e inestabilidades impulsadas por corrientes y gradientes, que son los principales obstáculos para alargar los tiempos de confinamiento, difícilmente puede ser exagerada. Sin embargo, como al modelo fluido conciernen solamente cantidades promedio en el espacio de velocidades, éste no es capaz de describir apropiadamente fenomenología como las inestabilidades o amortiguamiento. El modelo cinético, del otro lado, provee una descripción acertada de los procesos de intercambio de energía entre partículas y ondas, los cuales se ha demostrado que son importantes especialmente en plasmas sin colisiones y que juegan un papel importante en el calentamiento del plasma por ondas y en los mecanismos de inestabilidades.

En los modelos cinéticos, muchos de los estudios sobre fenómenos de transporte están basados en una linealización de las ecuaciones. Entre los fenómenos observados que esencialmente escapan de un tratamiento lineal están los procesos de reconexión magnética encontrados en la dinámica solar y en la cola de nuestra magnetósfera. Pero también se escapan fenomenologías y estructuras puramente electrostáticas tales como dobles capas (*double layers*) y vortices en el espacio fase que son comunmente observadas en las capas exteriores de nuestra atmósfera: la ionósfera y la magnetósfera. El fenómeno no-lineal del confinamiento de partículas (*particle trapping*), en particular, es el causante de que en la descripción de las ondas no-lineales en un plasma en que los electrones no se comportan isotérmicamente mientras pasa la onda se aparezca la ecuación GKdV de Schamel en vez de la más conocida KdV encontrada por [6].

En el presente trabajo investigamos la estabilidad asintótica de la onda solitaria ‘no-isotérmica’ encontrada por Schamel (ver [15]) que es solución de la ecuación generalizada de Korteweg-de Vries. Esta ecuación se aparece (en lugar de la ecuación KdV) debido al efecto que tienen las partículas confinadas electrostáticamente en el plasma. El concepto de confinamiento de partículas en plasmas apareció cuando la interacción resonante entre ondas y partículas fue tratada rigurosamente y no-linealmente. La interacción resonante entre ondas y partículas se refiere a las partículas en regiones del espacio de velocidades en las cuales las partículas se mueven con la misma velocidad que la onda. El confinamiento electrostático de partículas significa que algunas de las partículas del plasma están confinadas a una región finita del espacio fase describiendo trayectorias

cerradas.[21] La figura (2.1) muestra un espacio fase esquemático que corresponde a este tipo de estado en un plasma unidimensional.

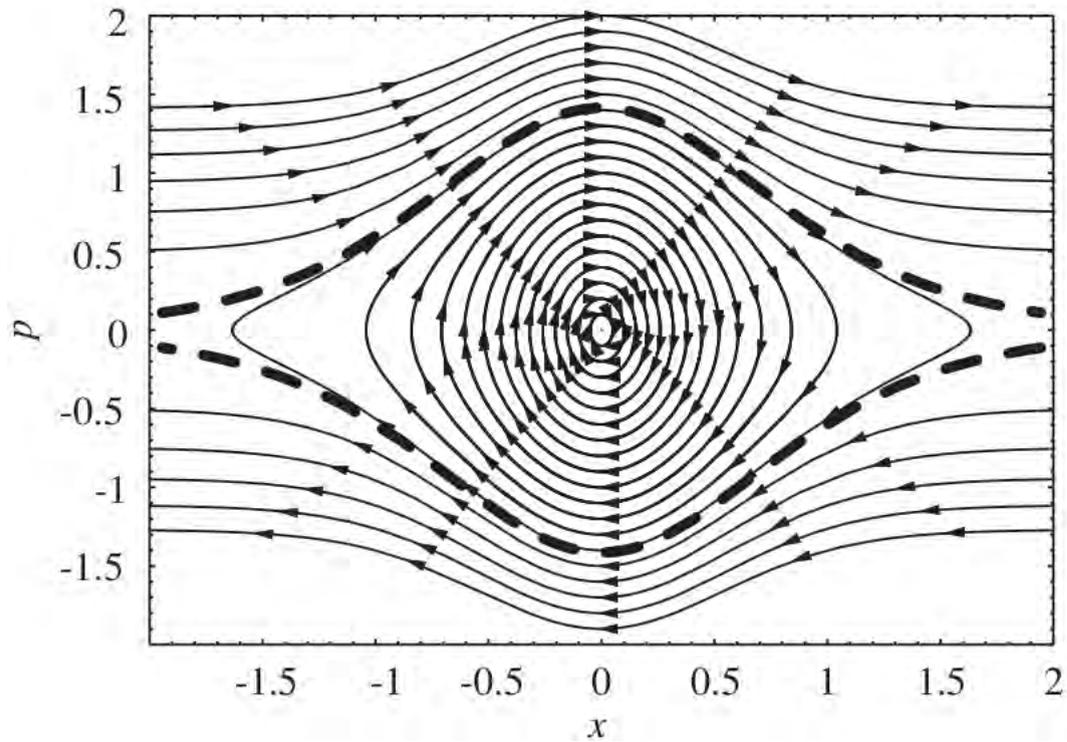


FIG. 2.1: Esquemización de la situación en el espacio fase de las partículas confinadas electrostáticamente. Tomada de [21].

Tratamos con un plasma unidimensional globalmente cuasi-neutro de dos especies formado por iones con carga  $+e$  y electrones. Asumimos también que el plasma está lo suficientemente caliente y diluido tal que el enfoque cinético debe ser usado y debemos hacer de lado el enfoque hidrodinámico. También despreciamos la posibilidad de que las partículas colisionen. Esto nos lleva a un par de ecuaciones de Vlasov para la evolución de las funciones de distribución de los electrones y los iones,  $f_e$  y  $f_i$  respectivamente:

$$\partial_t f_e + v \partial_x f_e + \partial_x \Phi \partial_v f_e = 0 \quad (2.1)$$

$$\mu \partial_t f_i + u \partial_x f_i - \theta \partial_x \Phi \partial_u f_i = 0. \quad (2.2)$$

En estas ecuaciones las velocidades de los electrones (iones) están normalizadas por las velocidades térmicas de los electrones (iones)  $v_{\text{tér}} = \sqrt{(k_B T_e / m_e)}$  ( $u_{\text{tér}} = \sqrt{(k_B T_i / m_i)}$ ) y las longitudes están normalizadas por la longitud de Debye electrónica  $\lambda_D = \sqrt{(\epsilon_0 k_B T_e / n_0 e^2)}$  con  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $\epsilon_0$  la permitividad del espacio vacío,  $n_0$  la densidad iónica del plasma en su estado de reposo (equilibrio.) Las cargas y masas están adimensionalizadas por la carga del electron,  $e$  y la masa,  $m_e$ . El

cociente de la temperatura entre las dos especies se denota por  $\theta = T_e/T_i$ . Finalmente,  $\mu$  representa el cociente entre las escalas temporales típicas de iones y electrones,  $\mu = \sqrt{\theta/\delta}$  con  $\delta$  el cociente de las masas  $\delta = m_i/m_e$ .

Pero los electrones y los iones están afectados por el campo eléctrico dentro del plasma. En un sistema unidimensional, y usando las normalizaciones, la ecuación de Poisson se reduce a

$$\partial_x^2 \Phi(x, t) = n_e - n_i = \int f_e(x, v, t) dv - \int f_i(x, u, t) du. \quad (2.3)$$

El sistema de ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) representa un tratamiento completamente cinético de ambas especies del plasma, conocido como sistema de Vlasov-Poisson.

Antes de entrar en detalles de la derivación de la ecuación GKdV para ondas acústicas de iones revisaremos algunos sistemas en los que la descripción de Vlasov-Poisson es válida. Las premisas sobre las que descansa el sistema de ecuaciones son

- *Unidimensionalidad.* Se asume que solo una dimensión espacial es relevante en la descripción de nuestro sistema. El ejemplo de una situación que garantiza la validez de esta premisa es que exista dentro del plasma un campo magnético homogéneo y muy intenso. Bajo esta condición las partículas giran alrededor de las líneas de campo magnético con un radio de Larmor muy pequeño y podemos hacer la aproximación en la que las partículas se reemplazan por pseudo-partículas localizadas en el centro de las órbitas rotantes.
- *Colisiones despreciables.* Al despreciar el efecto de las colisiones entre las partículas del plasma asumimos que el plasma es suficientemente caliente y diluido. La validez de esta premisa se puede revisar *via* el parámetro del plasma, que mide el recíproco del número promedio de partículas dentro de una esfera de Debye,  $g = (\frac{4}{3}\pi n \lambda_D^3)^{-1}$ . La aproximación libre de colisiones es válida en tanto  $g \ll 1$ .

Estas condiciones son comunes en la magnetósfera, pero son también relevantes en laboratorios y en maquinaria altamente tecnológica como máquinas de fusión (como tokamaks) y aceleradores de partículas.

La ecuación GKdV (1.3) (en vez de KdV) es derivada a consecuencia del efecto no-lineal que tienen las partículas confinadas electrostáticamente y también la desviación del comportamiento de los electrones de un comportamiento isotérmico. En la siguiente sección especificaremos una ecuación de estado típica para los electrones. Después, derivamos la ecuación GKdV a partir de las ecuaciones hidrodinámicas del plasma.

## 2.1. Ecuación de estado electrónica

Al derivar (1.1) para ondas acústicas de iones, la distribución de Maxwell-Boltzmann para la densidad de electrones  $n_e = e^\phi$  es asumida (donde  $\phi$  es el potencial eléctrico,) lo cual implica isothermalidad si la inercia de los electrones es despreciable. Esta expresión se obtiene asumiendo la función de distribución para los electrones  $f_e \propto \exp\{-\left(\frac{1}{2}v^2 - \phi\right)\}$  (donde la velocidad de los electrones  $v$  está normalizada por la velocidad térmica de los electrones,) y está motivada por la consideración de que un electrón térmico se mueve con una rapidez mucho mayor que la de una onda acústica de iones. Por lo tanto un electrón térmico no sería afectado de forma apreciable por la onda así que el comportamiento isotérmico de los electrones parece ser razonable. Evidencias de la distribución de Maxwell-Boltzmann han sido presentadas en experimentos; sin embargo, condiciones adicionales experimentales son necesarias para mantener la distribución de Maxwell-Boltzmann (por ejemplo, permitir a los electrones chocar con las paredes para mantener la isothermalidad.)

Esta motivación, sin embargo, no toma en cuenta las partículas resonantes, las cuales interactúan fuertemente con la onda acústica y por lo tanto no pueden tratarse sobre las mismas bases que los electrones libres. Efectivamente, si la acción de fronteras externas es removida, de manera tal que el comportamiento sin colisiones se verifica, experimentos numéricos tanto como experimentos en laboratorios indican que distribuciones electrónicas con forma de *meseta* son típicas.

Luego, dos funciones de distribución diferentes para los electrones (libres y confinados) deben usarse para describir en una manera general asintóticamente el estado cuasi-estacionario. En [22], funciones de distribución de Maxwell-Boltzmann para los electrones (una distribución de Maxwell-Boltzmann desplazada con temperatura constante  $T_{ef}$  para los electrones libres y una sin desplazamiento con una temperatura constante distinta  $T_{et}$  para los electrones confinados) han sido usadas, asumiendo continuidad, para derivar la densidad electrónica

$$n_e(\phi) = \tilde{K} \left\{ \exp \phi \operatorname{erfc} \phi^{\frac{1}{2}} + |\beta|^{-\frac{1}{2}} \left[ \exp(\beta\phi) \operatorname{erfc} (\beta\phi)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad \beta \geq 0, \quad (2.4)$$

$$n_e(\phi) = \tilde{K} \left\{ \exp \phi \operatorname{erfc} \phi^{\frac{1}{2}} + |\beta|^{-\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} W \left( (-\beta\phi)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right\}, \quad \beta < 0. \quad (2.5)$$

$n_e(\phi)$ , al igual que las cantidades macroscópicas más adelante, está normalizada por su valor ‘corriente arriba’ (*upstream*, el valor en el ‘salto’ del shock electrostático.) El potencial eléctrico está normalizado por  $k_B T_{et}/e$  donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Al derivar (2.4), (2.5) se asumió un potencial mínimo  $\phi_{min} = 0$  constante, de modo que  $\phi \geq 0$ . El caso  $\beta < 0$  representa una temperatura negativa de los electrones confinados;

esto es posible porque el (sub)sistema de los electrones confinados tiene un límite superior de energía accesible, ya que como se ve en la figura (2.1) las partículas confinadas tienen un límite superior en el momento. Tal estado representa una despoblación de los electrones confinados.[21]

$$W(x) = \exp -x^2 \int_0^x \exp t^2 dt$$

es la función de Dawson. La constante  $\tilde{K}$  se especifica después. El parámetro  $\beta$  está definido por

$$\beta = T_{ef}/T_{et}, \quad (2.6)$$

y describe las variadas funciones de distribución de los electrones confinados, dando una meseta si  $\beta = 0$  y una caída (un montículo) si  $\beta < 0$  ( $\beta > 0$ .)

Debido a que despreciamos la inercia de los electrones, podemos obtener la presión electrónica. Suponiendo  $p_e = p_e(\phi)$  e integrando la ecuación de movimiento hidrodinámica obtenemos la *ecuación de estado* ([15])

$$p_e(\phi) = \tilde{K} \left\{ \exp \phi \operatorname{erfc} \phi^{\frac{1}{2}} + 2(1 - \beta^{-1}) \left( \frac{\phi}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\beta |\beta|^{\frac{1}{2}}} \left[ \exp (\beta \phi) \operatorname{erfc} (\beta \phi)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \beta \geq 0 \quad (2.7)$$

$$p_e(\phi) = \tilde{K} \left\{ \exp \phi \operatorname{erfc} \phi^{\frac{1}{2}} + 2(1 - \beta^{-1}) \left( \frac{\phi}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\beta |\beta|^{\frac{1}{2}}} \left[ \left( 2/\pi^{\frac{1}{2}} \right) W \left( (-\beta \phi)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right\}, \beta < 0. \quad (2.8)$$

Para pequeñas amplitudes ( $\phi \ll 1$ .) las ecuaciones (2.4), (2.5) resultan

$$n_e(\phi) = \tilde{K} \left( 1 + \phi - \frac{4}{3} b \phi^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \phi^2 + \dots \right), \quad (2.9)$$

con la constante  $b = (1 - \beta)/\pi^{\frac{1}{2}}$ . El tercer termino en (2.9) es la contribución de los electrones confinados a la densidad. La ecuación (2.9) muestra que una expansión en potencias enteras de  $\phi$  deja de ser válida en teorías de *shocks* electrostáticos si están involucradas funciones de distribución más generales. Por otra parte, funciones de distribución de este tipo con forma de meseta resultan en menores densidades y más altas temperaturas

$$t_e(\phi) \equiv p_e(\phi) n_e(\phi)^{-1} = 1 + \frac{4}{3} b \phi^{\frac{3}{2}} + O(b \phi^{\frac{5}{2}}). \quad (2.10)$$

## 2.2. La ecuación GKdV

Suponiendo iones fríos y los electrones que obedecen (2.9) (sea  $b$  constante,) tenemos el sistema

$$n_t + (nu)_x = 0, \quad (2.11)$$

$$u_t + uu_x = -\phi_x, \quad (2.12)$$

$$\phi_{xx} = n_e - n. \quad (2.13)$$

$n$  denota la densidad iónica y  $u$  denota la velocidad de flujo de los iones. De nuevo se usan cantidades adimensionales: la velocidad, longitud y tiempo normalizados por la velocidad del sónico de los iones  $\omega_{pi}\lambda_D$ , longitud de Debye  $\lambda_D$  y el inverso de la frecuencia iónica del plasma  $\omega_{pi}^{-1}$ . La ecuación (2.11) es la ecuación de continuidad, (2.12) es la ecuación de movimiento y (2.13) es la ecuación de Poisson. Completando el sistema imponemos las condiciones de frontera válidas en tanto  $\phi \rightarrow 0$ ,

$$n = 1, \quad (2.14)$$

$$n_e = 1 + \kappa\epsilon, \quad (2.15)$$

$$u = 0. \quad (2.16)$$

En (2.15) hemos fijado  $\tilde{K} = 1 + \kappa\epsilon$ , donde  $\epsilon$  representa la amplitud de la perturbación del medio con respecto a su valor de equilibrio y  $\kappa$  la dispersión. Introducir  $\kappa$  nos permite considerar ondas con diferentes longitudes de onda, con  $\kappa = 0$  para ondas solitarias. Sin embargo, como se puede demostrar fácilmente, el análisis siguiente exige que  $\kappa$  misma sea un parámetro pequeño (es decir,  $\kappa \leq O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ .) Esto expresa el hecho de que una ecuación de tipo KdV sólo puede obtenerse para ondas largas.

Para derivar una ecuación de tipo KdV a partir del sistema (2.11)-(2.13) se debe encontrar un marco de referencia adecuado en el cual el movimiento de la onda pueda ser descrito suavemente. Para encontrar este marco necesitamos conocer el grueso  $\Delta$  y velocidad no-lineal  $v_0$  de la onda, los cuales se pueden encontrar de la teoría en equilibrio utilizando funciones de distribución con forma de meseta para los electrones (ver [22].) Encontramos

$$\Delta \propto \epsilon^{\frac{1}{4}}, \quad v_0 - 1 \propto \epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Esto conduce inmediatamente a las siguientes coordenadas

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{4}}(x - t), \quad (2.17)$$

$$\tau = \epsilon^{\frac{3}{4}}t. \quad (2.18)$$

Expandiendo  $n$ ,  $u$  y  $\phi$  en potencias de  $\epsilon$ , incluyendo términos de orden  $\epsilon^{\frac{3}{2}}$ ,

$$n = 1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} n^{(2)} + \dots, \quad (2.19)$$

$$u = \epsilon u^{(1)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} u^{(2)} + \dots, \quad (2.20)$$

$$\phi = \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi^{(2)} + \dots \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

y, sustituyendo (2.17), (2.18), (2.19)-(2.21) y (2.9) en (2.11) y (2.12), obtenemos a primer orden, usando las condiciones de frontera (2.14)-(2.16),

$$n^{(1)} = u^{(1)} = \phi^{(1)}. \quad (2.23)$$

En el siguiente orden,  $O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ , dada  $b \gg O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$  se puede demostrar que esta cantidad satisface

$$\phi_{\tau}^{(1)} + b \left( \phi^{(1)} \right)^{\frac{1}{2}} \phi_{\xi}^{(1)} + \frac{1}{2} \phi_{\xi\xi\xi}^{(1)} = 0. \quad (2.24)$$

Regresando a las cantidades originales, tenemos

$$\phi_t + (1 - \beta \phi^{\frac{1}{2}}) \phi_x + \frac{1}{2} \phi_{xxx} = 0. \quad (2.25)$$

Esta es la ecuación deseada que reemplaza a la ecuación KdV para las situaciones en que funciones de distribución con forma de meseta están involucradas. Esta ecuación generalizada de Korteweg-de Vries exhibe una no-linealidad más fuerte, correspondiente a un ancho menor y velocidad mayor de la onda solitaria. Cabe mencionar que en el caso isotérmico estas cantidades se comportan como  $\Delta \propto \epsilon^{-\frac{1}{2}}$  y  $v_0 - 1 \propto \epsilon$ .

Si  $b = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ , el marco de referencia (2.17)-(2.18) deja de ser aplicable y debemos regresar al marco de referencia como el de [6], resultando en una ecuación en la que ambas no-linealidades  $b\phi^{\frac{1}{2}}\phi_x$  y  $\phi\phi_x$  aparecen simultáneamente. Para valores aun más pequeños de  $b$  ( $b \ll O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ ) la ecuación KdV original se verifica.

## Capítulo 3

# Análisis de Estabilidad Asintótica

### 3.1. Perturbación de la ecuación

En [15] Schamel derivó la ecuación diferencial parcial no-lineal (2.25) que rige la dinámica de ondas acústicas de iones en un plasma unidimensional de iones fríos bajo las condiciones de no-isotermalidad de los electrones. La obtenemos en su forma adimensional redefiniendo  $t := t + x$  en (2.25) y  $u = \frac{4}{9}\beta\phi$ , de esta forma la ecuación es:

$$u_t + (u^{\frac{3}{2}})_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+; \quad (3.1)$$

donde los subíndices denotan diferenciación parcial,  $\varepsilon^2 = \frac{81}{32}\beta^{-2}$  es un parámetro que caracteriza a los electrones confinados y  $u(x, t)$  representa la variación en la densidad (normalizada) iónica local respecto al estado de equilibrio. De hecho, según las ecuaciones (2.23) y (2.24), (3.1) también se puede interpretar como la ecuación para el potencial eléctrico local (normalizado por  $k_B T_{ef}$ ) o la velocidad del flujo de los iones.

Claramente el término no-lineal implica una operación de raíz cuadrada por lo que debiéramos tener una condición de tipo  $u \geq 0$ . Sin embargo, Schamel y también Pécseli [23] indican que tal restricción no tiene sentido físico si queremos estudiar las oscilaciones que aparecen en la parte ‘posterior’ del frente de onda, por lo que mientras escribimos la ecuación (3.1) en realidad estamos pensando en que el término no-lineal es  $(|u|^{\frac{3}{2}})_x$ .

Multiplicando la ecuación (3.1) por 1,  $u$ , y  $u^{3/2} + \varepsilon^2 u_{xx}$  y posteriormente integrando con respecto de  $x$  se obtienen respectivamente las siguientes leyes de conservación:

$$\frac{d}{dt} \int u \, dx = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int u^2 \, dx = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int (\varepsilon u_x)^2 \, dx - \frac{4}{5} \int u^{5/2} \, dx \right\} = 0. \quad (3.4)$$

La ecuación GKdV (3.1) derivada por Schamel tiene una solución que representa una onda solitaria que se desplaza a la derecha y preserva su forma:

$$u(x, t) = A \cosh^{-4} \left( \beta \left( \frac{x - vt}{\varepsilon} \right) \right); \quad (3.5)$$

con  $A = 20^2 \beta^4$  y  $v = 16\beta^2$  constantes. Es natural preguntarse por la estabilidad de tal onda solitaria.

En este capítulo se ataca el problema de la estabilidad asintótica de la onda solitaria haciendo una perturbación no-lineal a la ecuación (3.1) agregando al lado derecho  $f(u) = \mu(\alpha - u)u$ , es decir, estudiaremos la ecuación:

$$u_t + \left( u^{3/2} \right)_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = \mu(\alpha - u)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.6)$$

donde  $\alpha$  es una constante y se ha insertado el parámetro  $\mu \geq 0$  tal que cuando  $\mu = 0$  tenemos la ecuación (3.1) no perturbada.

El lado derecho de la ecuación (3.6) puede entenderse como una fuerza externa, como una corriente eléctrica, actuando sobre el sistema, ya que la ecuación homogénea (3.1) es en el fondo la ecuación de Newton de balance de fuerzas. La forma elegida para la perturbación, un polinomio de segundo grado, es suficientemente general para abordar el problema de la estabilidad asintótica de la onda ante perturbaciones no-lineales pequeñas.

Obtendremos la solución asintótica de la ecuación (3.6) para conocer la dinámica de la onda solitaria distorsionada por la perturbación. Este análisis está basado en el método descrito por [13, 16]. En la siguiente sección se introduce algo de notación necesaria para después abordar a detalle el método para construir soluciones asintóticas de tipo solitón hasta orden  $o(\varepsilon)$  para la ecuación (3.6).

### 3.2. Notación

A modo de simplificar la presentación es necesario introducir la notación para las clases de funciones a utilizarse.

Denótese con  $\mathcal{S}$  el conjunto de funciones infinitamente diferenciables  $f(\tau, x, t)$  tal que  $f$  misma y cada una de sus derivadas tiende a cero mientras  $\tau \rightarrow \pm\infty$  uniformemente en  $x, t$  más rápido que cualquier potencia de  $1/|\tau|$ . Como ejemplo de tal función se puede escoger  $f = A(x, t)/(\cosh \tau)^k$ ,  $k > 0$ , con  $A(x, t)$  arbitraria, acotada y suave, así como cualquier  $f = f(\tau)$  del espacio de Schwartz de funciones rápidamente decrecientes.

Denótese con  $\mathcal{H}$  el conjunto de funciones infinitamente diferenciables  $g(\tau, x, t)$  tal que  $\partial g(\tau, x, t)/\partial \tau \in \mathcal{S}$  uniformemente en  $x, t$ .

Es claro que mientras  $\tau \rightarrow \pm\infty$  cualquier función  $g \in \mathcal{H}$  converge exponencialmente a ‘constantes’ (en  $\tau$ ), que serán denotadas con  $g^\pm(x, t)$ , y en general  $g^+ \neq g^-$ . Como ejemplo de una función perteneciente a  $\mathcal{H}$  se puede elegir

$$g(\tau, x, t) = \frac{1}{2}(g^+(x, t) + g^-(x, t)) + \frac{1}{2}(g^+(x, t) - g^-(x, t)) \tanh \tau.$$

De aquí en adelante entiéndase por  $\tau$  la variable ‘rápida’  $S(x, t)/\varepsilon$  con una fase  $S(x, t)$  suave. Claramente, el comportamiento de  $f(\tau, x, t)$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow -\infty$ ) corresponde a la función  $f(S(x, t)/\varepsilon, x, t)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $S \geq c\varepsilon^{1-\delta}$  ( $S \leq -c\varepsilon^{1-\delta}$ ) con alguna  $c > 0$ ,  $\delta \in (0, 1)$ , es decir, fuera de un pequeño vecindario del conjunto de ceros de la fase  $S$ .

No es difícil demostrar que para cualesquiera funciones  $f(\tau, x, t) \in \mathcal{S}$ ,  $g(\tau, x, t) \in \mathcal{H}$  y cualquier función suave  $S(x, t)$  tal que  $\partial S/\partial x|_\Gamma \neq 0$ , donde  $\Gamma = \{(x, t), S(x, t) = 0\}$ , las siguientes propiedades se verifican:

$$f\left(\frac{S}{\varepsilon}, x, t\right) = f_1\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon \tilde{f}\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right), \quad (3.7a)$$

$$g\left(\frac{S}{\varepsilon}, x, t\right) = g_1\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, x, t\right) + \varepsilon \tilde{g}\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right); \quad (3.7b)$$

donde  $x = \varphi(t)$  es la ecuación del nivel cero de la fase  $S(x, t)$ ,

$$f_1\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t\right) = f\left(\frac{\partial S}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(t)} \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \varphi, t\right),$$

$$g_1\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, x, t\right) = g\left(\frac{\partial S}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(t)} \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, x, t\right),$$

y  $\tilde{f}(\tau, t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{g}(\tau, t, \varepsilon)$  son funciones de  $\mathcal{S}$  que dependen de manera regular de  $\varepsilon$ . La demostración de estas propiedades se puede encontrar en [13].

### 3.3. Solución asintótica

Procedemos ahora a construir la solución asintótica tipo solitón de la ecuación (3.6) con precisión  $o(\varepsilon)$ . Debido a las propiedades (3.7) esta solución puede escribirse sin pérdida de generalidad como

$$u(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + V_0\left(\frac{S}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon\left(u_1(x, t) + V_1\left(\frac{S}{\varepsilon}, x, t\right)\right), \quad (3.8)$$

donde  $S = x - \varphi(t)$ ,  $u_i(x, t) \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $V_0(\tau, t) \in \mathcal{S}$ ,  $V_1(\tau, x, t) \in \mathcal{H}$  son funciones por ser determinadas. La expansión regular

$$u_{\text{reg}}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t)$$

describe el ‘fondo suave’ sobre el cual la onda

$$u_{\text{sing}}(x, t, \varepsilon) = V_0\left(\frac{S}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon V_1\left(\frac{S}{\varepsilon}, x, t\right)$$

con variación rápida localizada se propaga.

La premisa de que  $V_0 \in \mathcal{S}$  nos remonta a soluciones de tipo solitón de la clase de soluciones con variación rápida localizada. En general, correcciones a  $V_0$  de orden superior no desaparecen en el exterior de un pequeño vecindario del frente de la onda; por tanto solo asumimos que  $V_1 \in \mathcal{H}$ . Más aun, en el exterior de un pequeño vecindario del frente de la onda (es decir, para  $\tau \rightarrow \pm\infty$ ) tenemos  $u_1 + V_1 \sim u_1(x, t) + V_1^\pm(x, t)$ . Como todas las funciones en (3.8) son arbitrarias, podemos redefinir  $u_1$  (por ejemplo, dejando  $u_1 \equiv u_1 + V_1^+$ ) de modo que podemos fijar uno de los valores límites  $V_1^+$  o  $V_1^-$  igual a cero. En definitiva, asumiremos que

$$V_1^+ = 0.$$

Nótese que los valores límite de la expansión (3.8) en el exterior de un pequeño vecindario del frente de onda,

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, t) + \varepsilon(u_1(x, t) + V_1^-(x, t)) & \text{para } x \leq \varphi(t) - c\varepsilon^{1-\delta_1}, \\ u &= u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) & \text{para } x \geq \varphi(t) + c\varepsilon^{1-\delta_1}, \quad \delta_1 \in (0, 1), \end{aligned}$$

pueden ser vistos como la expansión ‘exterior’ en el método de costuras de expansiones asintóticas (en inglés, *matching method*) y la expansión (3.8) para  $|x - \varphi(t)| \leq c\varepsilon^{1-\delta_2}$ ,  $1 > \delta_2 > \delta_1$  como la expansión ‘interior’. A diferencia del método de costuras, nuestra representación es válida uniformemente en ambos dominios ‘interior’ y ‘exterior’.

Como el objeto de esta investigación es estudiar el comportamiento de una onda solitaria bajo la perturbación de la ecuación, podemos por sencillez hacer el fondo suave sobre el cual la onda se propaga  $u_{\text{reg}} \equiv 0$  sin perder generalidad. El *ansatz* queda:

$$u(x, t, \varepsilon) = V_0 \left( \frac{S}{\varepsilon}, t \right) + \varepsilon V_1 \left( \frac{S}{\varepsilon}, x, t \right). \quad (3.9)$$

Ahora nos enfocamos en determinar los coeficientes de la expansión (3.9). Para esto sustituimos (3.9) en (3.6) y agrupamos los coeficientes de iguales potencias de  $\varepsilon$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V \left( \frac{x - \varphi}{\varepsilon}, x, t \right) &= \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \right) V(\tau, x, t) \Big|_{\tau=(x-\varphi)/\varepsilon}, \\ \frac{\partial}{\partial t} V \left( \frac{x - \varphi}{\varepsilon}, x, t \right) &= \left( -\frac{1}{\varepsilon} \varphi_t \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t} \right) V(\tau, x, t) \Big|_{\tau=(x-\varphi)/\varepsilon}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} V \left( \frac{x - \varphi}{\varepsilon}, x, t \right) &= \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + 3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^2 \partial x} + 3\varepsilon \frac{\partial^3}{\partial \tau \partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) V(\tau, x, t) \Big|_{\tau=(x-\varphi)/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Luego, al término no-lineal le aplicamos la fórmula de Taylor con el residuo en la forma de Peano alrededor de  $V_0$ :

$$(V_0 + \varepsilon V_1)^{\frac{3}{2}} = V_0^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \varepsilon \sqrt{V_0} V_1 + o(\varepsilon). \quad (3.10)$$

Entonces, obtenemos la relación

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{\varepsilon} \left\{ V_{0\tau\tau\tau} + (V_0^{\frac{3}{2}})_{\tau} - \varphi_t V_{0\tau} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ V_{1\tau\tau\tau} + \frac{3}{2} (\sqrt{V_0} V_1)_{\tau} - \varphi_t V_{1\tau} + f_1 \right\} \right] \Big|_{\tau=(x-\varphi)/\varepsilon} \\ &= o(1). \quad (3.11) \end{aligned}$$

Aquí se denota con  $f_1$  a

$$f_1 = V_{0t} - \mu \alpha V_0 + \mu V_0^2.$$

Más aun,  $V_{\tau} = \frac{\partial V(\tau, x, t)}{\partial \tau}$ ,  $V_x = \frac{\partial V(\tau, x, t)}{\partial x}$ ,  $V_t = \frac{\partial V(\tau, x, t)}{\partial t}$ , y la diferenciación se lleva a cabo como si  $\tau, x$  y  $t$  fueran variables independientes.

Nótese que el principal obstáculo para construir la solución asintótica hasta un orden arbitrario de aproximación es que el término no-lineal de nuestra ecuación (3.6) es una función que pertenece solamente a la clase  $\mathcal{C}^1$  por lo que en la expansión según la fórmula de Taylor (3.10) no es posible incluir términos con mayor precisión que  $o(\varepsilon)$ .

Ahora bien, es claro que la relación (3.11) es válida para  $\varepsilon \rightarrow 0$  si la expresión encerrada en los primeros paréntesis es igual a cero. Esto conduce a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + V_0^{\frac{3}{2}} - \varphi_t V_0 \right\} = 0.$$

Integrando obtenemos

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + V_0^{\frac{3}{2}} - \varphi_t V_0 = 0, \quad (3.12)$$

ya que la ‘constante’ de integración es igual a cero debido a que  $V_0 \in \mathcal{S}$ . Multiplicando por  $V_{0\tau}$  y posteriormente integrando se obtiene

$$\left( \frac{dV_0}{d\tau} \right)^2 + \frac{4}{5} V_0^{5/2} - \varphi_t V_0^2 = 0,$$

que se puede reescribir como

$$\frac{dV_0}{\sqrt{\varphi_t V_0^2 - \frac{4}{5} V_0^{5/2}}} = d\tau. \quad (3.13)$$

Para integrar la ecuación (3.13) hay que hacer el cambio de variables  $\eta = \sqrt{V_0}$  seguido de  $\eta' = \sqrt{\eta}$  para obtener una integral de la forma  $\int \frac{d\eta'}{\eta' \sqrt{1-\eta'^2}}$  la cual tiene solución en las tablas de integrales [24]. En suma, la solución de (3.12) es

$$V_0(\tau, t) = A \cosh^{-4}(\beta(\tau + \varphi_1)) \in \mathcal{S}, \quad (3.14)$$

donde  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$  es una ‘constante’ arbitraria,  $A = 20^2 \beta^4$  y la amplitud  $A = A(t) > 0$  tiene la relación con la velocidad de la onda  $\varphi_t$  dada por la ecuación

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4}{5} \sqrt{A}; \quad (3.15)$$

a esta ecuación se le llama ecuación de tipo Hugoniot por la similitud que tiene con las ‘condiciones de salto’ de Rankine-Hugoniot que aparecen en la teoría de ondas de choque en la dinámica de gases; como se ve en (3.15), la relación entre la amplitud y la velocidad no depende de  $\varepsilon$  por lo que en el límite en que  $\varepsilon \rightarrow 0$  a pesar de que el solitón tiende a una ‘función’ discontinua (una ‘función’  $\varepsilon - \delta$  (ver [11])) la relación (3.15) se preserva.

Ahora volvemos a la ecuación (3.11), nótese que todos los términos contenidos en los segundos paréntesis pertenecen a  $\mathcal{S}$  y podemos expandirlos en serie de Taylor alrededor de  $x = \varphi(t)$ . Tomando en cuenta (3.12) y (3.15) transformamos (3.11) a la forma siguiente:

$$\left[ \check{V}_{1\tau\tau\tau} + \frac{3}{2}(\sqrt{V_0}\check{V}_1)_\tau - \frac{4}{5}\sqrt{A}\check{V}_{1\tau} + \check{f}_1 \right] \Big|_{\tau=(x-\varphi)/\varepsilon} = o(1). \quad (3.16)$$

En adelante por el resto de este capítulo entiéndase por  $\check{g}$

$$\check{g} = g(\tau, x, t)|_{x=\varphi(t)},$$

y por

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{3}{2}\sqrt{V_0} - \frac{4}{5}\sqrt{A} \quad (3.17)$$

la variación del operador en (3.12).

Ahora obtenemos de (3.16) la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L\check{V}_1 = -\check{f}_1.$$

Claramente  $V_1 \in \mathcal{H}$ ,  $V_1^+ = 0$  implica  $\check{V}_1 \in \mathcal{H}$ ,  $\check{V}_1^+ = 0$ , por lo que integramos de  $\tau$  a  $\infty$  y obtenemos

$$L\check{V}_1 = \check{F}_1, \quad (3.18)$$

con

$$\check{F}_1 = \int_{\tau}^{\infty} \check{f}_1 d\tau'. \quad (3.19)$$

Ahora bien, es sencillo establecer que  $v_1 = V_{0\tau}$  es una solución particular de la ecuación homogénea  $Lv = 0$ , mientras que una segunda solución particular puede ser calculada por fórmulas estándar como las encontradas en [25, 26]. Una vez que se han encontrado dos elementos del núcleo de la ecuación homogénea  $Lv = 0$  correspondiente al problema (3.18) las fórmulas permiten calcular la solución del problema no-homogéneo. Ilustraremos más detalladamente estas fórmulas, que pueden ser consultadas en [25], en la siguiente digresión.

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y no-homogénea tiene la forma

$$\bar{f}_2(x)y_{xx} + \bar{f}_1(x)y_x + \bar{f}_0(x)y = \bar{g}(x). \quad (3.20)$$

La solución general de (3.20) es la suma de la solución general del problema homogéneo correspondiente ( $\bar{g} \equiv 0$ ) y cualquier solución particular del problema no-homogéneo. Sean  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$  dos elementos del núcleo del problema homogéneo, entonces

la solución general de la ecuación (3.20) está dada por la fórmula

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_2 \int y_1 \frac{\bar{g}}{f_2} \frac{dx}{W}, \quad (3.21)$$

donde  $W = y_1(y_2)_x - y_2(y_1)_x$  es el determinante Wronskiano y el último término del lado derecho es una solución particular del problema no-homogéneo. Ahora bien, dada una solución particular no trivial  $y_1 = y_1(x)$  de la ecuación (3.20) con  $\bar{g} \equiv 0$ , una segunda solución particular  $y_2 = y_2(x)$  se puede calcular a partir de la fórmula:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\bar{F}}}{y_1^2} dx, \quad \text{donde } \bar{F} = \int \frac{\bar{f}_1}{f_2} dx, \quad W = e^{-\bar{F}}. \quad (3.22)$$

De esta manera, usando (3.22) podemos calcular un segundo elemento del núcleo del problema homogéneo para después, usando (3.21) calcular la solución general del problema no-homogéneo (3.20). Hasta aquí esta pequeña digresión.

En (3.18), recordando (3.17), identificamos los coeficientes  $\bar{f}_2 \equiv 1$ ,  $\bar{f}_1 \equiv 0$ ,  $\bar{f}_0 \equiv \frac{3}{2}\sqrt{V_0} - \frac{4}{5}\sqrt{A}$ ,  $\bar{g} \equiv \check{F}_1$ ; por lo que de manera directa se calcula un segundo elemento del núcleo del problema homogéneo correspondiente  $Lv = 0$ :

$$v_2 = V_{0\tau} \int \frac{d\tau'}{V_{0\tau}^2(\tau', t)}.$$

Esta solución particular crece exponencialmente con  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Tomando en cuenta este hecho, es fácil probar que para la solubilidad de (3.18) en la clase de funciones  $\mathcal{H}$ , es condición necesaria y suficiente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{F}_1(\tau, t) V_{0\tau}(\tau, t) d\tau = 0, \quad (3.23)$$

ya que la solución particular al problema no-homogéneo (3.18), calculada con la fórmula (3.21), es

$$z_1(\tau, t) = V_{0\tau}(\tau, t) \int_0^\tau V_{0\tau}^{-2}(\tau', t) d\tau' \int_{-\infty}^\tau \check{F}_1(\tau', t) V_{0\tau}(\tau', t) d\tau', \quad (3.24)$$

donde se ve claramente, ya que  $\check{V}_1 \in \mathcal{H}$ ,  $V_1^+ = 0$ , la necesidad de la condición de ortogonalidad (3.23). Cálculos sencillos permiten reescribir (3.23) como

$$\frac{dA}{dt} - \frac{8}{7}\mu A \left( \alpha - \frac{80}{99}A \right) = 0. \quad (3.25)$$

Esta ecuación describe la evolución temporal de la amplitud de la onda, es decir, la amplitud del término principal (3.14) en nuestra construcción asintótica. Completándola

con la condición inicial  $A|_{t=0} = A^0$ , (3.25) es fácilmente integrada y se obtiene

$$A(t) = A^0 \frac{e^{\mu\alpha't}}{1 + C(e^{\mu\alpha't} - 1)}, \quad \alpha \neq 0, \quad (3.26)$$

con  $\alpha' = 8\alpha/7$  y  $C = 80A^0/99\alpha$ . Esta expresión es válida para toda  $\alpha \neq 0$ ; cuando  $\alpha = 0$  la ecuación diferencial ordinaria (3.25) no contiene el término lineal  $-8\mu\alpha A/7$  así que integrando la ecuación se obtiene

$$A(t) = \frac{A^0}{\frac{640}{693}\mu A^0 t + 1}, \quad \alpha = 0. \quad (3.27)$$

Si  $\alpha < 0$  entonces  $A(t) \rightarrow 0$  exponencialmente en tanto  $t \rightarrow \infty$ .

En la figura (3.1) se ilustra el comportamiento de la amplitud para tres diferentes valores de  $\alpha > 0$  cuando la amplitud inicial es  $A^0 \equiv 1$ . Se ve que existe un valor  $\alpha = \alpha^p \equiv 80A^0/99$  para el cual la amplitud de la onda es constante; esto es obvio cuando se recuerda la ecuación (3.25). Cuando  $\alpha > \alpha^p$  ( $\alpha < \alpha^p$ ) la amplitud inicialmente crece (decrece) hasta un valor máximo (mínimo),  $A_f = 99\alpha/80$ , el cual se mantiene constante.

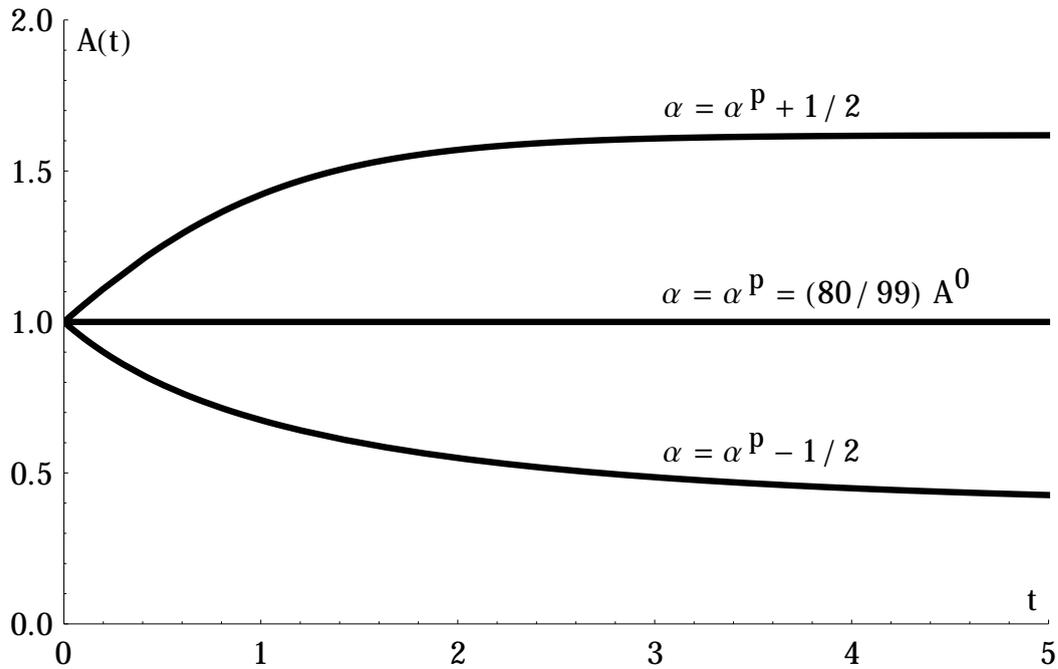


FIG. 3.1: Evolución temporal de la amplitud de la onda solitaria.

Recordando la relación de tipo Hugoniot entre la amplitud y la velocidad de la onda (3.15), integrando obtenemos

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{8}{5} \sqrt{\frac{99}{80\mu\alpha'}} \ln \left[ \frac{Ce^{\frac{\mu\alpha' t}{2}} + \sqrt{C(1-C + Ce^{\mu\alpha' t})}}{C + \sqrt{C}} \right], \quad \alpha > 0, \quad (3.28)$$

donde  $\varphi(0)$  es la posición del frente de la onda al inicio. Esta expresión, válida para  $\alpha > 0$ , predice la posición del frente de la onda como función del tiempo. En el caso en que  $\alpha = 0$  la expresión correcta de la posición del frente de onda se puede encontrar integrando (3.25) con la forma de la amplitud dada por (3.27); en el caso en que  $\alpha < 0$  la expresión correcta se encuentra, al igual que la expresión (3.28) integrando (3.25) con la amplitud dada por (3.26) pero teniendo en cuenta el signo de  $\alpha$  la integral tiene otra forma.<sup>1</sup> En la figura (3.2) se ilustra la posición del frente de la onda (con amplitud inicial  $A^0 \equiv 1$ ) contra el tiempo para los mismos valores de  $\alpha$  que sirvieron para ilustrar la figura (3.1). Se observa que cuando  $\alpha = \alpha^p$  el comportamiento es de una recta con pendiente 4/5, congruente con la relación (3.15) y con el comportamiento constante de la amplitud que encontramos anteriormente para este caso. Cuando  $\alpha > \alpha^p$  ( $\alpha < \alpha^p$ ) se observa que la velocidad inicialmente crece (decrece) y posteriormente se vuelve constante como lo muestra el gráfico (3.2) al tender ambas curvas a rectas.

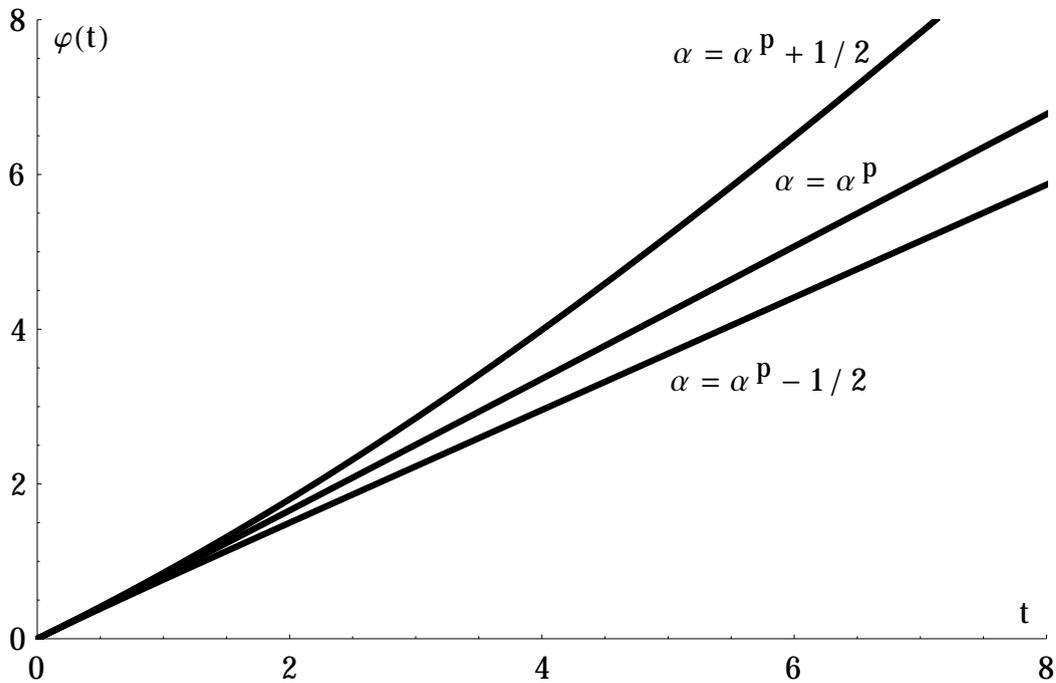


FIG. 3.2: La fase del frente contra el tiempo. Las curvas por arriba y debajo de  $\alpha^p$  tienden a rectas a tiempos largos.

<sup>1</sup>ambas integrales se hallan en las tablas [24].

Hasta aquí hemos completado la construcción del término dominante de la fórmula asintótica (3.9), hasta un desplazamiento  $\varphi_1$  de la variable ‘rápida’  $\tau$ . A saber, hemos obtenido la fórmula (3.14) que describe la forma general de la onda, y las fórmulas (3.26) y (3.28) para la amplitud  $A$  y la fase  $\varphi$  de la onda solitaria distorsionada.

Ahora regresamos a la ecuación (3.18). Nótese en la forma explícita de  $\check{F}_1$ , calculada como (3.19),

$$\begin{aligned} \check{F}_1 = & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mu\alpha \right) \frac{A}{\beta} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \tanh(\beta(\tau + \varphi_1)) [2 + \cosh^{-2}(\beta(\tau + \varphi_1))] \right\} \\ & + \mu \frac{A^2}{\beta} \left\{ \frac{16}{35} - \frac{1}{35} \tanh(\beta(\tau + \varphi_1)) [16 + 8 \cosh^{-2}(\beta(\tau + \varphi_1)) \right. \\ & \left. + 6 \cosh^{-4}(\beta(\tau + \varphi_1)) + 5 \cosh^{-6}(\beta(\tau + \varphi_1))] \right\}, \end{aligned}$$

que proporciona el comportamiento correcto  $\check{F}_1 \rightarrow 0$  en el límite  $\tau \rightarrow +\infty$ . Ahora, haciendo  $\tau \rightarrow -\infty$  obtenemos la igualdad

$$\check{V}_1^- = 2\sqrt{5}\mu A^{\frac{1}{4}} \left( \frac{8}{693}A + \frac{5}{21}\alpha \right). \quad (3.29)$$

Ahora, la ecuación (3.18) nos permite encontrar la función  $V_1$  sobre el frente  $x = \varphi(t)$ . De acuerdo con las fórmulas (3.20), (3.21), (3.22); (3.18) tiene la solución general

$$\check{V}_1(\tau, \varphi, t) = z_1(\tau, t) + \varphi_2(t)V_{0\tau}, \quad (3.30)$$

donde  $z_1$  es la solución particular de la ecuación no-homogénea, dada por la fórmula (3.24) y  $\varphi_2(t)$  es una ‘constante’ arbitraria. Se ha omitido en la solución general de (3.18) el segundo elemento,  $v_2$ , del núcleo del problema homogéneo correspondiente ya que tiene un comportamiento divergente en tanto  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . La fórmula explícita de  $\check{V}_1$  se obtiene consultando las integrales necesarias en [24] mas es una fórmula larga y no tiene sentido reproducirla; para dar una idea la figura (3.3) ilustra el comportamiento de  $\check{V}_1$  dado por (3.30) cuando  $A^0 \equiv 1$ ,  $\alpha \equiv \alpha^p$ , claramente una función perteneciente a  $\mathcal{H}$ .

Es conveniente reescribir  $\check{V}_1$  en la forma

$$\check{V}_1(\tau, x, t) = \omega_1(\tau, t) + \check{V}_1^- \chi(\tau, t), \quad (3.31)$$

donde  $\chi(\tau, t) = (1 - \tanh(\beta(\tau + \varphi_1)))/2$ ,  $\omega_1 \in \mathcal{S}$ . Como la suma de cualquier función de  $\mathcal{H}$  con una función de  $\mathcal{S}$  pertenece a  $\mathcal{H}$ , esto no presenta ninguna incongruencia. Ya que  $\omega_1 \in \mathcal{S}$ ,  $\chi^+ = 0$ ,  $\chi^- = 1$ , es natural buscar la extensión de (3.31) en el exterior del

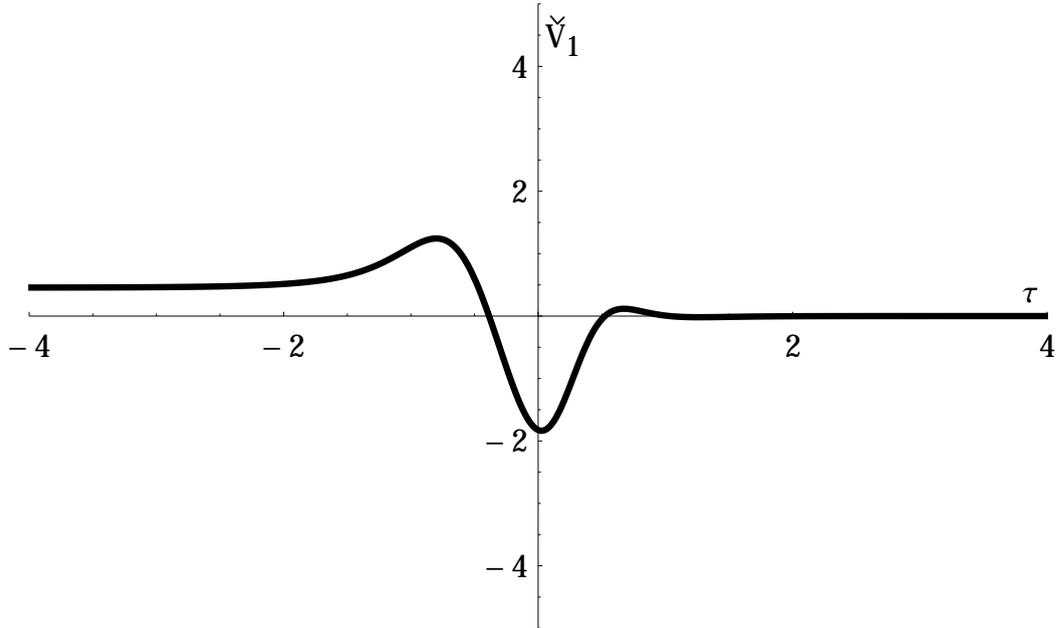


FIG. 3.3: La corrección  $V_1$  sobre el frente de onda como supusimos es una función dentro de  $\mathcal{H}$ .

frente de onda  $x = \varphi(t)$  en forma de una onda de choque suavizada

$$V_1(\tau, x, t) = \omega_1(\tau, t) + u_1^-(x, t)\chi(\tau, t) \in \mathcal{H}, \quad (3.32)$$

donde  $u_1^-$  es una función suave por determinar, tal que

$$u_1^-|_{x=\varphi(t)} = \check{V}_1^-, \quad t \in [0, T]. \quad (3.33)$$

Para determinar  $u_1^-$  basta pensar en nuestra expansión asintótica afuera de la curva  $\Gamma$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ . En esta región la solución tiene la forma  $u = \varepsilon u_1^-$ , sustituyendo en (3.6) se obtiene  $\varepsilon(u_1^-)_t = \varepsilon\mu(\alpha - \varepsilon u_1^-)u_1^- - \varepsilon^{3/2}((u_1^-)^{3/2})_x - \varepsilon^3(u_1^-)_{xxx}$ . Nos interesan solo los términos con una potencia de  $\varepsilon$  no mayor que 1, de modo que para determinar  $u_1^-$  se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1^- = \mu\alpha u_1^-. \quad (3.34)$$

La fórmula (3.32) para  $\tau = (x - \varphi)/\varepsilon$  muestra que es suficiente determinar la función  $u_1^-$  solo en el dominio

$$\Omega_T^- = \{(x, t), x \leq \varphi(t), t \in (0, T)\}, \quad (3.35)$$

ya que en la cinta  $\Omega_T^\delta = \{(x, t), \varphi(t) < x < \varphi(t) + c\varepsilon^{1-\delta}, t \in (0, T)\}$ ,  $c > 0$ ,  $0 < \delta < 1$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeña siempre se puede definir una extensión infinitamente diferenciable de la función  $u_1^-$ , mientras que para  $x > \varphi(t) + c\varepsilon^{1-\delta}/2$  el término  $u_1^- \chi$

es despreciablemente pequeño. Por lo tanto, consideraremos la ecuación (3.34) en el dominio (3.35), completando el problema con la condición de frontera (3.33) y condición inicial suficientemente suave

$$u_1^-|_{t=0} = u_{10}^-(x), \quad x < \varphi(0). \quad (3.36)$$

Una ingenua pero certera aplicación del método de características es reescribir (3.34) en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1^- - a \frac{\partial}{\partial x} u_1^- = \mu \alpha u_1^-,$$

donde  $a \equiv 0$ . Así, el método de características nos dice que necesitamos resolver el sistema característico:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -a, & X|_{t=0} &= x_0, \\ \frac{dU}{dt} &= \mu \alpha U, & U|_{t=0} &= u_{10}^-(x_0), \quad x_0 < \varphi(0), \\ \frac{dU}{dt} &= \mu \alpha U, & U|_{x_0=\varphi(t)} &= \check{V}_1^-(t), \quad x_0 \geq \varphi(0); \end{aligned}$$

donde  $X = X(x_0, t)$  es la ecuación de la familia de curvas características en el plano  $x, t$ , las cuales para cada  $x_0$  fija están parametrizadas por  $t$  y sobre las cuales la función  $u_1^-(x, t)$  depende solamente de  $t$ . El método de características nos dice que la solución  $u_1^-(x, t)$  es igual a evaluar la función  $U(x_0, t)|_{x_0=x_0(X,t)}$ . De inmediato, se ve que la familia de curvas características está compuesta por las rectas  $X = x_0 - at$ , es decir  $X = x_0$ . Ahora, integrando la ecuación del sistema característico para  $U$  se obtiene la solución  $u_1^-$  a la ‘izquierda’ de  $\varphi(0)$

$$u_1^- = u_{10}^-(x) e^{\mu \alpha t}, \quad x < \varphi(0), \quad t \geq 0. \quad (3.37)$$

Del otro lado, para  $x \geq \varphi(0)$  se tiene

$$u_1^- = \check{V}_1^-(t(x)) e^{\mu \alpha (t-t(x))}, \quad x \geq \varphi(0), \quad t \geq t(x), \quad (3.38)$$

donde  $t(x)$  es solución de la ecuación  $x = \varphi(t)$ . La situación es esquematizada en la figura (3.4).

Esto concluye la solución asintótica de la ecuación (3.6) hasta un orden de precisión  $o(\varepsilon)$ . Hemos obtenido (3.14) el término principal  $V_0$  de la expansión asintótica que representa la onda solitaria distorsionada que se desplaza a la derecha con amplitud dada por (3.26) y la fase del frente de onda dada por (3.28). La corrección de primer orden  $V_1$  fue obtenida (3.32) y representa la ‘huella’ o ‘estela’ que la onda solitaria distorsionada va dejando

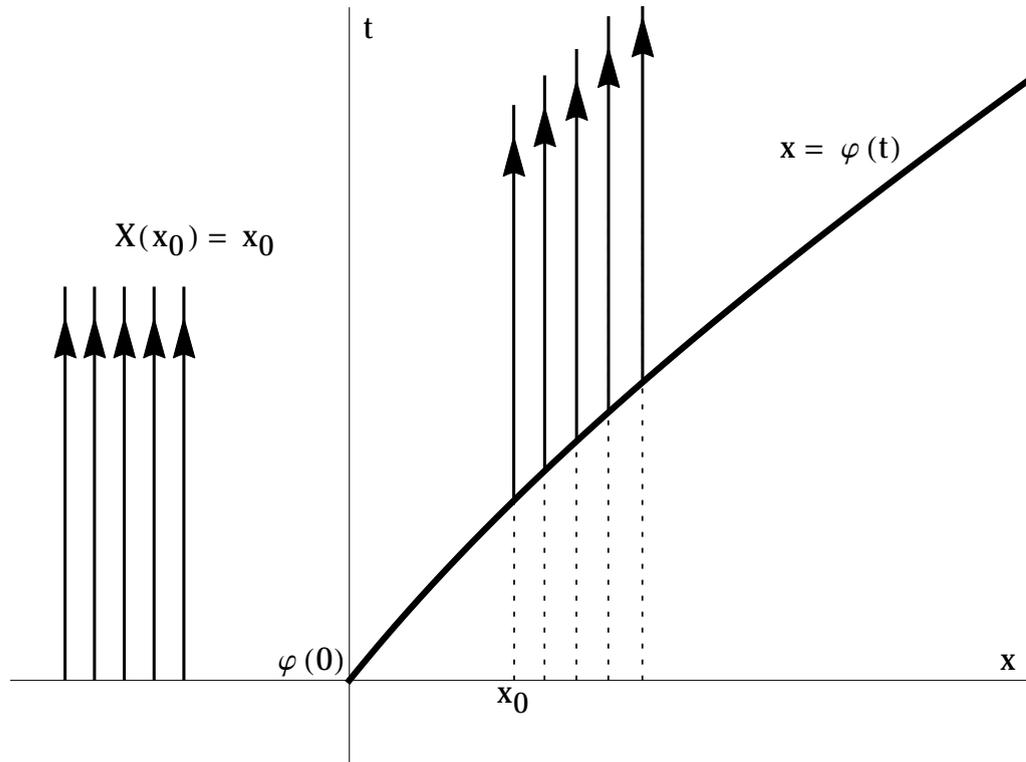


FIG. 3.4: Las características del problema para la amplitud  $u_1^-$  son líneas rectas verticales. La solución debe especificarse en dos dominios diferentes: a la 'izquierda' y a la 'derecha' de  $x = \varphi(0)$ .

tras de sí mientras se propaga. La 'amplitud' de la corrección fue calculada (3.37), (3.38) y se encontró un comportamiento exponencial. A continuación se analizan los resultados obtenidos en torno a la estabilidad asintótica de la propagación de la onda solitaria distorsionada.

### 3.4. Análisis y observaciones

La expresión (3.26) para la amplitud de la onda solitaria distorsionada muestra que para  $\alpha$  positiva el término principal de la expansión asintótica (3.8) es estable, es decir, la amplitud de la onda solitaria no crece (decrece) más allá de un valor máximo (mínimo),  $A_f = 99\alpha/80$  que no depende de la amplitud inicial del pulso. Para  $\alpha \leq 0$  la amplitud tiende a cero en tanto  $t \rightarrow \infty$ . Cuando  $\alpha > \alpha^p$  la amplitud del solitón crece exponencialmente hasta un máximo; cuando  $0 < \alpha < \alpha^p$  la amplitud decrece exponencialmente hasta un valor mínimo positivo; cuando  $\alpha = 0$  la amplitud tiende a cero como  $1/t$ ; cuando  $\alpha < 0$  la amplitud tiende a cero exponencialmente; el caso  $\alpha = \alpha^p$  mantiene

constante la amplitud. Hacemos notar que la amplitud del solitón se mantiene estrictamente positiva durante cualquier intervalo de tiempo, es decir, el solitón es una onda acústica compresiva exclusivamente.

Más interesante es el comportamiento de la primera corrección  $V_1$  de nuestra solución asintótica. Como vemos en las fórmulas (3.37) y (3.38) la amplitud  $u_1^-(x, t)$  de la corrección  $V_1$  es una función exponencial, por lo que cuando  $\alpha > 0$  tenemos el caso de la perturbación inestable. La perturbación de la ecuación lleva a la aparición de una ‘cola’ pequeña ( $O(\varepsilon)$  inicialmente), pero esa cola es inestable y crece hasta la amplitud  $\varepsilon O(e^{\alpha t}) = O(1)$  destruyendo toda la estructura en un tiempo crítico  $T^* \sim \ln(1/\varepsilon)/\mu\alpha$ .

Formalmente, cuando  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño la solución asintótica sirve para todo tiempo  $T \leq \text{const.}$  ya que en tanto  $\varepsilon \rightarrow 0$  el tiempo crítico  $T^* \rightarrow \infty$ . En la práctica, cuando  $\varepsilon = \text{const.}$  dada, aparece la limitación para el tiempo.

En el siguiente capítulo se describe el esquema de diferencias finitas que usamos para la simulación numérica de la ecuación (3.6). Luego, en el capítulo 5, se exponen los resultados de las simulaciones, que corroboran las predicciones obtenidas con la solución asintótica.

## Capítulo 4

# Esquema Numérico

En el presente capítulo construimos un esquema de diferencias finitas para la simulación de la dinámica de la ecuación GKdV. Nos basamos en el esquema descrito por [14].

### 4.1. Diferencias finitas

La simulación numérica de la ecuación GKdV (3.1) derivada por Schamel con condición inicial de un solitón es realizada para un intervalo de  $x$  cerrado  $x \in [0, L]$ . Por esto, simulamos el problema de Cauchy con el problema mixto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \quad (4.1)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = u_x|_{x=L} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (4.2)$$

donde  $u^0$  es una función suficientemente suave. En particular escogemos  $u^0$  como una onda solitaria de la forma (3.14). Más aun, sean  $L, T$  y  $u^0$  tales que uniformemente en  $t \leq T$

$$|u(x, t)|_{x \in [0, \delta]} \leq c\varepsilon^2, \quad |u(x, t)|_{x \in [L-\delta, L]} \leq c\varepsilon^2 \quad (4.3)$$

para alguna  $\delta > 0$  suficientemente pequeña. Sea la condición inicial  $u^0$  con forma de un solitón tal que la trayectoria del frente de onda durante el intervalo  $t \in (0, T)$  permanece dentro de  $x \in (0, L)$ ; esto es suficiente para asegurar (4.3).

Es imposible crear un esquema de diferencias finitas para el problema (4.1) y (4.2) que permanezca estable uniformemente en tanto  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $t \in (0, T)$ ,  $T = \text{const.}$  así que trataremos  $\varepsilon$  como una constante pequeña.

Para plantear un esquema de diferencias finitas para el problema (4.1) debemos elegir aproximaciones apropiadas para los términos diferenciales y para el término no-lineal. Procedamos separadamente.

## 4.2. Esquema no-lineal preliminar

Como es usual, definimos una malla  $Q_{T,\tau,h} = \{(x_i, t_j) \stackrel{\text{def}}{=} (ih, j\tau); i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, J, Nh = L, J\tau = T\}$  sobre el dominio  $Q_T = \{(x, t); x \in [0, L], t \in [0, T]\}$  y denotamos

$$\begin{aligned} y_i^j &\stackrel{\text{def}}{=} u(x_i, t_j), & y_{ix}^j &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_x y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h}, & y_{i\bar{x}}^j &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\bar{x}} y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}, \\ y_{i\bar{x}}^j &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\bar{x}} y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (y_{ix}^j + y_{i\bar{x}}^j), & y_{i\bar{t}}^j &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\bar{t}} y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau}, & y_{i\bar{x}\bar{x}}^j &= (y_{ix}^j)_{\bar{x}}. \end{aligned}$$

Consideremos el sistema de ecuaciones no-lineales

$$y_{i\bar{t}}^j + Q(y_i^j) + \varepsilon^2 \gamma y_{i\bar{x}\bar{x}}^j + \varepsilon^2 h y_{i\bar{x}\bar{x}}^j = 0, \quad i = 2, \dots, N-2, \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.4)$$

$$y_l^j = y_{N-l}^j = 0, \quad i = 0, 1, \quad j = 1, \dots, J, \quad (4.5)$$

$$y_i^0 = \tilde{u}^0\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right), \quad i = 0, \dots, N, \quad (4.6)$$

donde  $\gamma = 1 - h$  y

$$\begin{aligned} \tilde{u}^0\left(\frac{x_l}{\varepsilon}\right) &= \tilde{u}^0\left(\frac{x_{N-l}}{\varepsilon}\right) = 0, \quad l = 0, 1, \\ \tilde{u}^0\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) &= \frac{1}{h} \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} u^0\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) d\eta, \quad i = 2, \dots, N-2. \end{aligned}$$

Es fácil ver que el término  $h y_{i\bar{x}\bar{x}}^j$  en (4.4) es la regularización parabólica de la ecuación GKdV. También es claro que la precisión local de la aproximación de (4.4) es  $o(\tau + h^2)$ . Simplificaremos la notación escribiendo

$$y \stackrel{\text{def}}{=} y_i^j, \quad \hat{y} \stackrel{\text{def}}{=} y_i^{j+1}, \quad \check{y} \stackrel{\text{def}}{=} y_i^{j-1}.$$

Con esta notación reescribimos la ecuación (4.4) de la manera siguiente

$$y_{\bar{t}} + Q(y) + \varepsilon^2 \gamma y_{x\bar{x}\bar{x}} + \varepsilon^2 h y_{x\bar{x}\bar{x}} = 0. \quad (4.7)$$

Ahora bien, como el término no-lineal de nuestra ecuación GKdV es una función no-suave no podemos encontrar una discretización que asegure se preserven ambas leyes de

conservación (3.2) y (3.3). Tendremos que conformarnos con elegir  $Q(y)$  tal que se tenga un análogo discreto de la ley de conservación (3.3). Tal forma para el término no lineal en su versión discreta es

$$Q(y) = \frac{3}{5} \left\{ y^{\frac{1}{2}} y_{\dot{x}} + \left( y^{\frac{3}{2}} \right)_{\dot{x}} \right\}. \quad (4.8)$$

Con esta forma del término no-lineal es fácil encontrar, multiplicando (4.7) por  $y$  e ‘integrando’, que

$$\|y^j\|^2 + \tau \sum_{j'=1}^j \left\{ \tau \|y_{\dot{t}}^{j'}\|^2 + \varepsilon^2 h \|y_{xx}^{j'}\|^2 \right\} = \|y^0\|^2,$$

lo cual da una muy buena estimación de la norma de  $y$ . Aquí  $\|\cdot\|$  denota la versión discreta de la  $L^2(0, L)$ -norma, es decir

$$\|f\|^2 = h \sum_{i=2}^{N-2} |f_i|^2.$$

### 4.3. Linealización

Reescribimos la ecuación (4.7) como

$$y + \tau Q(y) + \tau \varepsilon^2 \gamma y_{x\bar{x}\dot{x}} + \tau \varepsilon^2 h y_{xx\bar{x}} = \check{y}, \quad j \geq 1. \quad (4.9)$$

Nos concierne la solubilidad de la ecuación (4.9) y elegir un modo de linealizar el término no-lineal  $Q(y)$  dado por (4.8). Con este fin construimos una sucesión de funciones, sea  $\varphi^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_0^{(s)}, \dots, \varphi_N^{(s)}\}$ ,  $s \geq 0$ , tal que  $\varphi^{(0)} = \check{y}$  y  $\varphi^{(s)}$  para  $s \geq 1$  satisface la ecuación

$$\varphi^{(s)} + \tau Q\left(\varphi^{(s)}\right) + \tau \varepsilon^2 \gamma \varphi_{x\bar{x}\dot{x}}^{(s)} + \tau \varepsilon^2 h \varphi_{xx\bar{x}}^{(s)} = \check{y}, \quad s \geq 1. \quad (4.10)$$

Simplificaremos la notación haciendo  $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(s)}$ ,  $\bar{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(s-1)}$ , sea además

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \bar{\varphi}, \quad \bar{w} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}.$$

Ahora bien, para linealizar el término no-lineal, haciendo uso de la nueva notación introducida vemos que  $Q(\varphi) = Q(\bar{\varphi} + w)$ . Expandiendo  $Q(\bar{\varphi} + w)$  con la fórmula de Taylor con el residuo en la forma de Peano alrededor de  $\bar{\varphi}$  obtenemos que

$$Q(\bar{\varphi} + w) = Q(\bar{\varphi}) + R(\bar{\varphi}, w),$$

donde  $R(\bar{\varphi}, w)$  es una función lineal en el argumento  $w$  de la forma

$$R(\bar{\varphi}, w) = \frac{3}{5} \{ \sqrt{\bar{\varphi}} w_{\dot{x}} + (\sqrt{\bar{\varphi}} w)_{\dot{x}} \}. \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta la definición de  $w$  se tiene que

$$R(\bar{\varphi}, w) = R(\bar{\varphi}, \varphi) - Q(\bar{\varphi}),$$

de modo que la ecuación (4.10) es en su forma linealizada

$$\varphi + \tau R(\bar{\varphi}, \varphi) + \tau \varepsilon^2 \gamma \varphi_{x\bar{x}\dot{x}} + \tau \varepsilon^2 h \varphi_{xx\bar{x}} = \check{y}, \quad j \geq 1. \quad (4.12)$$

Como veremos en la siguiente sección, la solubilidad del sistema está asegurada para  $\tau/h^3$  suficientemente pequeño.

#### 4.4. Algoritmo de solución

Ahora que tenemos la ecuación linealizada (4.12) basta realizar un sencillo algoritmo para solucionar el sistema (4.1), (4.2). Para  $j = 1, 2, \dots, J$  fija:

- definimos  $\varphi^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} y^{j-1}$ ,
- calculamos  $\varphi^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$  de acuerdo con (4.12),
- definimos  $y^j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(2)}$ ,
- redefinimos  $j = j + 1$  y volvemos al principio.

Con las expresiones discretizadas de los términos diferenciales y la forma del término linealizado (4.11) reescribimos (4.12) en la manera

$$A_i \varphi_{i-2} + B_i \varphi_{i-1} + C_i \varphi_i + D_i \varphi_{i+1} + E_i \varphi_{i+2} = F_i, \quad i = 2, \dots, N-2, \quad (4.13)$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_i &= -\xi_3, \\
 B_i &= -\xi_2 + 2\xi_3 - \xi_1(\sqrt{\varphi_i} + \sqrt{\varphi_{i-1}}), \\
 C_i &= 1 + 3\xi_2, \\
 D_i &= -3\xi_2 - 2\xi_3 + \xi_1(\sqrt{\varphi_i} + \sqrt{\varphi_{i+1}}), \\
 E_i &= \xi_2 + \xi_3, \\
 F_i &= \check{y}_i,
 \end{aligned}$$

$$\text{con } \xi_1 = \frac{3\tau}{10h}, \xi_2 = \frac{\varepsilon^2\tau}{h^2} \text{ y } \xi_3 = \frac{\varepsilon^2\gamma\tau}{2h^3}.$$

El sistema de ecuaciones lineales (4.13) es conveniente visualizarlo como una operación matricial

$$\mathbf{A}\vec{\varphi} = \vec{F},$$

donde  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{F}$  son vectores columna con índices de 2 a  $N - 2$  y  $\mathbf{A}$  es la matriz cuadrada de rango  $N - 4 \times N - 4$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 C_2 & D_2 & E_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\
 A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & E_4 & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\
 \vdots & \vdots & A_{N-4} & B_{N-4} & C_{N-4} & D_{N-4} & E_{N-4} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & A_{N-3} & B_{N-3} & C_{N-3} & D_{N-3} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2}
 \end{pmatrix},$$

la cual tiene 5 diagonales no-triviales por lo que la llamamos la *matriz pentadiagonal*. Claramente, los elementos  $A_2, B_2, A_3, D_{N-2}, E_{N-2}, E_{N-3}$  no están escritos en la matriz  $\mathbf{A}$  ya que multiplican a los elementos  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_N, \varphi_{N-1}$  que según las condiciones de frontera (4.5) son iguales a cero para toda  $j$ .

Tener el sistema (4.13) en la forma matricial nos da la ventaja de poder resolverlo con el método de reducción de Gauss-Jordan. En realidad, el método de Gauss-Jordan es demasiado robusto para usarlo con esta matriz ya que, como hemos visto,  $\mathbf{A}$  es una matriz que contiene suficientes elementos nulos (fuera de las diagonales principales) como para perder tiempo “haciéndolos cero,” de modo que utilizaremos una versión de este método ajustada a este tipo de matriz. La modificación que se hace al método es trivial y es tal que en cada etapa para pasar de  $j \rightarrow j + 1$  se hace en un orden de  $O(N)$  operaciones en vez de  $O(N^2)$  como el método de Gauss-Jordan general. La forma del

coeficiente en la diagonal principal  $C_i = 1 + 3\xi_2$  asegura la solubilidad del sistema para  $\tau/h^3$  suficientemente pequeñas.

En el siguiente capítulo se muestran resultados de las simulaciones de la ecuación GKdV homogénea y se describe el error numérico comparando con la solución analítica. Después se describe la modificación trivial que hay que hacer al código para simular la ecuación perturbada y se muestran los resultados de la simulación de la onda solitaria distorsionada. En el apéndice A se encuentra la implementación en código para FORTRAN del esquema numérico descrito en este capítulo con la modificación para simular la perturbación de la ecuación.

## Capítulo 5

# Simulación Numérica

### 5.1. Simulación de la ec. GKdV homogénea

En el capítulo anterior hemos descrito un esquema de diferencias finitas para la simulación de la ecuación GKdV y un algoritmo de solución suficientemente rápido basado en el método de reducción de Gauss-Jordan que en cada etapa realiza un orden de  $O(N)$  operaciones. Este esquema lo usamos primero para simular la propagación de un solitón para la ecuación GKdV homogénea. Como el caso homogéneo tiene una solución analítica conocida (3.5) lo aprovechamos para comparar nuestra solución numérica con la solución analítica, lo que permite estimar la precisión del esquema numérico. En las siguientes tablas se muestra, para  $\tau = h^2, \frac{h^2}{3}, \frac{h^2}{10}$ , el error numérico máximo calculado al tiempo  $t = 0.1$  en el experimento de la propagación de un solitón con amplitud inicial unitaria y  $I_2^0 - I_2$ , con  $I_2 = h \sum y_i^2$ ,  $I_2^0 = I_2|_{t=0}$ , que mide hasta qué punto se mantiene la ley de conservación (3.3). Estos dos estimadores, el error máximo y la ‘conservación del momento’,<sup>1</sup> muestran que el esquema es bastante preciso y estable. El parámetro  $\varepsilon$  en adelante lo consideramos como una constante pequeña  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ .

$\tau = h^2$	$h = .004$	$h = .003$	$h = .002$	$h = .001$
$\text{Err}_{\max} _{t=0.1} (\times 10^{-5})$	2.26	1.27	0.56	0.14
$[I_2^0 - I_2] _{t=0.1} (\times 10^{-6})$	5.41	3.04	1.35	0.34

$\tau = h^2/3$	$h = .004$	$h = .003$	$h = .002$	$h = .001$
$\text{Err}_{\max} _{t=0.1} (\times 10^{-5})$	1.97	1.11	0.49	0.12
$[I_2^0 - I_2] _{t=0.1} (\times 10^{-6})$	2.93	1.65	0.73	0.18

<sup>1</sup>a la ley de conservación (3.3) suele llamársele la *ley de conservación del momento* así como a la ley de conservación (3.2) se le suele llamar *ley de conservación de la masa*.

$\tau = h^2/10$	$h = .004$	$h = .003$	$h = .002$	$h = .001$
$\text{Err}_{\max} _{t=0.1} (\times 10^{-5})$	1.87	1.05	0.46	0.11
$[I_2^0 - I_2] _{t=0.1} (\times 10^{-6})$	2.06	3.04	0.52	0.13

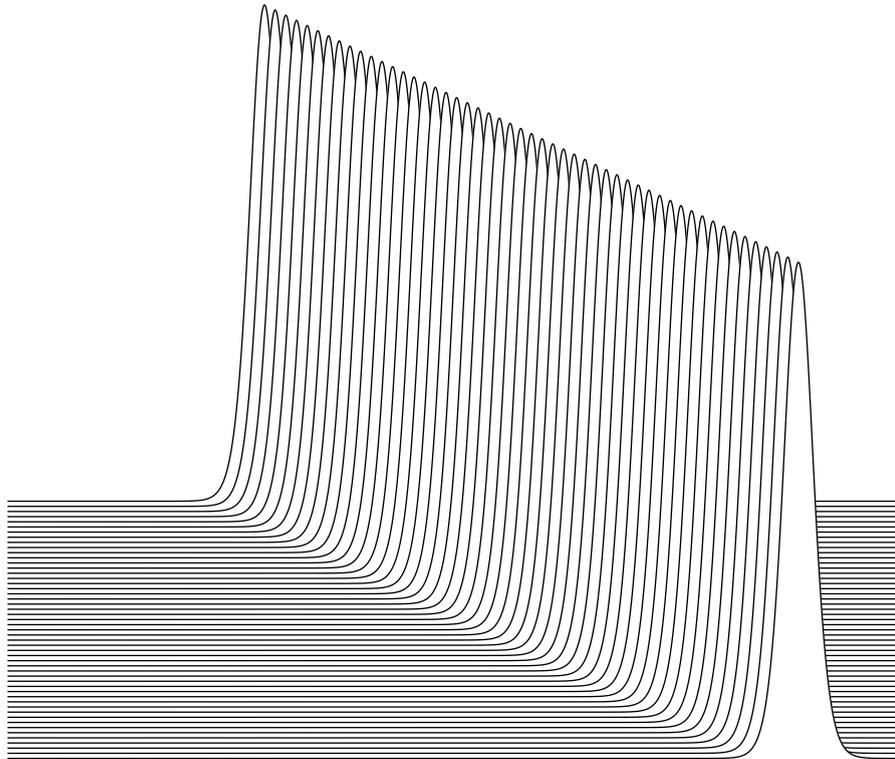


FIG. 5.1: La propagación de un solitón con amplitud  $A = 1$  de la ecuación GKdV homogénea.

La figura (5.1) muestra el gráfico del experimento de propagación de un solitón con amplitud inicial  $A = 1$  y posición inicial  $\varphi(0) = 20$ , se usó  $\tau = h^2$  con  $h = .002$ ; se muestra el intervalo  $x \in [16, 30]$  y el tiempo va de  $t \in [0, 10.5]$ . El comportamiento es el esperado de una onda solitaria no-distorsionada, avanzando a la derecha con velocidad constante  $v = 4/5$  preservando forma, velocidad y amplitud.

En la siguiente sección se muestran los resultados de la simulación de la dinámica de la ecuación perturbada pero antes es pertinente hacer una aclaración sobre los datos iniciales de Cauchy. Obviamente en el caso homogéneo los valores iniciales se escogen como un solitón con la forma (3.5) por lo que la simulación nos permite observar la propagación del solitón sin ninguna distorsión en su amplitud, velocidad o forma. Dado que hemos encontrado la solución asintótica para la ecuación perturbada parecería natural escoger como valores de Cauchy  $y^0 = [V_0 + \varepsilon V_1]|_{t=0}$  si queremos simular la dinámica de la ecuación GKdV bajo la perturbación; sin embargo elegimos solo el término principal de la solución asintótica  $y^0 = V_0|_{t=0}$  ya que, por un lado, resulta ‘artificial’ la elección de

valores iniciales tan específicos como los de la primera corrección de la solución asintótica, lo cual hace difícil comparar las predicciones con el experimento. Por otro lado, si escogemos como valor inicial solo un solitón esperamos de las oscilaciones que aparezcan a la izquierda del frente de la onda que al menos sus amplitudes de oscilación sean bien descritas por las fórmulas encontradas en la solución asintótica.

## 5.2. Simulación de la ec. GKdV perturbada

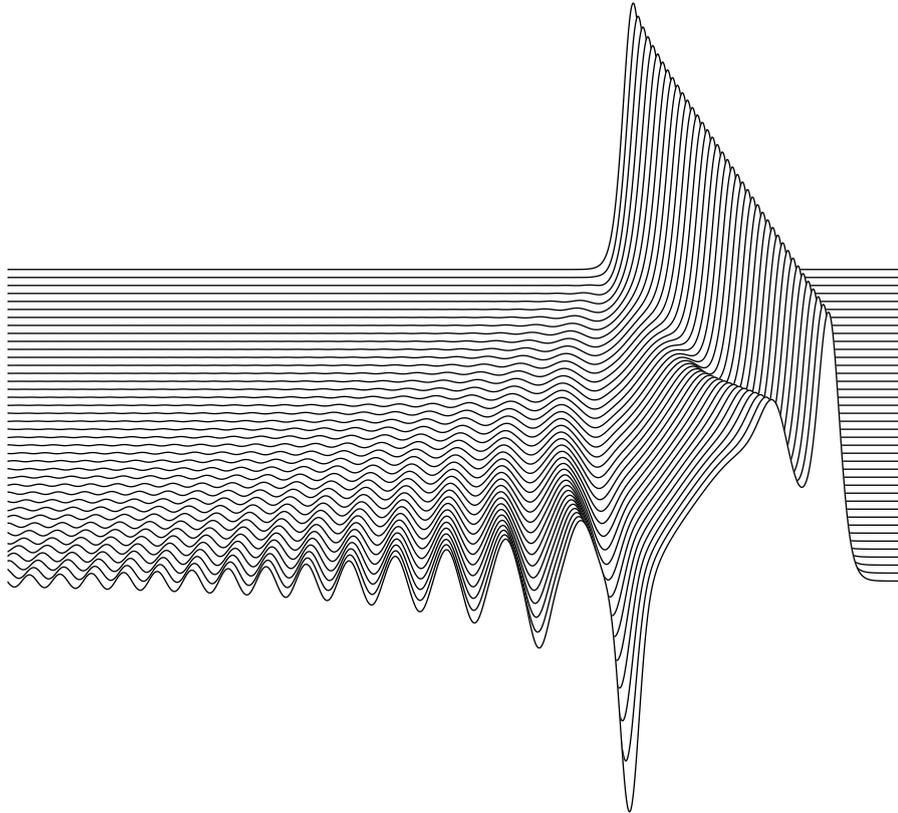


FIG. 5.2: En el caso  $\alpha = \alpha^p$  la amplitud del solitón permanece constante y, como en todos los casos en que  $\alpha > 0$ , la inestabilidad aparece en la primera corrección, es decir, en la ‘huella’ que va dejando tras de sí la onda solitaria distorsionada.

En el capítulo anterior se construyó un esquema numérico para la ecuación GKdV homogénea que hemos visto es preciso, estable y rápido. La modificación al esquema para simular la perturbación de la ecuación es mínima ya que tratamos al lado derecho de la ecuación GKdV como una perturbación en todo el sentido de la palabra, es decir, sólo es necesario redefinir el lado derecho de la ecuación (4.13) como  $F_i = \check{y}_i + \tau\mu(\alpha - \bar{\varphi}_i)\bar{\varphi}_i$ .

Las tablas de la sección anterior muestran que el esquema numérico es preciso y elegimos para los experimentos de la propagación de un solitón de la ecuación GKdV perturbada

$\tau = h^2/3$  con  $h = .002$  como un buen balance entre precisión y rapidez del método. A continuación se muestran los experimentos para 5 diferentes valores de  $\alpha$ . Las siguientes simulaciones se hicieron todas para un solitón con amplitud inicial  $A^0 = 1$  y posición inicial del solitón  $\varphi(0) = 52$  en un intervalo  $t \in [0, 6.5]$ ,  $x \in [0, 60]$  aunque solo se muestra el intervalo  $x \in [38, 58]$  para observar más de cerca al solitón. Se escoge  $\mu = 1$  para observar adecuadamente los efectos de la perturbación.

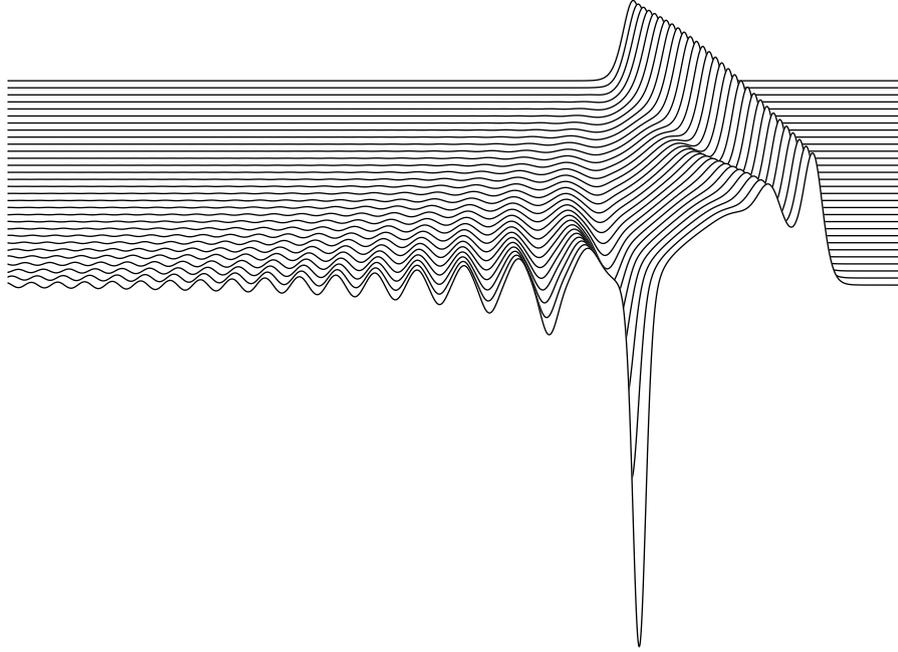


FIG. 5.3: En el caso  $\alpha > \alpha^p$  la amplitud del solitón crece hasta un valor máximo  $A_f = 99\alpha/80$ . La inestabilidad aparece más rápido tanto mayor sea  $\alpha$ .

### 5.2.1. $\alpha = \alpha^p$

En este caso, la solución asintótica predice que la amplitud de la onda solitaria distorsionada se debe mantener constante. Como tenemos  $\alpha$  positiva esperamos se manifieste la inestabilidad de la perturbación en la corrección. De hecho la inestabilidad destruye la estructura de la solución antes de terminar el experimento por lo que en la figura (5.2) solo se muestra la simulación hasta  $t = 5.07$ , tiempo al cual la inestabilidad ha destruido la estructura tamaño  $O(\varepsilon)$  de la corrección. Como vemos en la figura (5.2), las predicciones de la solución asintótica se verifican en este caso al igual que en los demás como veremos.

### 5.2.2. $\alpha > \alpha^p$

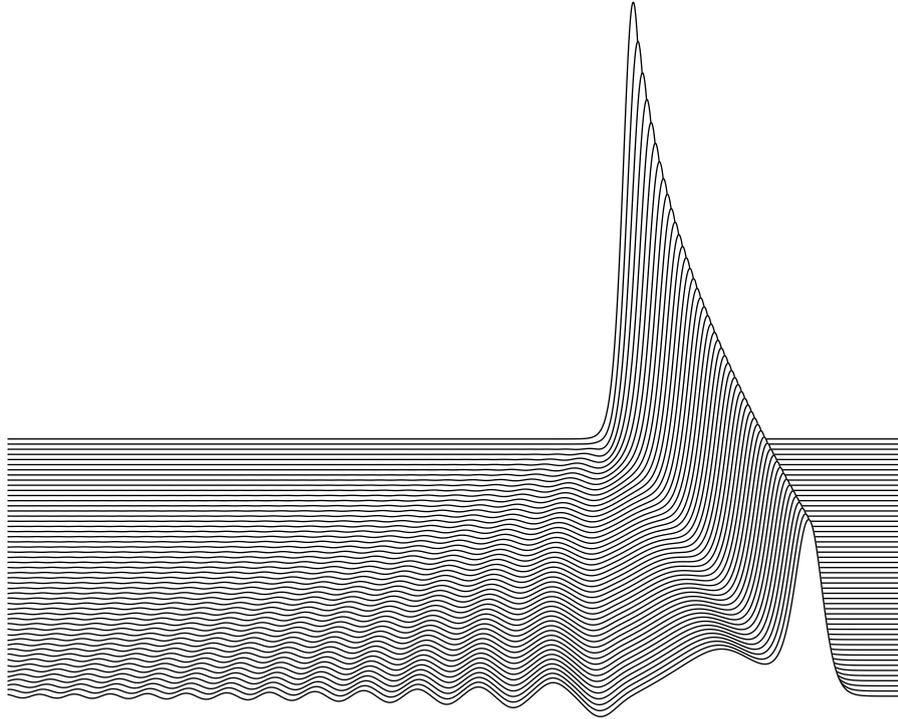


FIG. 5.4: En el caso  $0 < \alpha < \alpha^p$  la amplitud del solitón disminuye hasta un valor mínimo positivo  $A_f = 99\alpha/80$  y la inestabilidad, más débil en tanto menor es  $\alpha$ , tarda más en manifestarse y destruir la estructura de la solución.

Cuando  $\alpha > \alpha^p$  la solución asintótica predice que la amplitud del solitón debe crecer hasta el valor  $A_f = 99\alpha/80$  a partir del cual se mantendrá constante y la inestabilidad debería destruir la solución más rápido que en el caso anterior. Se realiza la simulación para  $\alpha = \alpha^p + 1/2$ . Efectivamente la perturbación es más inestable que en el caso  $\alpha = \alpha^p$  a tal punto que solo alcanzamos a mostrar en la figura (5.3) los resultados de la simulación hasta  $t = 3.9$ .

Efectivamente la inestabilidad se manifiesta más rápido al ser  $\alpha$  mayor y la amplitud crece tendiendo al valor predicho por la construcción asintótica.

### 5.2.3. $0 < \alpha < \alpha^p$

Simulando el caso  $0 < \alpha < \alpha^p$  se verifica la predicción de la solución asintótica que la amplitud de la onda solitaria distorsionada debe disminuir hasta el valor positivo  $A_f = 99\alpha/80$  y mantenerse constante en ese valor; obviamente en el límite en que  $\alpha \rightarrow 0$  la amplitud final del solitón tiende a cero. También se verifica que la inestabilidad tarda

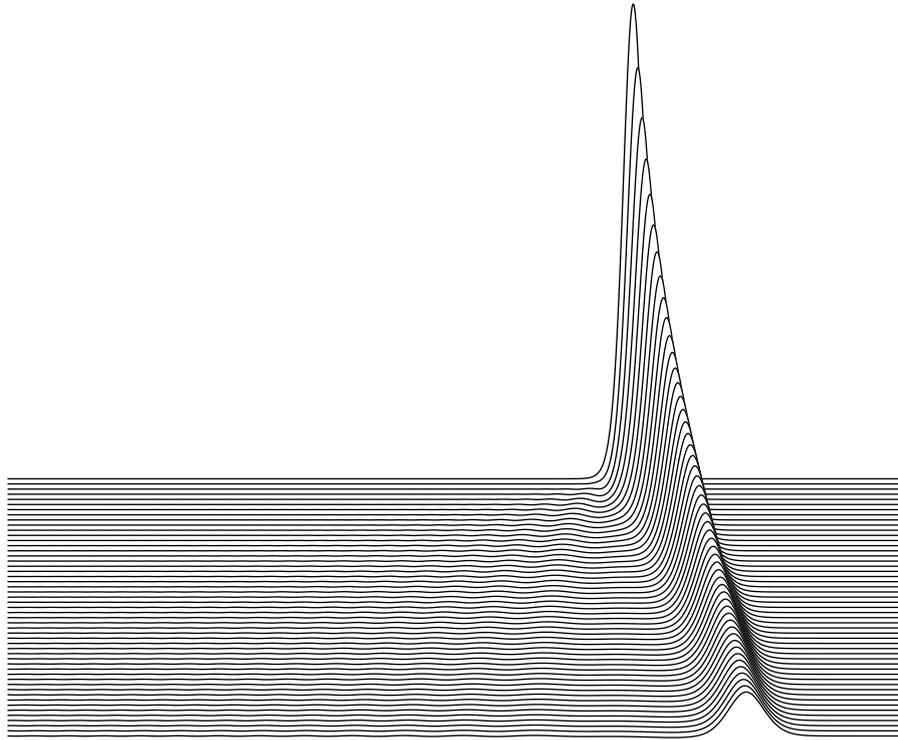


FIG. 5.5: En el caso  $\alpha = 0$  la amplitud del solitón se desvanece tan rápido como  $1/t$  mas la perturbación es completamente estable.

más en manifestarse por lo que mostramos en la figura (5.4) la simulación ‘completa’ hasta  $t = 10.5$ .

Se verifica que en tanto menor sea  $\alpha$  es más largo el tiempo que transcurre antes de que la inestabilidad se manifieste en toda su fuerza destruyendo la estructura. El precio a pagar por extender el tiempo de ‘estabilidad’ en el caso  $\alpha > 0$  es claro: la amplitud del solitón tiende a valores cada vez más pequeños en tanto queremos extender el tiempo de propagación haciendo  $\alpha \rightarrow 0$ . Otro modo de extender el tiempo de estabilidad es hacer el parámetro  $\mu \sim \varepsilon$  del lado derecho de la ecuación; antes, mostraremos los resultados para  $\alpha \leq 0$ .

#### 5.2.4. $\alpha \leq 0$

En este caso la perturbación es completamente estable y la amplitud de los solitones se desvanece como  $1/t$  para  $\alpha = 0$  y exponencialmente para  $\alpha < 0$ . Las oscilaciones que aparecen en la ‘cola’ del solitón son mínimas y probablemente removibles eligiendo valores más finos de  $\tau$  y  $h$  para la red. Se muestra el experimento con  $\alpha = 0$  en la figura (5.5) y con  $\alpha = -1/10$  en la figura (5.6) para ilustrar la situación de  $\alpha$  negativa.

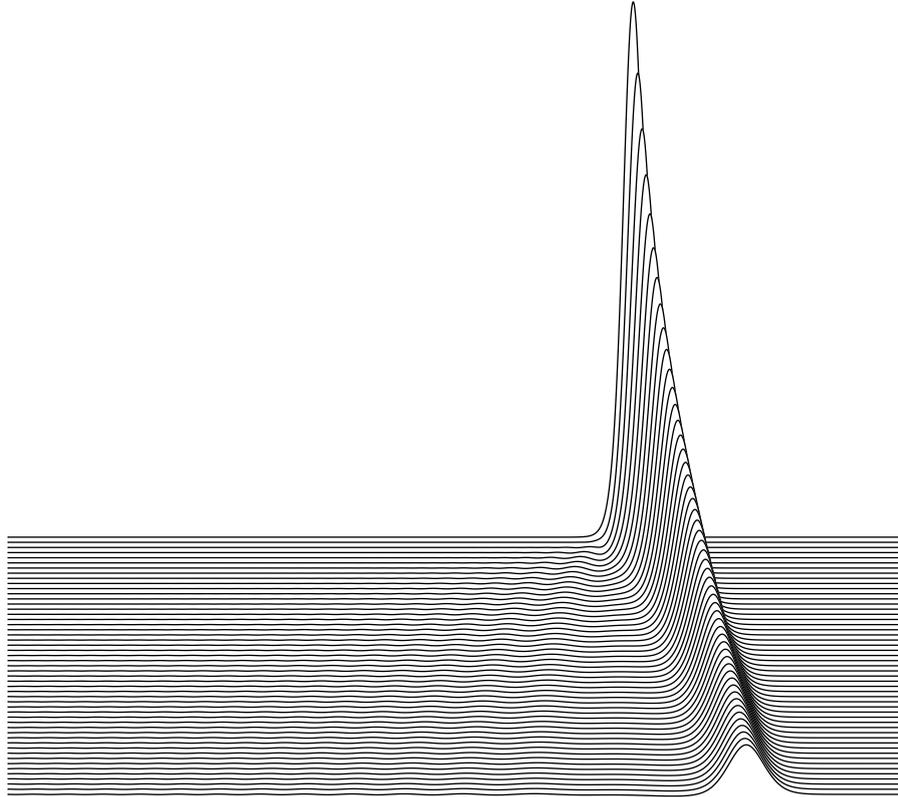


FIG. 5.6: En el caso  $\alpha < 0$  la amplitud del solitón se desvanece exponencialmente mas la perturbación es completamente estable. Las oscilaciones en la cola son mínimas.

Esta perturbación es completamente estable mas a un precio: la amplitud del solitón siempre se desvanece a tiempos suficientemente largos.

### 5.2.5. Perturbación pequeña

Como hemos visto, la perturbación es inestable para  $\alpha > 0$  y estable para  $\alpha < 0$ . Sin embargo, resulta más rico el comportamiento de los solitones bajo la perturbación en el caso  $\alpha > 0$  ya que se tiene tanto comportamientos de crecimiento y decrecimiento de las amplitudes, mientras que en el caso de  $\alpha < 0$  a pesar de ser la perturbación estable el comportamiento es monótono y siempre desvanece la amplitud del solitón. Quisiéramos poder investigar el caso  $\alpha > 0$  para tiempos más largos.

A modo de investigar tiempos más largos para el caso  $\alpha > 0$  hemos insertado el parámetro  $\mu \geq 0$  multiplicando el lado perturbado (derecho) de la ecuación GKdV (3.6). Hasta ahora, en todas las gráficas se ha tomado  $\mu = 1$ . Hacer el parámetro  $\mu \sim \varepsilon$  garantiza la estabilidad por tiempos más largos.

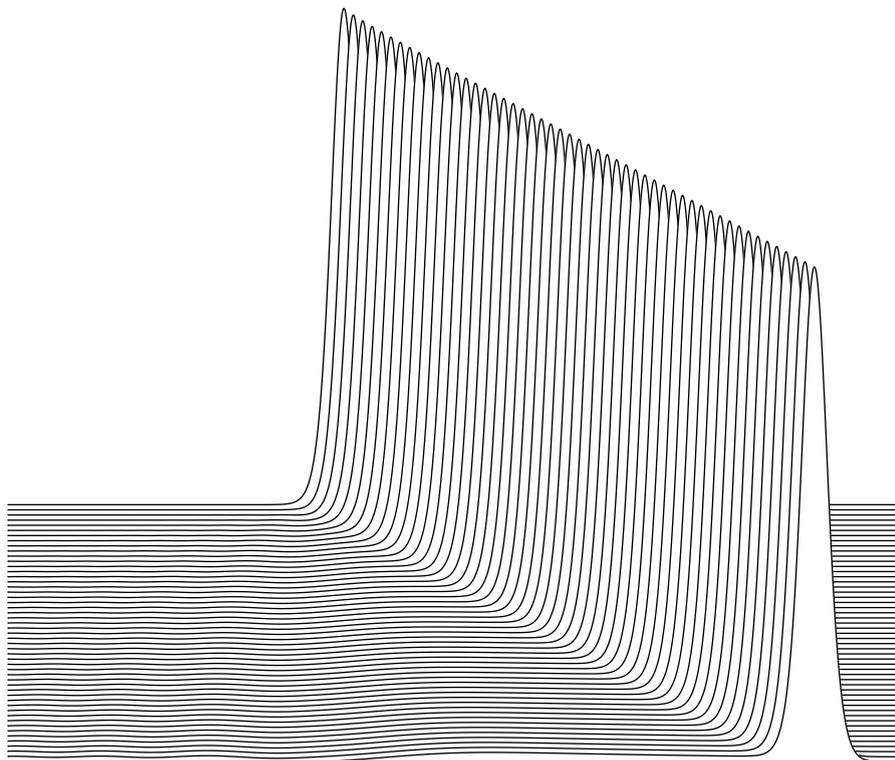


FIG. 5.7: Si multiplicamos el lado derecho de la ecuación GKdV por una constante pequeña podemos extender el tiempo crítico de la perturbación para  $\alpha > 0$  y estudiar la propagación de solitones durante tiempos más largos. Vemos la propagación completamente estable durante  $t \in [0, 10.5]$ .

El efecto que tiene hacer  $\mu$  una constante pequeña multiplicando el lado perturbado de la ecuación es tal que cualitativamente el comportamiento de los solitones es el mismo pero cuantitativamente se requieren tiempos más largos para que la inestabilidad destruya la estructura de la solución. La figura (5.7) muestra el caso de  $\alpha = \alpha^p$  cuando el lado derecho de la ecuación GKdV está multiplicado por una constante pequeña  $\mu = 1/10$ .

Comparando con la figura (5.2) se ve que la perturbación es considerablemente más pequeña y no se desarrolla ningún comportamiento inestable durante todo el intervalo más largo  $t \in [0, 10.5]$ .

## Capítulo 6

# Resultados y Conclusiones

Hemos obtenido resultados sobre la estabilidad asintótica de la onda solitaria distorsionada de la ecuación GKdV derivada por Schamel. Hemos encontrado que ante la perturbación no-lineal de la ecuación (una perturbación de la forma de un polinomio de segundo grado) existe una perturbación estable y una inestable según sea el signo del parámetro  $\alpha$  de la ecuación perturbada; lo que es de llamar la atención es que la inestabilidad se presenta no en el término principal de variación rápida localizada de la solución asintótica sino en la primera corrección que es una región de variación lenta. Estos resultados son predichos por la solución asintótica que construimos y apoyados por simulaciones numéricas para las que desarrollamos un esquema de diferencias finitas que es preciso y estable además de rápido. En las siguientes secciones resumimos los resultados principales obtenidos sobre la estabilidad asintótica de las estructuras solitarias y delineamos las que podrían ser futuras líneas de investigación.

### 6.1. Estabilidad de la onda solitaria

La solución asintótica construida en el capítulo 3 muestra que en el término principal, nuestra onda solitaria distorsionada tiene la forma

$$V_0(\tau, t) = A \cosh^{-4}(\beta(\tau + \varphi_1)) \quad \in \mathcal{S}, \quad (6.1)$$

con  $\tau = (x - \varphi(t))/\varepsilon$ ,  $\beta = \sqrt[4]{A}/\sqrt{20}$  y la amplitud dada por

$$A(t) = A^0 \frac{e^{\mu\alpha't}}{1 + C(e^{\mu\alpha't} - 1)}, \quad \alpha \neq 0, \quad (6.2)$$

con  $\alpha' = 8\alpha/7$  y  $C = 80A^0/99\alpha$  y la fase del frente de la onda dada por<sup>1</sup>

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{8}{5} \sqrt{\frac{99}{80\mu\alpha'}} \ln \left[ \frac{C e^{\frac{\mu\alpha' t}{2}} + \sqrt{C(1-C + C e^{\mu\alpha' t})}}{C + \sqrt{C}} \right], \quad \alpha > 0. \quad (6.3)$$

Es claro que el término principal es estable sin importar la magnitud o signo de  $\alpha$ . Es notable que se mantiene la naturaleza compresiva del pulso ya que la amplitud es estrictamente positiva y a lo más (cuando  $\alpha \leq 0$ ) se desvanece en tiempos suficientemente largos.

La primera corrección de la construcción asintótica

$$V_1(\tau, x, t) = \omega_1(\tau, t) + u_1^-(x, t)\chi(\tau, t) \quad \in \mathcal{H} \quad (6.4)$$

es interesante porque es en ella donde se manifiesta la inestabilidad de la perturbación cuando  $\alpha > 0$ . La estructura de la solución es tal que el término principal se desplaza a la derecha con la amplitud (6.2) y tras de sí va dejando una huella que, a la derecha de la posición inicial tiene forma de una ‘meseta’ de amplitud  $u_1^-$  pequeña inicialmente pero que crece exponencialmente si  $\alpha > 0$

$$u_1^- = \check{V}_1^-(t(x))e^{\mu\alpha(t-t(x))}, \quad x \geq \varphi(0), \quad t \geq t(x), \quad (6.5)$$

y a la izquierda de la posición inicial del frente de la onda tiene la forma de oscilaciones pequeñas muy parecidas a la función de Airy que también aumentan su amplitud  $u_1^-$  exponencialmente si  $\alpha > 0$

$$u_1^- = u_{10}^-(x)e^{\mu\alpha t}, \quad x < \varphi(0), \quad t \geq 0. \quad (6.6)$$

A pesar de ser la perturbación estable en el caso  $\alpha \leq 0$  es el caso de  $\alpha$  positiva el que tiene un comportamiento más interesante en cuanto a las amplitudes de los solitones ya que es el parámetro  $\alpha$  el que controla la amplitud final del solitón. Por otra parte, solitones con amplitud inicial pequeña  $A^0 \ll 1$  deberían ser estables y preservar su forma y amplitud por tiempos suficientemente largos (claro si también  $\alpha \ll 1$ ); la situación es ejemplificada en la figura (6.1) donde se ha escogido  $\alpha = \alpha^p$  con  $A^0 = 1/10$  para simular con  $\tau = h^2$ ,  $h = .004$  la propagación en el intervalo  $t \in [0, 24.5]$ ,  $x \in [0, 40]$  con la posición inicial del solitón  $\varphi(0) = 30$ , se muestra en el gráfico el intervalo de  $x \in [20, 40]$ .

Ahora bien, si queremos estudiar solitones de amplitudes grandes tenemos que hacer  $\alpha$  acordemente más grande lo que introduce una perturbación más inestable en un tiempo

<sup>1</sup>para el caso  $\alpha \leq 0$  la forma es diferente mas es trivial la diferencia.

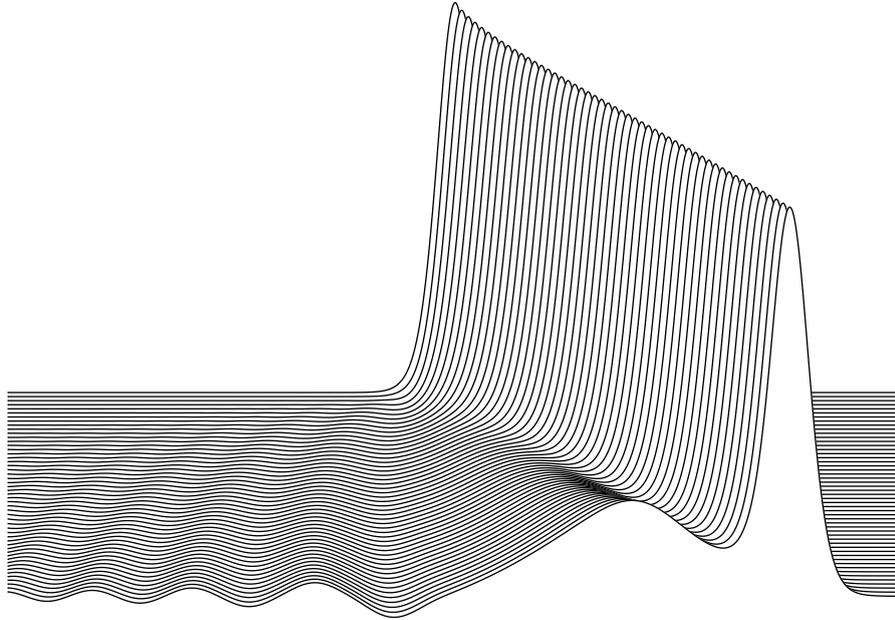


FIG. 6.1: Solitones con amplitudes pequeñas deben ser estables durante tiempos suficientemente largos, incluso para  $\alpha > 0$ . En el gráfico un solitón de amplitud  $1/10$  y parámetro de la ecuación  $\alpha = \alpha^p$  se propaga durante  $t \in [0, 24.5]$

más corto que impide investigar la propagación de estos solitones con amplitudes grandes para tiempos largos. Agregando del lado derecho de la ecuación GKdV perturbada multiplicando una constante pequeña podemos hacer el tiempo crítico de la perturbación arbitrariamente largo, claro estudiando cada vez la perturbación más pequeña y, es obvio, efectos más sutiles de la perturbación.

## 6.2. Futuras direcciones de investigación

La colisión de dos solitones para la ecuación GKdV homogénea derivada por Schamel parece seguir el escenario de la interacción de solitones de la ecuación KdV, es decir, los solitones parecen preservar su forma y velocidad tras el choque siendo solo visible una *fase* entre las posiciones de los frentes de onda antes y después del encuentro. La pregunta natural es si el escenario de interacción de solitones para la ecuación GKdV se preserva para colisiones de más de dos solitones. Esta es una posible dirección de investigación a futuro para la que el esquema de diferencias finitas que hemos desarrollado puede ayudar enormemente. En la figura (6.2) se muestra el detalle de la interacción de dos solitones en el experimento de su propagación de la ec. GKdV homogénea. En esta simulación se

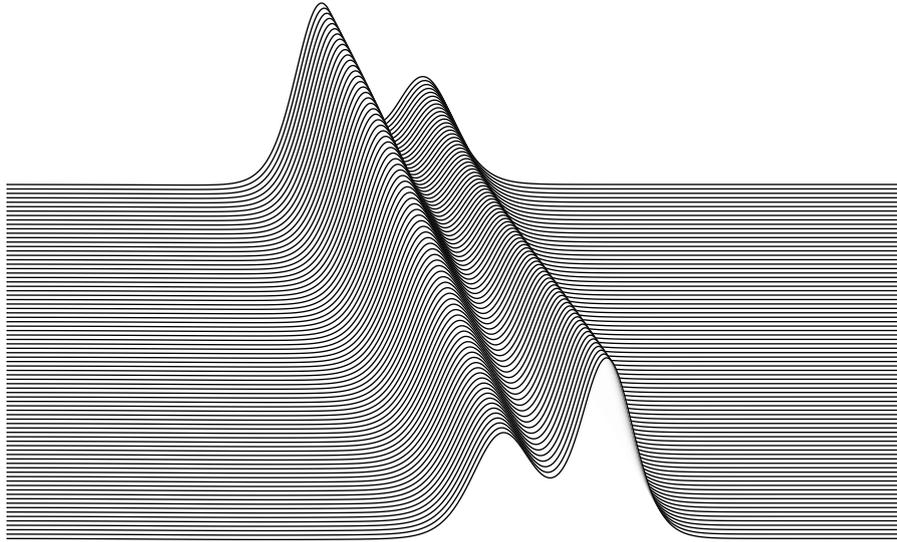


FIG. 6.2: El esquema de diferencias finitas desarrollado también sirve para estudiar la interacción entre solitones. Aquí vemos la interacción entre dos solitones de amplitudes  $A = 12$  y  $A = 6$  de la ecuación GKdV homogénea.

usó  $\tau = h^2/3$  con  $h = .002$ . La figura (6.3) muestra la simulación completa del mismo experimento de la propagación de dos solitones de la ecuación GKdV homogénea con amplitudes  $A = 12$  y  $A = 6$  cuya interacción se muestra a detalle en la figura (6.2).

Agregar una constante pequeña del lado derecho de la ecuación perturbada, como el parámetro  $\mu$  en (3.6), permite estudiar tiempos más largos. Esto permitiría, en teoría, estudiar la colisión de solitones para lo cual se necesita simular tiempos lo suficientemente largos para que los solitones se acerquen, interactúen entre ellos y después se alejen lo suficiente para estudiar el resultado de la colisión.

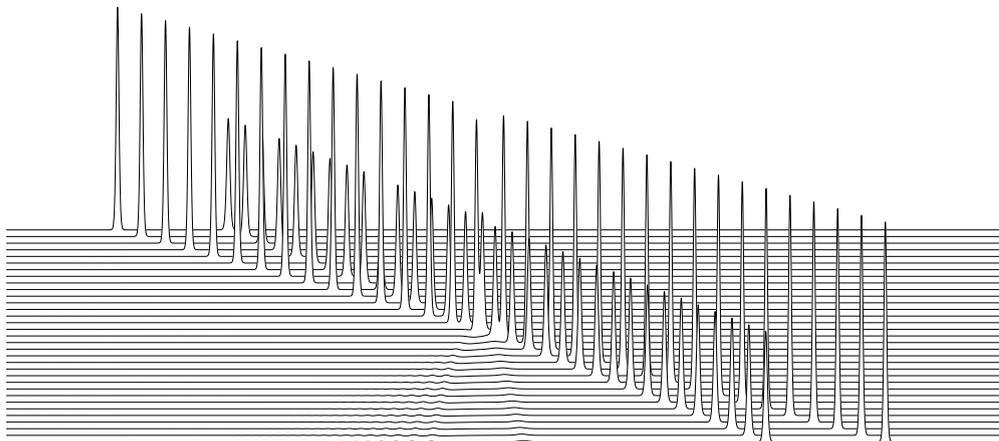


FIG. 6.3: Aquí vemos la colisión de dos solitones de amplitudes  $A = 12$  y  $A = 6$  de la ecuación GKdV homogénea.

Es natural preguntarse si el escenario de interacción de solitones se mantiene también en el caso de la ecuación perturbada (cuando  $\alpha > 0$  ya que en otro caso las amplitudes se desvanecen). Para estudiar este caso agregamos multiplicando del lado derecho de la ecuación GKdV perturbada una constante pequeña para poder simular tiempos más largos sin que la inestabilidad destruya nuestra solución. Encontramos el inesperado efecto que puede tener la perturbación sobre los solitones de eliminar la interacción entre ellos porque, como ya hemos visto, el parámetro  $\alpha$  de la perturbación dicta cómo han de ser las amplitudes finales  $A_f$  de cualquier solitón dado como condición inicial, de modo que si se elige como condición inicial un número  $n \geq 2$  de solitones de diferentes amplitudes y posiciones suficientemente alejados unos de otros todos terminarán pronto con la misma amplitud y mantendrán una distancia constante unos respecto de los otros y nunca se encontrarán los solitones entre ellos. La situación es dramáticamente ilustrada en la figura (6.4) donde se da como condición inicial 5 solitones con amplitudes  $A = 4, 2, 1, 1/2, 1/4$  (de izquierda a derecha, respectivamente) y se simula su propagación durante  $t \in [0, 12.5]$ . Se observa el curioso fenómeno de que la perturbación puede eliminar la interacción entre solitones. La simulación se llevó a cabo con  $\tau = h^2$ ,  $h = .002$  y la constante pequeña  $\mu = 1/5$  que multiplica al lado derecho de la ecuación perturbada.

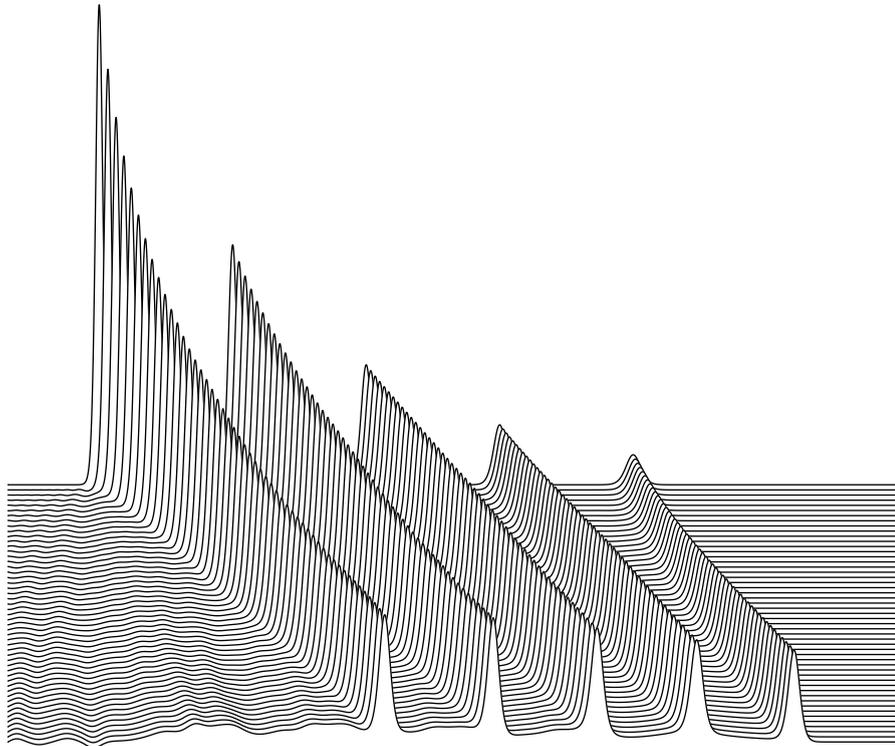


FIG. 6.4: La condición inicial de  $n \geq 2$  solitones evoluciona de manera tal que todos terminan con la misma amplitud dictada por el parámetro  $\alpha$  de modo que jamás colisionan unos contra otros.

Este fenómeno de la imposibilidad de interacción de solitones se da si la distancia inicial entre los solitones es suficientemente grande. Para estimar de qué tamaño debe ser esa distancia inicial entre dos solitones con amplitudes diferentes pensemos en un tiempo  $t_\delta$  al cual el solitón ha cambiado su amplitud hasta casi  $A_f$ ,  $t_\delta : |A(t_\delta) - A_f| = \delta \ll 1$ . Calcúlese este tiempo para los dos solitones. Tómese el valor  $t_\delta^>$  mayor de los dos solitones. Calcúlese para los dos solitones la distancia que recorrerían durante ese tiempo  $t_\delta^>$  si sus amplitudes se mantuvieran constantes (para el solitón a la izquierda llámesele  $d_1$  y para el de la derecha  $d_2$ .) Calcúlese la resta  $d_2 - d_1$  de estas dos distancias hipotéticas: la estimación es que si esta resta  $d_2 - d_1 \geq d^0$  (con  $d^0$  la distancia inicial entre los frentes de onda,) los solitones no podrán interactuar entre ellos. O bien, de una manera más analítica, despejar  $t$  como una función  $\bar{t} = \bar{t}(A_1^0, A_2^0, \varphi_1(0), \varphi_2(0), \alpha)$  de la ecuación  $\varphi_1(\bar{t}) = \varphi_2(\bar{t})$  y estudiar qué pasa con la distancia inicial entre los dos solitones en el límite en que  $\bar{t} \rightarrow \infty$ .

Este efecto que puede tener la perturbación de eliminar la interacción entre los solitones es suficientemente interesante para ser investigado más a fondo. El hecho de que las soluciones asintóticas dependan tan fuertemente del parámetro de la perturbación  $\alpha$  sugiere algún efecto físico que será investigado más a fondo.

# Apéndice A

## Código

Éste es el código de FORTRAN 95 usado para el experimento de la propagación de un solitón bajo la perturbación de la ecuación esquematizado en la figura (5.4). Todas las simulaciones se hicieron con el compilador libre *Ifort* de Intel. Esta tesis fue escrita usando software libre: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X y GNU+Linux.

```
! Este programa resuelve la ecuacion generalizada de
! Korteweg-de Vries bajo una perturbacion no lineal:

!           u_t + (u^3/2)_x + eps**2 u_xxx = m*u*(alfa-u).

! version del esquema que conserva el momentum.
! propagacion de una onda solitaria bajo la perturbacion de la ecuacion.
! condiciones de frontera no periodicas.
! =====

program GKDV
implicit none

! declaraciones:

integer :: i,j,l,s,iter,p,n,k
real(kind=8):: xmin,xmax,h,tmax,t,jmax,c1,c2,c3,gam,x1,imp
real(kind=8):: bet1,i1,i10,i2,i20,eps,alfa,tau,m
real(kind=8),allocatable,dimension(:) :: f,phib,y,phi,x
real(kind=8),allocatable,dimension(:) :: a,b,c,d,e
```

```

open(unit=63,file='solucionXU.txt')
open(unit=67,file='solucionXUres.txt')
open(unit=66,file='solucionXTU.txt')
open(unit=22,file='solucionXTUres.txt')
open(unit=53,file='conservadas.txt')
open(unit=57,file='resumen.txt')

n=30000                !el numero de puntos en la red
eps=0.1                !el valor del parametro de la ecuacion
xmin=0.                !el intervalo del problema:
xmax=60.                !<-----
h=(xmax-xmin)/float(n) !definicion
tau=(h**2)/3.          !la relacion entre tau y h
tmax=10.5              !el 'tiempo' deseado de simulacion
jmax=tmax/tau          !el numero de etapas a simular

bet1=sqrt(sqrt(1.)/sqrt(400.)) !parametros del soliton 1:
x1=50.                !<-----

imp=50.                !imprimir imp etapas en total
s=jmax/imp            !<-----
p=10                  !imprimir cada p puntos en la imp. resumida

alfa=(80./99.)*(400.*bet1**4)-1./2. !el parametro de la ecuacion

gam=1.-h                !definicion:
c1=(3.*tau)/(10.*h)    !<-----
c2=(tau*(eps**2))/(h**2) !<-----
c3=(tau*(eps**2)*gam)/(2.*h**3) !<-----

m=1.                    !el parametro pequeno del lado derecho

allocate(f(2:n-2),phib(0:n),y(0:n),phi(0:n),x(0:n))
allocate(a(4:n-2),b(3:n-2),c(2:n-2),d(2:n-3),e(2:n-4))

write(*,*)"necesito ",int(jmax)," etapas de calculo"

write(53,*)"etapa      , tiempo      , (i10-i1)      , (i20-i2)"

```

! guardando la cond. inicial como "y" & "phib" e impresion de condicion inicial

```

y(0)=0.                                !condiciones de frontera:.
y(1)=0.                                !<-----
phib(0)=0.                              !<-----
phib(1)=0.                              !<-----

```

```

x(0)=xmin
x(1)=xmin+h
write(66,12)xmin,"",0,"",0
write(66,12)xmin+h,"",0,"",0
write(63,24)xmin
write(63,24)0
write(63,24)xmin+h
write(63,24)0

```

do i=2,n-2

```

    x(i)=xmin+float(i)*h

    y(i)=inicial(bet1,x1,eps,x(i))

    phib(i)=y(i)

    write(66,12)x(i),"",0,"",y(i)

    write(63,24)x(i)
    write(63,24)y(i)

    i10=i10+h*y(i)
    i20=i20+h*(y(i)**2)

```

end do

```

y(n-1)=0.                              !condiciones de frontera:.
y(n)=0.                                 !<-----
phib(n-1)=0.                            !<-----
phib(n)=0.                              !<-----

```

```

x(n-1)=xmax-h
x(n)=xmax
write(66,12)xmax-h,"",0,"",0
write(66,12)xmax,"",0,"",0
write(63,24)xmax-h
write(63,24)0
write(63,24)xmax
write(63,24)0

! impresion de la condicion inicial resumida:=====

do i=0,n,p

    write(22,12)x(i),"",0,"",y(i)
    write(67,24)x(i)
    write(67,24)y(i)

end do

! contadores previos al ciclo:=====

l=1
k=1

!=====empezar ciclo (solucion):=====

do j=1,int(jmax)

!   calculando la reduccion gauss-jordan:
!   a) la matriz a su forma triangular con 1 en diagonal:

do iter=1,2    !ciclo interno: termina en linea marcada con 99

do i=2,3

    c(i)=1.+3.*c2
    e(i)=c2+c3
    f(i)=y(i)+tau*(alfa-phib(i))*phib(i)*m
    d(i)=-3.*c2-2.*c3+c1*(skrt(phib(i+1)))+c1*skrt(phib(i))

```

```

end do

b(3)=-c2+2.*c3-c1*(skrt(phib(2)))-c1*skrt(phib(3))

do i=2,n-6

a(i+2)=-c3
c(i+2)=1.+3.*c2
e(i+2)=c2+c3
f(i+2)=y(i+2)+tau*(alfa-phib(i+2))*phib(i+2)*m
b(i+2)=-c2+2.*c3-c1*(skrt(phib(i+1)))-c1*skrt(phib(i+2))
d(i+2)=-3.*c2-2.*c3+c1*(skrt(phib(i+3)))+c1*skrt(phib(i+2))

d(i)=d(i)/c(i)
e(i)=e(i)/c(i)
f(i)=f(i)/c(i)
c(i)=1.

c(i+1)=c(i+1)-b(i+1)*d(i)
d(i+1)=d(i+1)-b(i+1)*e(i)
! e(i+1)=e(i+1)
f(i+1)=f(i+1)-b(i+1)*f(i)
b(i+1)=0.

b(i+2)=b(i+2)-a(i+2)*d(i)
c(i+2)=c(i+2)-a(i+2)*e(i)
! d(i+2)=d(i+2)
! e(i+2)=e(i+2)
f(i+2)=f(i+2)-a(i+2)*f(i)
a(i+2)=0.
end do

d(n-3)=-3.*c2-2.*c3+c1*(skrt(phib(n-2)))+c1*skrt(phib(n-3))

do i=n-3,n-2
a(i)=-c3
c(i)=1.+3.*c2
f(i)=y(i)+tau*(alfa-phib(i))*phib(i)*m

```

```

        b(i)=-c2+2.*c3-c1*(skrt(phib(i-1)))-c1*skrt(phib(i))

    end do

d(n-5)=d(n-5)/c(n-5)
e(n-5)=e(n-5)/c(n-5)
f(n-5)=f(n-5)/c(n-5)
c(n-5)=1.

c(n-4)=c(n-4)-b(n-4)*d(n-5)
d(n-4)=d(n-4)-b(n-4)*e(n-5)
!   e(n-4)=e(n-4)
f(n-4)=f(n-4)-b(n-4)*f(n-5)
b(n-4)=0.

b(n-3)=b(n-3)-a(n-3)*d(n-5)
f(n-3)=f(n-3)-a(n-3)*f(n-5)
!   d(n-3)=d(n-3)
c(n-3)=c(n-3)-a(n-3)*e(n-5)
a(n-3)=0.

d(n-4)=d(n-4)/c(n-4)
e(n-4)=e(n-4)/c(n-4)
f(n-4)=f(n-4)/c(n-4)
c(n-4)=1.

f(n-3)=f(n-3)-b(n-3)*f(n-4)
d(n-3)=d(n-3)-b(n-3)*e(n-4)
c(n-3)=c(n-3)-b(n-3)*d(n-4)
b(n-3)=0.

f(n-2)=f(n-2)-a(n-2)*f(n-4)
b(n-2)=b(n-2)-a(n-2)*d(n-4)
c(n-2)=c(n-2)-a(n-2)*e(n-4)
a(n-2)=0.

f(n-3)=f(n-3)/c(n-3)
d(n-3)=d(n-3)/c(n-3)
c(n-3)=1.

```

```

f(n-2)=f(n-2)-b(n-2)*f(n-3)
c(n-2)=c(n-2)-b(n-2)*d(n-3)
b(n-2)=0.

f(n-2)=f(n-2)/c(n-2)
c(n-2)=1.

! b) yendo hacia atras para resolver el vector:

phi(n)=0. ! las condiciones de frontera

phi(n-1)=0. ! las condiciones de frontera

phi(n-2)=f(n-2)

phi(n-3)=f(n-3)-d(n-3)*phi(n-2)

do i=n-4,2,-1
  phi(i)=f(i)-d(i)*phi(i+1)-e(i)*phi(i+2)
end do

phi(1)=0. ! las condiciones de frontera

phi(0)=0. ! las condiciones de frontera

!====se obtuvo una nueva phi en la sucesion=====

  phib=phi

end do !99 termina el ciclo de las iteraciones internas

!====se obtuvo j-esima "Y" correspondiente al tiempo t dado por=====

  t=float(j)*tau

!====la condicion de impresion, es decir para tomar "Y" significativa=====

  if (k .lt. s) then

```

```

k=k+1

else
  i1=0.
  i2=0.

do i=0,n

  write(66,12)x(i),"",t,"",phi(i)
  write(63,24)x(i)
  write(63,24)phi(i)

!====calculando las integrales de movimiento=====

  i1=i1+h*phi(i)
  i2=i2+h*(phi(i)**2)

end do

!====las impresiones resumidas (con n/p puntos en la red)=====

do i=0,n,p

  write(22,12)x(i),"",t,"",phi(i)
  write(67,24)x(i)
  write(67,24)phi(i)

end do !termina el ciclo de impresiones significativas

!====impresiones de errores, conservaciones, amplitudes y status=====

  write(53,16)j,"",t,"",i10-i1,"",i20-i2

  write(*,*)"etapa ",j," faltan ",int(jmax)-j,"; ",100.*( &
float(j)/jmax),"% calculado"

k=1
l=l+1

```

```
        end if

!====guardar la nueva etapa obtenida para continuar el algoritmo=====

        y=phi

        end do

        write(*,*)"se realizaron ",j," iteraciones, seleccionando ",l,"&
etapas para impresion"
        write(*,20)"la red con n=",n
        write(*,18)"h=",h
        write(*,18)"tau=",tau
        write(*,18)"tiempo dinamico del sistema de ",t
        write(*,18)"eps=",eps
        write(*,18)"gam=",gam
        write(*,18)"alfa=",alfa
        write(*,18)"xmin=",xmin
        write(*,18)"xmax=",xmax
        write(*,18)"amplitud=",400.*bet1**4
        write(*,18)"x1=",x1

        write(57,*)"resumen del experimento de propagacion de un soliton:"
        write(57,20)"n=",n
        write(57,18)"h=",h
        write(57,18)"xmin=",xmin
        write(57,18)"xmax=",xmax
        write(57,20)"jmax=",j
        write(57,18)"tmax=",float(j)*tau
        write(57,18)"tau=",tau
        write(57,18)"amplitud=",400.*bet1**4
        write(57,18)"x1=",x1
        write(57,18)"alfa=",alfa
        write(57,18)"eps=",eps
        write(57,18)"gam=",gam

!=====
```

```
12  format(F22.18,A,F22.18,A,F22.18)
16  format(I10,3(A,F22.18))
18  format(A,F22.18)
20  format(A,I10)
24  format(F22.18)

contains
  function skrt(u)
    real(kind=8) :: skrt,u
    if (u .lt. 0) then
      skrt=sqrt(-u)
    else
      skrt=sqrt(u)
    end if
  end function skrt

  function inicial(bet,pos,epsi,var)
    real(kind=8) :: amp,bet,pos,epsi,var,inicial
    amp=400.*bet**4
    inicial=amp/((cosh(bet*((var-pos)/epsi)))**4)
  end function inicial

end program GKDV
```

# Bibliografía

- [1] D. J. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, 5 (39):422–443, 1895.
- [2] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of ‘solitons’ in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6):240–243, 1965.
- [3] Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal, and Robert M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19(19):1095–1097, 1967.
- [4] Mark J. Ablowitz and Harvey Segur. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1st edition, 1981.
- [5] K. Naugolnykh and L. Ostrovsky. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1st edition, 1998.
- [6] Haruichi Washimi and Tosiya Taniuti. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude. *Physical Review Letters*, 17(19):996–998, 1966.
- [7] A. V. Faminskii. On an initial boundary value problem in a bounded domain for the generalized Korteweg-de Vries equation. *Functional Differential Equations*, 8 (1-2):183–194, 2001.
- [8] N. N. Rao, P. K. Shukla, and M. Y. Yu. Dust-acoustic waves in dusty plasmas. *Planet. Space Sci.*, 36(4):543–546, 1990.
- [9] Jerry L. Bona, P. E. Souganidis, and Walter A. Strauss. Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 411(1841):395–412, 1987.
- [10] F. Merle. Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):555–578, 2001.
- [11] V. G. Danilov and G. A. Omel’yanov. Weak asymptotics method and the interaction of infinitely narrow  $\delta$ -solitons. *Nonlinear Analysis*, 54:773–799, 2003.

- 
- [12] V. G. Danilov, G. A. Omel'yanov, and V. M. Shelkovich. Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 208:33–164, 2003.
- [13] V. P. Maslov and G. A. Omel'yanov. Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion. *Russian Math. Surveys*, (36):73–149, 1981.
- [14] Garcia-Alvarado M and Omel'yanov GA. Interaction of solitary waves for the generalized KdV equation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 17(8):3204–3218, 2011.
- [15] Hans Schamel. A modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons. *J. Plasma Physics*, 9:377–387, 1973.
- [16] V. P. Maslov and G. A. Omel'yanov. *Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE. I*. American Mathematical Society, 1st edition, 2001.
- [17] V. I. Karpman, J. P. Lynov, P. Michelsen, H. L. Pécseli, J. Juul Rasmussen, and V. A. Turikov. Modification of plasma solitons by resonant particles. *Physical Review Letters*, 43(3):210–214, 1979.
- [18] H. Ikezi. Experiments on ion-acoustic solitary waves. *The Physics of Fluids*, 16(10):1668–1675, 1973.
- [19] A. A. Vlasov. *J. Phys. U.S.S.R.*, 25(9), 1945.
- [20] L. D. Landau. *J. Phys. U.S.S.R.*, 25(10), 1946.
- [21] A. Luque and H. Schamel. Electrostatic trapping as a key to the dynamics of plasmas, fluids and other collective systems. *Physics Reports*, (415):261 – 359, 2005.
- [22] Hans Schamel. Stationary solitary, snoidal and sinusoidal ion acoustic waves. *J. Plasma Physics*, 14(10):905, 1972.
- [23] Hans L. Pécseli. Solitons and weakly nonlinear waves in plasmas. *Transactions on Plasma Science*, 13(2):53–86, 1985.
- [24] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press Inc., 2nd edition, 1980.
- [25] Andrei D. Polyanin and Valentin F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall/CRC, 2nd edition, 2002.
- [26] Philip Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd edition, 2002.