



UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA

PRODUCCIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES

por

OSCAR RENÉ SALCIDO VALLE

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del Grado de

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

Dirigida por:

Dr. Carlos A. Calcáneo Roldán

Universidad de Sonora

Hermosillo, México

Diciembre de 2013

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

Una vez más, tengo la oportunidad de agradecer a todas aquellas personas que de una manera influyeron en mí, para culminar con la realización de un nuevo trabajo.

Gracias a mis padres, por darme siempre su apoyo incondicional en todo momento, se que siempre contaré con ustedes.

Quiero agradecer al Dr. Chus Martin por la oportunidad que me brindó al recibirme en su grupo de investigación, donde aprendí nuevos conceptos sobre gravedad, al Dr. Julio Saucedo, por ser parte fundamental para la revisión de este trabajo donde me dio todo su apoyo.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Javier Cobos, por su gran colaboración dando sus observaciones, sugerencias, comentarios y preguntas.

A la Dra. Ma. Elena Tejeda y al Dr. Carlos Calcaneo, les agradezco el siempre estar ahí, no solo en este trabajo sino en muchos ambitos, tanto científicos como personales. Aunque estas lineas sean cortas, sabemos que es mucho más, lo cual sería otra tesis :P

A mi gran amor eaea broma jeje. Me es grato de nuevo agradecer a todos mis compañeros que siempre me aguantan en todo, y lo mejor es que no se enojan, me tienen sorprendido: Mayra, Carmen , Yofre Laborin, Dupret Santana, Sandra Urzua, Maurita, Mauricio, Galaviz, Sergio. El cual quiero cerrar con estas lineas de agradecimiento, y les pregunto de nuevo,Ya encontraron el recibo?

Contenido

Lista de Figuras	II
Introducción	1
1 Elementos de la Relatividad General	3
1.1. Curvatura y Ecuación de Einstein	3
1.2. Detectando Ondas Gravitacionales	8
1.3. Transversalidad de las Ondas Gravitatorias	11
2 Aproximación Lineal en Gravitación de Einstein	14
2.1. Solución a la Ecuación Linealizada de Einstein	14
2.1.1. Linealización a la Ecuación de Einstein	15
2.1.2. $T_{\alpha\beta} = 0$	18
2.1.3. $T_{\alpha\beta} \neq 0$	23
2.2. Producción de Ondas Gravitacionales	26
3 Radiación gravitacional de un sistema físico	28
3.1. Sistemas Binarios	28
3.2. Perturbación tensorial	30
3.3. Ondas perpendiculares al plano de las órbitas	33
3.4. Estimando el efecto de la perturbación	34
Conclusiones	36
Bibliografía	38

Lista de Figuras

1.1. Medición de la curvatura local	9
1.2. Polarización	12
3.1. Binaria eclipsante	29
3.2. Binaria pulsar	30
3.3. Sistema binario de estrellas.	31

Introducción

En este trabajo estudiaremos las ondas Gravitacionales producidas por un sistema de dos cuerpos de masa idéntica, girando en un plano.

Uno de los grandes logros de la Física del siglo XX fue la descripción de la Gravedad a través de la Teoría de la Relatividad General. De hecho, esta teoría ha permitido la descripción del campo gravitacional en la vecindad de la tierra con tal precisión que ha sido posible establecer la posición geográfica sobre la Tierra con errores de centímetros.

Una de las predicciones más importantes de la teoría es que al moverse los objetos masivos generan ondulaciones en el espaciotiempo que se propagan por éste, tal como se propagan las ondas mecánicas en un medio, o las ondas electromagnéticas en el espacio vacío. De hecho, es esta predicción la que ha llevado a algunos a señalar a la Relatividad General como una de las teorías con comprobación más precisa de la historia [1].

Por otra parte, cuando podamos detectar y resolver esta radiación nos permitirá observar directamente las regiones en el espacio en las cuales hay gran movimiento de masa, incluso en regiones de las cuales no podemos recibir radiación electromagnética.

La radiación gravitacional resulta entonces una oportunidad tanto para probar directamente la teoría como para abrir una nueva ventana de observación en el Universo. Además, con la entrada en funcionamiento de nuevos instrumentos para la detección de esta radiación, se volverá indispensable contar con buenas técnicas para la descripción de las señales recibidas [2]

Este trabajo está dividido en tres capítulos. Después de un breve resumen de los conocimientos indispensables para tratar el tema de la radiación gravitacional, en los primeros dos capítulos, en el capítulo III aplicamos la solución a un sistema sencillo que corresponde a un candidato natural para la emisión de radiación gravitacional.

Para todos los cálculos hemos considerado unidades tales que la velocidad de la luz en el vacío y la constante de gravedad no tienen unidades, esto es: $c \equiv 1$ y $G \equiv 1$.

Las cantidades tensoriales se escribirán en negritas (de tal manera que si \mathbf{A} es un tensor aparecerá en el texto como \mathbf{A}) mientras que las cantidades vectoriales en \mathbb{R}^3 se denotarán con una flecha encima (es decir si \mathbf{V} es un vector, entonces aparecerá en el texto como \vec{V}). Para referirnos a las componentes de tensores usaremos índices griegos que correrán de 0 a 3 (es decir $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$), mientras que las letras latinas en minúscula se reservarán para la parte espacial y correrán de 1 a 3 (es decir $a, b, \dots, i, j, k, \dots = 1, 2, 3$). Por lo tanto, en el texto se denotarán los tensores y sus componentes de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = (A^0, \vec{A}) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

(este ejemplo es para vectores). Así, en coordenadas cartesianas, un punto del espacio-tiempo tendrá las siguientes componentes:

$$\mathbf{x} = (x^0, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

Por otra parte, cuando usemos un subíndice latino en mayúscula éste denotará una etiqueta, por ejemplo al referirnos a: “Dos vectores espaciales equis A y equis B”, escribiremos: “Dos vectores \vec{x}_A y \vec{x}_B ”.

El tensor métrico para el espaciotiempo plano tiene las siguientes componentes

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando en una expresión aparezcan índices repetidos se tomará la convención de que se suma sobre todos sus posibles valores, así:

$$A_\alpha B^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 A_\alpha B^\alpha \quad \text{y} \quad A_i B^i = \sum_{i=1}^3 A_i B^i$$

Para designar la derivada con respecto a una coordenada intercambiaremos cualquiera de las siguientes notaciones:

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} = \partial_\beta A^\alpha = A^\alpha_{,\beta}$$

Capítulo 1

Elementos de la Relatividad General

La Teoría de gravitación, en particular la Relatividad General, introdujo importantes modificaciones a la Ley de Newton de la Gravitación Universal. Ésta teoría conoció su primer éxito al explicar con gran precisión el avance en el perihelio de la órbita de Mercurio; pero además esta teoría predecía dos importantes fenómenos no sospechados por la Ley de Newton: la desviación de los rayos luminosos al pasar cerca de un objeto celeste, tal como nuestro Sol, y la posible propagación del propio campo gravitatorio justamente a la velocidad de la luz, teniendo una gran similitud con las ondas electromagnéticas.

La verificación de la desviación de los rayos luminosos procedentes de una estrella lejana concluyó dando así una nueva victoria a la teoría de Einstein. Sin embargo, la verificación experimental de la propagación del campo gravitatorio, a la manera de ondas electromagnéticas, es una cuestión de hoy en día y permanece todavía pendiente. No obstante, los avances tecnológicos recientes permiten asegurar que su detección directa es algo que se producirá en los próximos años.

1.1. Curvatura y Ecuación de Einstein

La Teoría clásica de la Gravitación afirma que los cuerpos celestes se atraen en razón directa del producto de sus masas y en razón inversa del cuadrado de la distancia que los separa. Esto significa que la fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa M por otro cuerpo de masa m viene dada por:

$$\vec{F} = -\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

donde M y m representan las masas gravitatorias, con M la masa atractora.

En la teoría de Maxwell, los agentes que generan al campo electromagnético son las cargas eléctricas, produciéndose situaciones distintas según que estas cargas estén en reposo, se muevan con velocidad constante o posean un movimiento acelerado. En el primer caso generan un campo eléctrico del tipo coulombiano absolutamente similar al gravitatorio de Newton. En el segundo caso, cuando las cargas se mueven a velocidad constante, además del campo eléctrico aparece un campo magnético. En esta situación no se tiene un similar en la teoría de Newton pues las masas en movimiento no generan una fuerza añadida. Sin embargo en el marco de la Relatividad General las masas en movimiento, deforman la geometría del espaciotiempo. Finalmente, cuando las cargas se aceleran, los campos eléctricos y magnéticos que generan se propagan a la velocidad de la luz, dando lugar a las ondas electromagnéticas. La Relatividad General también predice que, cuando existen aceleraciones relativas entre las masas de un sistema, además de deformar la geometría del espaciotiempo, se originan un nuevo tipo de pequeñas ondulaciones, lejos del centro atractor. Estas ondulaciones son llamadas Gravitacionales o Gravitatorias.

En la teoría Newtoniana, la expresión para el campo Gravitatorio es

$$\vec{F} = -m_G \nabla \Phi_G$$

en la cual la fuerza gravitacional \vec{F} que experimenta una masa m_G es producida por el campo $\nabla \Phi_G$. Suponiendo que es la única fuerza actuando sobre el cuerpo, entonces:

$$-m_G \nabla \Phi_G = m_i \vec{a}.$$

donde m_i es la masa inercial que se opone a los cambios en el estado de movimiento. Así la aceleración que sufre el cuerpo puede escribirse

$$\vec{a} = -\frac{m_G}{m_i} \nabla \Phi_G.$$

Resulta que, cualquier cuerpo se mueva con la misma aceleración en un mismo campo de Gravitación uniforme, independientemente del valor de $\frac{m_G}{m_i}$. Esta propiedad diferencia a la interacción Gravitatoria de otra conocida.

En Relatividad Especial las fuerzas de inercia que aparecen en un sistema de referencia no inercial, también tienen la propiedad anterior, por lo que estos sistemas de referencia

deben ser en algún sentido equivalentes a los campos de gravitación. Esta afirmación se conoce como el Principio de Equivalencia.

La expresión para describir una distancia en Relatividad Especial, es la siguiente.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.1)$$

la cual es invariante a cambios de sistema de referencia inercial, pero no ocurre lo mismo si pasamos a un sistema de referencia no inercial.

La ecuación (1.1) describe una métrica para el espaciotiempo plano. Ahora veremos brevemente como sería la geometría en el espaciotiempo en presencia de materia. El tensor métrico es de gran importancia debido a que describe la geometría del espaciotiempo y fija las geodésicas de las partículas y los fotones, por lo tanto resulta indispensable para la descripción de la dinámica.

Un resultado principal de la Relatividad General es que la presencia de masa en el espaciotiempo produce curvatura y que a su vez la curvatura le dice a la masa como acomodarse. Además, en Relatividad Especial reconocemos a la masa como otra forma de energía, así es importante tomar en cuenta, para la deformación mencionada, el total de densidad de energía en una región del espaciotiempo. Entonces podemos decir: *la medida local de curvatura del espaciotiempo proviene de la medida de densidad de materia y energía*, lo cual resúmen el contenido Físico de la ecuación de Einstein para el campo gravitacional:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

donde $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de curvatura de Einstein, que está compuesto por el tensor de Ricci y el escalar de Ricci.

El escalar de Ricci se contruye mediante la contracción completa del tensor de Ricci de la siguiente manera:

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta},$$

mientras que el tensor de Ricci, $R_{\alpha\beta}$, está dado como una función de las conecciones

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\sigma}^\sigma - \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \quad (1.3)$$

que a su vez están definidas por los símbolos de Christoffel, a partir de las derivadas parciales de las componentes del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}). \quad (1.4)$$

Por otro lado $T_{\alpha\beta}$ representa la densidad de energía-momento de la fuente que genera deformación en el espaciotiempo. En este trabajo, estudiaremos deformaciones con las siguientes características:

- Lejos de la fuente; es decir el tamaño de la fuente es muy pequeño en relación con la distancia donde se calcula el campo, $r \gg R$
- La velocidad de la fuente que genera el campo, es pequeña comparada con c .

A este campo le llamaremos *ondas gravitacionales o gravitatorias*. En el desarrollo de este trabajo veremos que su efecto es en los ejes transversales y además que pueden ser detectadas por el movimiento relativo de masas prueba.

Para saber que son estas ondas recordemos que, en un espaciotiempo libre de la interacción gravitacional, la métrica es la de la Relatividad Especial (o métrica de Minkowski),

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

En presencia de un campo gravitacional la métrica $g_{\alpha\beta}$ no es tan sencilla. Si el campo que buscamos describir es débil, entonces prácticamente podemos caer en la métrica de un espaciotiempo plano; es decir que la diferencia entre la métrica real y la métrica del espaciotiempo plano es muy pequeña:

$$|g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}| \ll 1.$$

Podemos notar que el campo gravitatorio no es débil en cualquier parte. Por ejemplo, el campo de una estrella de neutrones, es fuerte en una región del espacio cercana a la estrella, pero fuera de esta región es débil. En general, tenemos que lejos de las fuentes del campo gravitacional

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta} \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow \infty$$

es decir, lejos de las fuentes recuperamos a la Relatividad Especial.

Así, lejos de cualquier centro de atracción gravitacional, podremos aproximar la métrica haciendo un desarrollo en serie

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + g'_{\alpha\beta} + g''_{\alpha\beta} + \dots$$

donde $g'_{\alpha\beta}$ es el término a primer orden, $g''_{\alpha\beta}$ el correspondiente a segundo orden, y así sucesivamente.

Nos interesa describir a la radiación gravitacional, la cual afectará el espaciotiempo. Podemos considerar que el efecto de la onda gravitacional consiste en perturbar el espaciotiempo, y resulta que su efecto disminuye conforme nos alejamos de la fuente que la produce. De esta manera, para describir a la radiación gravitacional podemos tomar la aproximación a primer orden y despreciar el resto de los términos, de tal manera que la métrica quede expresada como

$$g_{\alpha\beta}(x) \approx \eta_{\alpha\beta} + g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x) \quad (1.5)$$

donde $h_{\alpha\beta}$ son pequeñas perturbaciones de la métrica en el espacio plano y éstas describen a la onda gravitacional.

Un ejemplo de la onda gravitacional plana propagándose en el espaciotiempo en la dirección z , está dada por la siguiente perturbación de la métrica

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(t - z), \quad (1.6)$$

donde $f(t-z)$ es cualquier función de $t-z$ siempre que se cumpla que el tamaño $|f(t-z)| \ll 1$. Con esto el elemento de línea es

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + f(t - z)]dx^2 + [1 - f(t - z)]dy^2 + dz^2 \quad (1.7)$$

La geometría de (1.6) y (1.7) representa la curvatura de una onda propagándose en la dirección positiva, donde la amplitud y la forma de la perturbación propagándose en la curvatura está determinada por la función f . Las expresiones $h_{\alpha\beta}$ y $f(t-z)$ son cantidades sin dimensión.

La métrica (1.6) y (1.7) no es la solución exacta a la ecuación de Einstein. Para ello se tiene que hacer un desarrollo a primer orden en amplitud de la onda; es decir, es necesario hacer una linealización a la onda gravitacional. Éstas son una muy buena aproximación a la solución de la ecuación de Einstein, que se verá en el capítulo siguiente.

1.2. Detectando Ondas Gravitacionales

Para poder medir la curvatura analicemos el siguiente experimento pensado, relativo a dos sistemas de referencia: uno de ellos se encuentra en el espacio vacío, mientras que el otro cayendo libremente hacia el centro de la tierra. Al interior de ambos sistemas se encuentra un observador con masas prueba formando un patrón circular (Figura 1.1 parte izquierda). En el sistema de referencia que cae libremente, debido a que la atracción gravitacional es distinta para cada una de las masas, después de un tiempo t , las masas prueba modifican su patrón circular a uno elíptico (Figura 1.1, parte derecha). Para el sistema de referencia que se encuentra en el espacio vacío las masas prueba permanecen sin cambiar su patrón circular. Esta distorsión es una medición directa de la curvatura del espaciotiempo local, en la que obligatoriamente necesitamos más de una masa para poder detectarla, por mas mínima que esta sea.

Entonces, ¿cómo podríamos detectar la propagación de las ondas en el espaciotiempo curvo? La respuesta es la misma, la curvatura del espaciotiempo es detectable a través del movimiento de masas prueba, masas que se mueven a lo largo de la geodésica del espaciotiempo curvado, pero se escojen masas lo suficientemente pequeñas que producen en el espaciotiempo una curvatura despreciable y, como vimos anteriormente, se requieren al menos dos masas prueba para detectar la onda gravitacional (de hecho para cualquier curvatura del espaciotiempo).

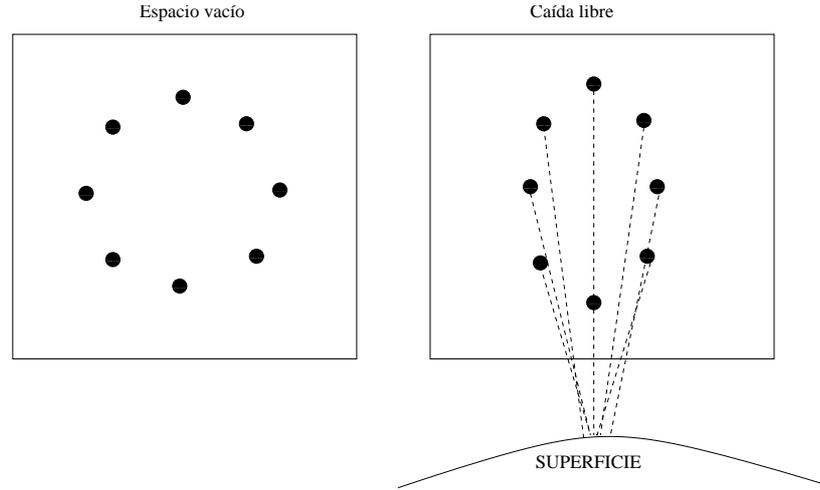


Figura 1.1: Esta figura nos muestra dos sistemas de referencia, uno en el espacio vacío y otro que cae libremente hacia el centro de la tierra, inicialmente ambos con masas prueba formando un arreglo circular. Después de un tiempo t , el arreglo geométrico que se encuentra en el sistema en caída libre, es deformado en una elipse debido a las diferentes aceleraciones que tienen las masas prueba, es por ello que el observador en este sistema puede detectar las aceleraciones de marea, si el laboratorio es suficientemente grande.

Para hacer esta idea cuantitativa, consideremos un paquete de onda gravitacional de la forma $h_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}f(t - z)$, propagándose en la dirección z , donde $f(t - z)$ es cualquier función. Antes de que la onda pase tendremos a dos masas prueba, A y B , en reposo y en las coordenadas (t, x, y, z) . Por simplicidad escogemos que A se encuentre en el origen y B desplazada a una separación espacial (x_B, y_B, z_B) de tal manera que antes de que la onda pase tenemos

$$\vec{x}_A(\tau) = (0, 0, 0), \quad \text{y} \quad \vec{x}_B(\tau) = (x_B, y_B, z_B).$$

Debido a que están en reposo, la cuatro velocidad de ambas masas es

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B = (1, \vec{0})$$

Para calcular el movimiento de ambas masas, haremos uso de la ecuación de la Geodésica, la cual; para las coordenadas espaciales, toma la forma:

$$\frac{d^2x^i(\tau)}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (1.8)$$

Dado que las ondas gravitacionales son pequeñas tomaremos cambios a primer orden en la amplitud, $\delta x^i(\tau)$ y la ecuación de la geodésica es ahora:

$$\frac{d^2\delta x^i(\tau)}{d\tau^2} = -\delta\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{d\delta x^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\delta x^\beta}{d\tau} \quad (1.9)$$

Al analizar la curvatura en el espaciotiempo, observamos que localmente nos encontramos en un plano, por eso $\Gamma_{\alpha\beta}^i = 0$, pero no necesariamente observaremos lo mismo para $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^i$, ya que si nos movemos podemos encontrar curvatura. Es por esta razón que la ecuación de movimiento para este caso queda

$$\frac{d^2\delta x^i(\tau)}{d\tau^2} = -\delta\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\delta\Gamma_{\alpha\beta}^i u^\alpha u^\beta \quad (1.10)$$

Como las cuatro velocidades solo tienen componentes en la parte temporal, es decir solo sobrevive el término $\alpha = \beta = 0$, o bien, $u^0 = 1$

$$\frac{d^2\delta x^i(\tau)}{d\tau^2} = -\delta\Gamma_{00}^i.$$

A partir de la ecuación (1.4) podemos calcular los símbolos de Christoffel necesarios:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{i\mu}(g_{\mu 0,0} + g_{00,\mu} - g_{0\mu,0})$$

que, recordando la forma de la métrica perturbada (1.5), se pueden volver escribir

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{i\mu}(h_{\mu 0,0} + h_{00,\mu} - h_{0\mu,0})$$

y así el término $\delta\Gamma_{00}^i$ se puede evaluar de la métrica 1.7 en la que el resultado da cero y con ello

$$\frac{d^2\delta x^i(\tau)}{d\tau^2} = 0 \quad (1.11)$$

Inicialmente, $\delta x^i = 0$ y las masas prueba están en reposo, por lo tanto $\frac{d(\delta x^i)}{d\tau} = 0$. Esto implica que de la ecuación (1.11), el cambio en las coordenadas es $\delta x^i(\tau) = 0$ para todas las masas, que en este caso

$$\delta x_A^i(\tau) = \delta x_B^i(\tau) = 0$$

Por lo tanto las coordenadas de las masas permanecen sin cambiar cuando la onda pasa.

Por otra parte la distancia entre las masas prueba si puede cambiar con el tiempo, para cuantificarlo continuamos con el ejemplo de una masa colocada en el origen y otra a

una distancia L_* sobre el eje de las x . Podemos volver a usar la métrica (1.5) para calcular la distancia entre estas dos masas, puesto que solo nos interesa el eje x , ésta se calcula:

$$L = \int_0^{L_*} \sqrt{g_{11}} dx = \int_0^{L_*} \sqrt{1 + h_{11}} dx$$

como $h \ll 1$ y no depende de la coordenada x , podemos aproximar la distancia con la siguiente función

$$L \approx L_* \left(1 + \frac{1}{2} h_{11}\right) = L_* \left(1 + \frac{1}{2} f(t - z)\right)$$

la cual, como vemos, es función explícita del tiempo.

Estos resultados se visualizan imaginando las coordenadas dibujadas sobre un eje elástico, mismo que se estira o se encoge de acuerdo a la función $f(t - z)$. Es así como la distancia entre las masas varía, a pesar de que las coordenadas se mantienen fijas.

1.3. Transversalidad de las Ondas Gravitatorias

En la sección anterior vimos que las ondas gravitatorias se propagan sobre el espacio-tiempo generando en él pequeñas ondulaciones lejos de la fuente, modificando así la métrica del espaciotiempo plano. A estas ondulaciones se les conoce como perturbaciones y su efecto es en los ejes transversales al eje de propagación, por ejemplo: $h_{\alpha\beta}(t, z)$, es una onda gravitatoria que se desplaza en el eje z .

Ahora bien, se pueden detectar estas ondas gravitatorias por la curvatura del espacio-tiempo o masas que se mueven a lo largo de una geodésica, donde las masas producen una curvatura despreciable. El movimiento de una masa prueba no es suficiente para detectar estas ondas gravitatorias, de tal forma que analizaremos primero brevemente las ondas gravitatorias muy lejos de sus fuentes donde no solo consideraremos dos masas prueba, sino muchas de ellas. Imaginemos primero 8 masas prueba, inicialmente colocadas en un círculo en el plano x, y . Escogemos como origen para este arreglo el centro del círculo y a una onda gravitacional plana de la forma de (1.7) con $f(t - z) = a \sin[\omega(t - z)]$, es decir que pasa en la dirección z .

Como ya vimos, las coordenadas (x, y, z) , permanecen sin cambiar, en particular las masas prueba permanecen en el plano x, y . Cada una de ellas sigue una geodésica cuya

forma proviene de la métrica (1.7). Para calcular la distancia, es necesario introducir nuevas coordenadas (X, Y) definidas por

$$X = \left(1 + \frac{1}{2}a \sin \omega t\right)x \quad Y = \left(1 - \frac{1}{2}a \sin \omega t\right)y \quad (1.12)$$

El elemento de línea en el plano $x - y$ en estas nuevas coordenadas se puede calcular de tal manera que tenemos el mismo que en el plano euclideo $dX^2 + dY^2$ mas correcciones de orden a . En el plano de coordenadas $x - y$ de las masas prueba no cambian en el tiempo, pero al introducir las nuevas coordenadas $X - Y$, éstas si varían con t dadas por (1.12). Antes de que la onda pase, todas las masas permanecen en su lugar, sin embargo al viajar por el eje de propagación, ésta producirá efectos en los ejes transversales. Generando un patron de movimiento (elipse), entre todas las partículas que están alrededor del centro, de tal forma que cuando la onda pasa, el círculo que forman estas masas prueba, se acorta en la dirección X y si expande en la dirección Y . Un tiempo después las masas se separan en la dirección X y se acercan el la dirección Y , tal como se muestra en la Figura 1.2.

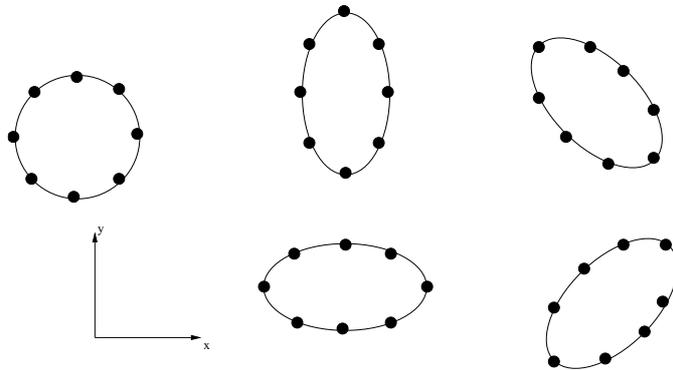


Figura 1.2: En esta figura mostramos un esquema donde el arreglo circular cambia a uno elíptico cuando la onda pasa después de un tiempo t . Las elipses de la parte central corresponden a una polarización de la forma $+$, mientras que las del lado derecho corresponden a \times . En este caso la dirección de la onda es perpendicular al plano $x - y$.

Este patrón de oscilación es característico de la radiación gravitatoria. La métrica (1.7) no es la mas general posible. Es un ejemplo de una de las dos polarizaciones independientes de la onda gravitatoria. Para encontrar la otra polarización, solo imaginemos rotado los

ejes $x - y$ a un ángulo θ . Para la relación entre las coordenadas (x,y) y las coordenadas rotadas (x',y') , con $\phi = -\pi/4$, entonces

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

Sustituyendo estas transformaciones en la ecuación (1.7), nos muestra como se transforma la métrica. La parte del espaciotiempo plano, $\eta_{\alpha\beta}$, permanece sin cambios para cualquier rotación, entonces podemos obtener

$$h_{1'1'} = 0 \quad h_{1'2'} = h_{2'1'} = h_{11} = -h_{22} \quad h_{2'2'} = 0$$

donde $h_{\alpha\beta}$, son perturbaciones a la métrica del espaciotiempo plano (mismas que abordaremos con mas detalles en el capítulo siguiente). Pero no son físicamente distinguibles las nuevas coordenadas de las viejas. Solo hemos encontrado una segunda polarización posible para la onda, que podremos expresar en términos de $h_{\alpha\beta}$, y toma la forma

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(t - z)$$

Para poder describir a una onda gravitatoria propagandose en la dirección z positiva, donde la onda se encuentra lejos del emisor, tomamos:

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_+(t - z) & f_\times(t - z) & 0 \\ 0 & f_\times(t - z) & -f_+(t - z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta es una onda gravitatoria linealizada, propagandose en dirección z . Las únicas componentes no nulas corresponden al punto ortogonal de la dirección de propagación, lo que indica que las ondas gravitatorias son transversales y la traza de la matriz ($h_{\alpha\beta}$) es nula. Por esta razón la forma de la perturbación se conoce como *transversa sin traza* (en inglés *transverse traceless*) o simplemente TT.

Capítulo 2

Aproximación Lineal en Gravitación de Einstein

En el capítulo anterior introducimos una forma de las ondas gravitacionales, a través de la ecuación (1.7), sin embargo, esta no es la solución más exacta a la ecuación de Einstein. Para encontrar soluciones es necesario resolver (1.2), lo cual no resulta tan sencillo ya que debemos resolver un sistema de 10 ecuaciones diferenciales acopladas para las 10 componentes $g_{\alpha\beta}$ (cabe mencionar que $T^{\alpha\beta}$ y $G^{\alpha\beta}$ son simétricos, es por ello, que no es necesario calcular las 16 ecuaciones). Hay que recordar que estas son las componentes de un tensor en algún sistema de coordenadas, un cambio de coordenadas implicaría un cambio en ellas. En particular hay cuatro coordenadas, lo que significa cuatro grados de libertad entre las diez componentes. Estas consideraciones son necesarias si queremos resolver la ecuación de Einstein. En este capítulo resolveremos esta ecuación para el límite de campo gravitatorio débil, es decir, lejos de las fuentes que lo provocan.

2.1. Solución a la Ecuación Linealizada de Einstein

Para encontrar una mejor solución a (1.2), es necesario resolverla. Sin embargo no existe una regla general para hacerlo ya que existen un gran número de técnicas posibles para situaciones similares. En particular, nosotros haremos un análisis completo para encontrar una solución a la ecuación de Einstein donde la geometría del espaciotiempo difiere ligeramente del espaciotiempo plano; esto es válido ya que consideraremos el efecto de las ondas lejos de los centros atradores que las produjeron. Primero linealizaremos la ecuación de Einstein en el vacío y luego resolveremos el caso en el cual no hay fuentes gravitacionales (el caso homogéneo, $T_{\alpha\beta} = 0$) para después incluir las fuentes que producen las perturbaciones ($T_{\alpha\beta} \neq 0$, el caso con “corrientes”).

2.1.1. Linealización a la Ecuación de Einstein

Reescribamos la ecuación (1.2) donde el lado derecho sea cero, es decir en ausencia de masa/energía, entonces

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0 \quad (2.1)$$

ordenamos de manera diferente y contraemos con $g^{\alpha\beta}$ de tal forma que podamos tener una expresión en la cual podamos comparar términos

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}R$$

ahora bien agrupamos términos semejantes

$$(1 - \frac{1}{2}g)R = 0$$

Sabemos que el término $(1 - \frac{1}{2}g) \neq 0$, por lo tanto, debe cumplirse que $R = 0$, y la ecuación para el campo gravitatorio queda:

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

considerando que el lado izquierdo de la ecuación para el campo está definido por la expresión (1.3):

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\Gamma_{\gamma\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}$$

analizamos a primer orden, despreciamos los terminos cuadráticos y tenemos finalmente que la ecuación para el campo se reduce a

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} = 0 \quad (2.2)$$

Sustituiremos la ecuación (1.5) en (2.2) y tomaremos en cuenta la forma contravariante de la métrica, $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ y analizando por separado la ecuación (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \frac{1}{2}(\eta^{\gamma\delta} - h^{\gamma\delta})(-\eta_{\alpha\beta,\delta} - h_{\alpha\beta,\delta} + \eta_{\delta\alpha,\beta} + h_{\delta\alpha,\beta} + \eta_{\beta\delta,\alpha} + h_{\beta\delta,\alpha}) \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma} &= \frac{1}{2}(\eta^{\gamma\delta} - h^{\gamma\delta})(-\eta_{\alpha\gamma,\delta} - h_{\alpha\gamma,\delta} + \eta_{\delta\alpha,\gamma} + h_{\delta\alpha,\gamma} + \eta_{\gamma\delta,\alpha} + h_{\gamma\delta,\alpha}). \end{aligned}$$

Despreciando los términos cuadráticos y recordando que la derivada de $\eta_{\alpha\beta}$ es cero, los términos de la ecuación (2.2) quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(-h_{\alpha\beta,\delta} + h_{\delta\alpha,\beta} + h_{\beta\delta,\alpha}) \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma} &= \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(-h_{\alpha\gamma,\delta} + h_{\delta\alpha,\gamma} + h_{\gamma\delta,\alpha}). \end{aligned}$$

Ahora calculamos las derivadas correspondientes para tener

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} &= -\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta,\delta\gamma} + \left(\frac{1}{2}h_{\alpha,\beta}^{\gamma} + \frac{1}{2}h_{\beta,\alpha}^{\gamma}\right)_{,\gamma} \\ \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} &= -\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}h_{\alpha\gamma,\delta\beta} + \left(\frac{1}{2}h_{\alpha,\gamma}^{\gamma} + \frac{1}{2}h_{\gamma,\alpha}^{\gamma}\right)_{,\beta}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el d'Alambertiano es de la forma $\square = \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}$, la ecuación para el campo (2.2) queda de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}[-\square h_{\alpha\beta} + (h_{\alpha,\beta}^{\gamma} + h_{\beta,\alpha}^{\gamma})_{,\gamma} + (h_{\alpha,\delta}^{\delta} - h_{\alpha,\gamma}^{\gamma} - h_{\gamma,\alpha}^{\gamma})_{,\beta}] = 0.$$

Observemos que podemos eliminar los dos primeros términos del segundo parentesis y rescribiendo el último término de la forma $-h_{\gamma,\alpha\beta}^{\gamma} = -\frac{1}{2}h_{\gamma,\alpha\beta}^{\gamma} - \frac{1}{2}h_{\gamma,\alpha\beta}^{\gamma}$

$$\frac{1}{2}[-\square h_{\alpha\beta} + h_{\alpha,\beta\gamma}^{\gamma} - \frac{1}{2}h_{\gamma,\alpha\beta}^{\gamma} + h_{\beta,\alpha\gamma}^{\gamma} - \frac{1}{2}h_{\gamma,\alpha\beta}^{\gamma}] = 0.$$

Ahora simplificaremos la ecuación, en la cual definiremos a

$$V_{\alpha} = h_{\alpha,\gamma}^{\gamma} - \frac{1}{2}h_{\gamma,\alpha}^{\gamma} \quad (2.3)$$

$$V_{\beta} = h_{\beta,\gamma}^{\gamma} - \frac{1}{2}h_{\gamma,\beta}^{\gamma}$$

Con esta definición escribimos el tensor de Ricci linealizado en el vacío de modo que la ecuación para el campo gravitacional en estas condiciones es:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-\square h_{\alpha\beta} + V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha}) = 0. \quad (2.4)$$

Cuando se trabaja en la aproximación lineal, las contribuciones aparecen debido a cambios infinitesimales dados por $h_{\alpha\beta}$, mientras que $\eta_{\alpha\beta}$ queda sin cambiar. Para ver esto, consideremos un cambio de coordenadas de la forma

$$x^{\delta'} = x^{\delta} + \xi^{\delta},$$

donde ξ^{δ} son cuatro funciones arbitrarias, pero del mismo tamaño que la perturbación de la métrica $h_{\alpha\beta}$, por lo que no importa si tomamos las coordenadas nuevas o viejas. Esto significa que $x^{\delta'} \cong x^{\delta}$. A este tipo de cambios en las coordenadas les llamamos *transformaciones de norma*.

En general, una transformación de coordenadas en la métrica se escribe:

$$\mathbf{g}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\beta'}} g_{\delta\gamma} \quad (2.5)$$

Con esto, debemos transformar la siguiente ecuación

$$x^\delta = x^{\delta'} - \xi^\delta$$

de tal manera que la transformación queda

$$\frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^{\alpha'}} - \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^{\alpha'}} \approx \delta_\alpha^{\delta'} - \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^{\alpha'}} \quad (2.6)$$

(la última aproximación se puede hacer debido a que hemos considerado perturbaciones muy pequeñas, $\xi^\delta \ll 1$). Ahora si, transformemos la ecuación (2.5) usando el último término de la ecuación (2.6) de tal manera que obtenemos

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\delta - \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\gamma - \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\beta} \right) (\eta_{\delta\gamma} + h_{\delta\gamma})$$

Multiplicando los últimos dos paréntesis, aplicamos la función delta y separamos los términos cuadráticos para encontrar

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\delta - \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\alpha} \right) (\eta_{\delta\beta} + h_{\delta\beta} - \frac{\partial \xi_\delta}{\partial x^\beta} + O(h^2))$$

Ahora bien, desarrollamos la multiplicación, aplicando de nuevo la delta y sustituyendo la forma explícita de $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$, recordando que $\eta_{\alpha\beta}$ tiene la misma forma en cualquier conjunto de coordenadas, tenemos

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \mathbf{h}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Por lo que obtenemos, después de la transformación de norma:

$$\mathbf{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha. \quad (2.7)$$

Hemos encontrado la relación que existe entre unas coordenadas y otras. Ahora bien, ya que ξ^α son 4 funciones arbitrarias, pero pequeñas, podemos elegir las de tal manera que simplifiquen la forma de $\mathbf{h}_{\alpha\beta}$, esto es lo mismo que escoger la norma. En particular definimos 4 condiciones nuevas, $\mathfrak{V}_{\alpha\beta}$, de igual forma que V_α , pero en el nuevo sistema de

coordenadas obtenido mediante la transformación de norma. Además, podemos escoger la norma tal que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\mathfrak{V}_\alpha(x) = 0$$

Esta última permite escribir la ecuación para el campo en otras coordenadas de la siguiente manera $\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\square h_{\alpha\beta}$. Pero ésta no es aún la solución a la perturbación $h_{\alpha\beta}$. Como aún no hemos escogido coordenadas, entonces declararemos un sistema en las que se cumpla $\mathfrak{V}_\alpha(x) = 0$.

El análisis anterior permite decir que la ecuación de Einstein tiene como solución a la ecuación de la onda

$$\square h_{\alpha\beta}(x) = 0, \quad (2.8)$$

junto con cuatro condiciones de norma para $h_{\alpha\beta}$

$$V_\alpha(x) \equiv \partial_\beta h_\alpha^\beta(x) - \frac{1}{2}\partial_\alpha h_\beta^\beta(x) = 0 \quad (2.9)$$

2.1.2. $T_{\alpha\beta} = 0$

Las perturbaciones de la métrica están determinadas por la ecuación de la onda (2.8) y sus cuatro condiciones de norma (2.9). Para visualizar la forma de la solución, consideraremos primero la ecuación de la onda de una función escalar en el espaciotiempo plano

$$\square f(x) \equiv \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = -\frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} + \nabla^2 f = 0$$

proponemos una solución de la forma

$$f(x) = ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

donde hemos de tomar en cuenta que, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = (-k^0 t + \vec{k}\cdot\vec{x})$, con esto, podemos reescribir la ecuación

$$-a(k^0)^2 e^{i(-k^0 t + \vec{k}\cdot\vec{x})} + [a(k^1)^2 + a(k^2)^2 + a(k^3)^2] e^{i(-k^0 t + \vec{k}\cdot\vec{x})} = 0,$$

agrupando llegamos a

$$ae^{i(-k^0 t + \vec{k}\cdot\vec{x})} [(-k^0)^2 + (k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2] = 0$$

y finalmente

$$\square f(x) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})f(x) = ae^{i(-k^0t + \vec{k} \cdot \vec{x})}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = 0. \quad (2.10)$$

Aquí \mathbf{x} es el cuatrovector en el espacio plano, con componentes x^α y \mathbf{k} es un vector de onda en este mismo espacio. Para analizar la ecuación (2.10), empecemos por reconocer que la solución a la ecuación homogénea requiere $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$, para garantizar soluciones no triviales, entonces

$$(k^0)^2 = |\vec{k}|^2 = (k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2$$

asociamos $k^0 = \omega$ y proponemos la solución para $f(x)$

$$f(x) = a \cos(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x} + \delta)$$

Identificamos a esta solución como una onda de frecuencia $\omega = |\vec{k}|$ y longitud de onda $\frac{2\pi}{|\vec{k}|}$, por lo tanto la velocidad de la onda es $v = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = 1$ (una onda que se desplaza $|\vec{k}|$ en un tiempo $\frac{1}{\omega}$). Con esto podemos escribir la solución general a la ecuación de la onda

$$f(x) = \int a(\vec{k})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \quad (2.11)$$

La integral es sobre todos los valores de \vec{k} , es decir, k^i para valores de $[-\infty, \infty]$ y $a(\vec{k})$ son amplitudes arbitrarias complejas. Para las soluciones reales tomaremos solo la parte real.

En el caso de la radiación gravitacional, tenemos 10 ecuaciones iguales a la anterior, por lo tanto proponemos soluciones de la misma forma:

$$h_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Ahora verificamos las condiciones de norma para la transformación. Si ésta es solución, deben ser las mismas en cualquier sistema de coordenadas, junto con sus cuatro condiciones. Insertemos (2.7) en (2.9) y veamos las condiciones para ξ , asumiendo que se cumple la condición de norma

$$V_\alpha(x) = 0.$$

Antes de empezar subiremos índices, queremos

$$\mathfrak{h}_\alpha^\beta = \eta^{\beta\gamma}\mathfrak{h}_{\alpha\gamma} = \eta^{\beta\gamma}(h_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\xi_\gamma - \partial_\gamma\xi_\alpha) \quad (2.12)$$

$$\mathfrak{h}_\beta^\beta = \eta^{\gamma\beta}\mathfrak{h}_{\gamma\beta} = \eta^{\gamma\beta}(h_{\gamma\beta} - \partial_\gamma\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\gamma), \quad (2.13)$$

y buscamos que $\mathfrak{V}_\alpha = 0$ con

$$\mathfrak{V}_\alpha = \partial_\beta \mathfrak{h}_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \partial_\alpha \mathfrak{h}_\beta^\beta = 0. \quad (2.14)$$

Reescribimos (2.14), haciendo uso de (2.12) y (2.13):

$$\mathfrak{V}_\alpha = \partial_\beta [\eta^{\beta\gamma} (h_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \xi_\gamma - \partial_\gamma \xi_\alpha) - \frac{1}{2} \partial_\alpha [\eta^{\gamma\beta} (h_{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\gamma)]] = 0$$

y desarrollamos la parte izquierda término a término para analizarla:

$$\mathfrak{V}_\alpha = (\partial_\beta h_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \partial_\alpha h_\beta^\beta) - \partial_\beta \eta^{\beta\gamma} \partial_\alpha \xi_\gamma - \partial_\beta \eta^{\beta\gamma} \partial_\gamma \xi_\alpha + \frac{1}{2} \partial_\alpha \eta^{\gamma\beta} \partial_\gamma \xi_\beta + \frac{1}{2} \partial_\alpha \eta^{\gamma\beta} \partial_\beta \xi_\gamma \quad (2.15)$$

Para el análisis veremos cada término por separado. Por una parte, identificamos que el término entre parentesis es V_α , por otra, recordemos que el d'Alambertiano se puede escribir de la forma $\square f = \partial^\alpha \partial_\alpha f$ o también $\square f = \partial_\alpha \partial_\beta \eta^{\alpha\beta} f$. Con ésto los términos son:

$$-\partial_\beta \eta^{\beta\gamma} \partial_\alpha \xi_\gamma = -\partial^\gamma \partial_\alpha \xi_\gamma, \quad (2.16)$$

$$\partial_\beta \eta^{\beta\gamma} \partial_\gamma \xi_\alpha = -\partial^\gamma \partial_\gamma \xi_\alpha = -\square \xi_\alpha, \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{2} \partial_\alpha \eta^{\gamma\beta} \partial_\gamma \xi_\beta = \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\beta \xi_\beta = \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\gamma \xi_\gamma, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2} \partial_\alpha \eta^{\gamma\beta} \partial_\beta \xi_\gamma = \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\gamma \xi_\gamma, \quad (2.19)$$

Llegamos a la conclusión de que si renombramos el índice en (2.18), ésta será igual a (2.19). Sumando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\gamma \xi_\gamma + \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\gamma \xi_\gamma = \partial_\alpha \partial^\gamma \xi_\gamma.$$

Entonces la nueva condición de norma nos queda

$$\mathfrak{V}_\alpha = V_\alpha - \partial^\gamma \partial_\alpha \xi_\gamma - \square \xi_\alpha + \partial_\alpha \partial^\gamma \xi_\gamma = 0,$$

de tal manera que podemos eliminar términos semejantes quedando

$$\square \xi_\alpha = 0.$$

Hemos encontrado que ξ_α también satisface la ecuación de la onda en otro sistema de coordenadas. Para resolver el problema debemos escoger la norma. Esto lo logramos imponiendo la condición (2.14), escogiendo las componentes de las perturbaciones de la

métrica de la forma

$$h_{0i} = 0, \quad (2.20)$$

$$h_{\beta}^{\beta} = 0. \quad (2.21)$$

Sabemos que la solución a la ecuación de la onda es

$$h_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Ahora imponemos las condiciones:

$$h_{0i} = a_{0i} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

$$h_{\beta}^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0.$$

La primera de ellas garantiza que $a_{0i} = 0$. Para que se cumpla la segunda, necesitamos que $a_{\alpha}^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = 0$. Regresemos ahora a las condiciones sobre V_{α} , definidas en la ecuación (2.9); para el caso $\alpha = 0$

$$V_0 = \partial_{\gamma} h_0^{\gamma} - \frac{1}{2} \partial_0 h_{\gamma}^{\gamma}$$

en esta última expresión, los términos de la derecha se pueden eliminar usando las condiciones (2.21) mientras que las componentes espaciales del primer término se anulan usando (2.20), por lo tanto podemos escribir la condición de norma

$$V_0 = \partial_0 h_0^0 \approx \partial_0 \eta^{00} h_{00}$$

y así encontramos el primer coeficiente buscado:

$$V_0 = -\partial_0 h_{00} = -a_{00} \frac{\partial}{\partial t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = ia_{00} |\vec{k}| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow a_{00} = 0$$

De igual manera calculamos las condiciones para V_1, V_2 y V_3

$$V_i = (ia_{i1}k^1 + ia_{i2}k^2 + ia_{i3}k^3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

y las reducimos de tal manera que veamos cual es el término que debe ser cero

$$V_i = ia_{ij}k^j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow a_{ij}k^j = 0$$

Con esto podemos escribir la forma completa de $h_{\alpha\beta}$. Líneas arriba aplicamos las condiciones de norma, (2.20), para garantizar que $a_{0i} = 0$, ahora con el término $a_{00} = 0$ tenemos 7 de las 16 componentes del tensor (por simetría), entonces

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Para calcular las componentes restantes, a_{ij} , es necesario escoger una dirección de la propagación. Tomemos por ejemplo la dirección en el eje z , en estas condiciones

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = (\omega, 0, 0, \omega) \cdot (t, x, y, z)$$

y la solución completa se escribe

$$h_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{-i\omega t + i\omega z} = a_{\alpha\beta} e^{i\omega(z-t)},$$

la cual, después de aplicar las condiciones sobre, V_α , queda expresada como

$$(a_{31}k^1 + a_{32}k^2 + a_{33}k^3)e^{i\omega(z-t)} = 0$$

Para que se cumpla lo anterior volvemos a reconocer que $a_{31}k^1 + a_{32}k^2 + a_{33}k^3 = 0$, por lo que sólo quedan 4 componentes. Además por simetría, y después de aplicar la condición $h^\beta_\beta = 0$, encontramos:

$$a_{11} = -a_{22} \quad a_{12} = a_{21}$$

Por lo tanto, escogiendo la dirección de propagación paralela al eje z , la solución general es:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & -a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(z-t)}$$

Esta expresión recupera la forma funcional mencionada al final del capítulo anterior.

2.1.3. $T_{\alpha\beta} \neq 0$

Ahora bien, como ya tenemos la solución a la ecuación linealizada en el vacío, nos será más fácil entender la linealización y solución con fuentes. En este caso tenemos:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (2.22)$$

con la perturbación al espaciotiempo plano dada por (1.5).

Ya hemos calculado $R_{\alpha\beta}$ (tiene la forma dada por 2.4). Para calcular R , recordemos primero que su valor en una región de vacío debe ser $R = 0$. Ahora necesitamos de nuevo calcular el término completo

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \approx \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta},$$

(la aproximación indicada al final de esta expresión se debe a que buscamos una solución para perturbaciones pequeñas del vacío) por lo tanto:

$$R = \eta^{\alpha\beta} \left[-\frac{1}{2}(\square h_{\alpha\beta} + V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha}) \right],$$

desarrollando la ecuación

$$R = -\frac{1}{2}\square h + V^{\alpha}_{,\beta} + V^{\beta}_{,\alpha} \quad (2.23)$$

Como $V^{\alpha}_{,\beta} = \eta^{\alpha\beta} V_{\alpha,\beta}$ y por la condición de norma $V_{\alpha} = 0$, entonces

$$R = -\frac{1}{2}\square h$$

De tal forma que la ecuación (2.22) se reduce a:

$$-\frac{1}{2}\square h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(-\frac{1}{2}\square h) = 8\pi T_{\alpha\beta}.$$

Ahora bien, introduciremos la métrica perturbada, dada por (1.5):

$$-\frac{1}{2}\square h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(-\frac{1}{2}\square h) = 8\pi T_{\alpha\beta}.$$

Como sólo consideramos la aproximación a primer orden, entonces despreciamos los términos cuadráticos y reacomodamos:

$$-\frac{1}{2}\square(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h) = 8\pi T_{\alpha\beta}.$$

Si redefinimos el tensor de las perturbaciones, $\mathfrak{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$, entonces podemos escribir la ecuación linealizada con fuentes de la siguiente manera:

$$\square\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}. \quad (2.24)$$

Tenemos ya la ecuación a resolver, que consta de un conjunto de 16 ecuaciones diferenciales. Cada una de ellas tiene la siguiente forma:

$$-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} + \nabla^2 f(x) = j(x). \quad (2.25)$$

Por simplicidad, definiremos ahora a la fuente $j(x)$ como una función delta en el espacio-tiempo, esto con la finalidad de aproximarnos a la fuente puntual que genera las ondas gravitacionales.

$$j(x) = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \delta(t)\delta^3(\vec{x}).$$

Además, consideraremos que la radiación producida es esféricamente simétrica por lo que podemos describir la solución usando una función es de la forma $g(t, r)$ quedando la ecuación para la métrica:

$$-\frac{\partial^2 g(t, r)}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g(t, r)}{\partial r} \right) = \delta(t)\delta^3(\vec{x}) \quad (2.26)$$

Analizando esta última expresión, reconocemos la solución para una onda unidimensional con una onda que viaja a la derecha y otra, hacia la izquierda; de tal manera que propondremos como solución:

$$g(t, r) = \frac{1}{r}[O(t - r) + I[t + r]].$$

Como en este trabajo estamos estudiando la radiación gravitacional lejos de la fuente (radiación “hacia afuera”), entonces la solución de interés es $\frac{1}{r}O(t - r)$ en donde llamaremos a ésta, “la solución retardada”.

Procedamos ahora a resolver (2.26) integrando sobre todo el volumen que contiene a la fuente, ϵ :

$$\int_{\epsilon} \left[-\frac{\partial^2 g(t, r)}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 g(t, r) \right] d^3x = \int_{\epsilon} \delta(t)\delta^3(\vec{x})d^3x$$

Analizando la ecuación, el lado derecho es una delta que podemos resolver sin ningún problema. Para el lado izquierdo, notemos que la función $g(t, r)$ diverge para r pequeñas,

sin embargo el elemento de volumen decrece $4\pi r^2$. Entonces el primer término de la integral tiende a cero cuando ϵ tiende a cero. Dicho esto y tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \vec{\nabla}^2 g(t, r) d^3x = \delta(t). \quad (2.27)$$

Aplicamos el teorema de la divergencia para tener

$$\int_v \nabla \cdot \nabla g(t, r) d^3x = \int_s \nabla g(t, r) \cdot ds,$$

por la simetría del problema usaremos coordenadas esféricas, con esto ya podemos reescribir la integral de la parte izquierda de (2.27) y resolverla

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dg(t, r)}{dr} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi r^2 \frac{dg(t, r)}{dr}$$

Sustituyendo la derivada de $g(t, r)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{4\pi r^2}{r^2} O(t-r) - \frac{4\pi r^2}{r} \frac{dO(t-r)}{dr} \right]$$

Considerando que el límite de volúmen pequeño $\epsilon \rightarrow 0$ corresponde a valores pequeños del radio de la fuente $r \rightarrow 0$ podemos calcular el límite y reescribimos la ecuación (2.27)

$$-4\pi O(t) = \delta(t).$$

Si esta es la solución para $\delta(t)$, entonces podemos construir una para $\delta(t-r)$

$$g(t, r) = -\frac{\delta(t-r)}{4\pi r}. \quad (2.28)$$

Donde esta es la función de Green construida para poder resolver (2.24) ya que sólo hemos resuelto una ecuación sobre un punto del volumen.

Ahora bien, si queremos encontrar la solución sobre todo el espaciotiempo (t', x') , debemos sumar la contribución de $j(x', t')$; tomando esto en cuenta

$$f(t, \vec{x}) = \int g(t-t', \vec{x}-\vec{x}') j(t', \vec{x}') dt' d^3x'$$

y (2.28), integramos con respecto a t' de tal manera que encontraremos la onda en esa coordenada, es decir, que por la propiedad de la delta, analizaremos el punto a evaluar t'

$$t-t'-\vec{x}-\vec{x}'=0 \implies t'=t-|\vec{x}-\vec{x}'|$$

que llamaremos el tiempo retardado, entonces la integral de volumen queda

$$f(t, \vec{x}) = - \int \frac{j(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x',$$

y la solución general a la gravedad linealizada (2.24) queda:

$$\mathfrak{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = 4 \int \frac{T^{\alpha\beta}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (2.29)$$

2.2. Producción de Ondas Gravitacionales

En la sección anterior vimos la solución general a la gravedad linealizada, para una fuente de masa-energía con las ondas radiando hacia afuera. También sabemos que para esta solución fueron de gran importancia dos premisas:

- Consideramos que la fuente es muy pequeña en relación con la distancia en donde se calcula el campo, $r \gg R$ (por considerar la solución puntual).
- Las velocidades de las masas que producen las ondas gravitacionales son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

R es el tamaño característico de la fuente y $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$.

Con estas consideraciones, podemos reescribir (2.29)

$$\mathfrak{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{4}{r} \int T^{\alpha\beta}(t - r, \vec{x}') d^3x' \quad (2.30)$$

donde $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$.

Esta forma de la onda, es para ondas planas y distancias grandes. El análisis requiere sólo la componente espacial de la perturbación de la métrica \mathfrak{h}^{ij} . Para seguir con el planteamiento del problema, primero analizaremos una componente del tensor de esfuerzo y energía, recordaremos la ley de conservación de la energía en el espaciotiempo plano como:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0.$$

y mientras que la componente del tensor de esfuerzo y energía

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k} = 0$$

Ahora diferenciaremos esta ecuación con respecto al tiempo

$$\frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial T^{0k}}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Luego hacemos uso de otra componente de tal manera que si usamos

$$\frac{\partial T^{0k}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l},$$

con esto podemos reescribir (2.31), y la segunda derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T^{kl}}{\partial x^k \partial x^l}.$$

Integrando sobre todo el espacio y multiplicando ambos lados por $x^i x^j$

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^i x^j d^3x = \int \frac{d^2 T^{kl}}{dx^k dx^l} x^i x^j d^3x. \quad (2.32)$$

Resolviendo por partes la integral del lado derecho, nos lleva a la siguiente expresión:

$$\int T^{ij}(x) d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int x^i x^j T^{00}(x) d^3x. \quad (2.33)$$

Para longitudes de ondas grandes y velocidades bajas, asumiremos que en dicho límite al tensor de esfuerzo y energía lo definiremos como la densidad de masa en reposo y le llamaremos $\mu(x)$ y (2.33) define entonces los segundos momentos de masa $I^{ij}(t)$.

$$I^{ij}(t) \equiv \int \mu(t, \vec{x}) x^i x^j d^3x \quad (2.34)$$

Con esto podemos entonces encontrar la aproximación a la perturbación de la métrica para ondas gravitacionales lejos de la fuente con longitudes de ondas grandes y velocidades bajas.

$$\mathfrak{h}^{ij}(t, \vec{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r) \quad (2.35)$$

Capítulo 3

Radiación gravitacional de un sistema físico

Después de una breve introducción a los sistemas físicos que podrían dar origen a la radiación gravitacional, en este capítulo calculamos la perturbación producida por un sistema de este tipo, mostrando los primeros pasos necesarios para cuantificar el efecto en el espaciotiempo muy lejano a ellas de un sistema formado por dos estrellas que orbitan una alrededor de la otra.

3.1. Sistemas Binarios

Como hemos visto, la Relatividad General predice que los flujos de grandes concentraciones de materia/energía producirán una perturbación en el espaciotiempo cuya propagación puede describirse como una onda que viaja.

Este flujo de material podrá consistir de una gran cantidad de sistemas físicos posibles. El requisito principal es que exista en una región delimitada del espacio un flujo de materia/energía; cuanto mayor sea el cambio de posición de esta materia/energía mayor será la perturbación que produzca sobre el espaciotiempo.

El sistema clásico que se usa para esta descripción es el de una pareja de estrellas que orbitan alrededor de un punto espacial común. En muchas ocasiones estos sistemas se observan desde Tierra, pero el poder óptico no es suficiente como para resolver ambos objetos, así que lo que se percibe es una única estrella cuyo brillo es variable en el tiempo. Esta variabilidad en el brillo se explica debido a que, cuando ambas estrellas están completamente alineadas con nuestra línea de vista el brillo del objeto disminuye, regresando a su valor nominal cuando las estrellas están en la fase que las separa más de su órbita. Por estas características, a estos objetos se les llama binarias eclipsantes, ver Figura 3.1.

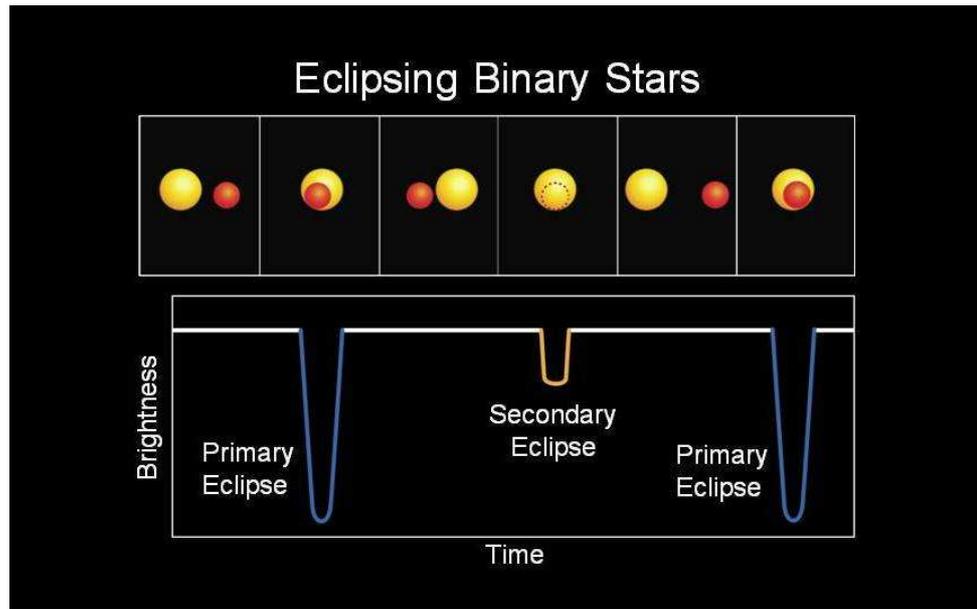


Figura 3.1: Podemos observar dos estrellas desde el punto de vista a canto del plano de la órbita. Cuando una eclipsa a la otra se ve aumentada su magnitud (diminuye su brillo). Esta gráfica es del dominio público y fue tomada de: <http://kepler.nasa.gov/news/nasakeplernews/index.cfm?FuseAction=ShowNews&NewsID=152>.

Un caso especial de este tipo de sistemas es el de una binaria pulsar, en el cual una de sus componentes es estrella de neutrones y exhibe las propiedades de una pulsar. Debido a que las pulsares tienen un período muy preciso, estos sistemas resultan ser un buen laboratorio para experimentos de gravedad puesto que es más fácil medir las modificaciones a las órbitas de las estrellas[3].

El caso de los sistemas binarios es emblemático de los efectos debidos a la radiación gravitacional. Recordemos que la radiación gravitacional es parecida a la electromagnética en el sentido de que los sistemas que la producen pierden energía debido a la emisión. Para el caso de las estrellas binarias, esto significa que la órbita se vuelve más cerrada y por lo tanto el período entre las fases más brillantes es cada vez más corto.

Así, estamos ante la oportunidad de observar un efecto directo de la radiación gravitacional, si bien no podemos medirla directamente. En la Figura (3.2) se ilustra este tipo de sistemas.

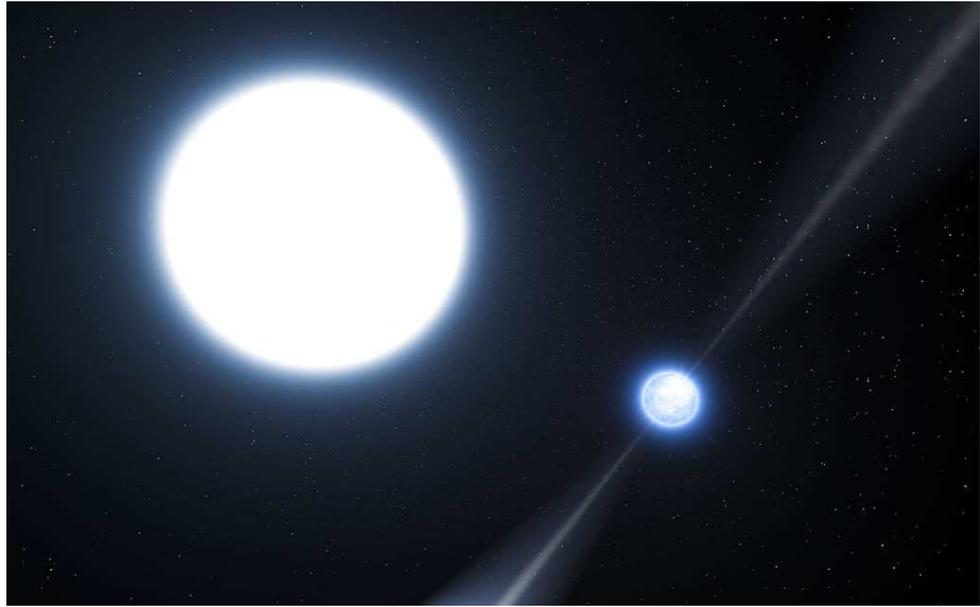


Figura 3.2: Ilustración artística de una pulsar acompañada por una estrella masiva. Esta imagen es del dominio público y está tomada de: <http://www.eso.org/public/images/eso1319b/> .

En 1974, usando el radiotelescopio de Arecibo en Puerto Rico, Joseph Hooton Taylor, Jr. y Russell Hulse observaron por primera vez una binaria pulsar, PSR B1913+16 [3] y lograron medir con gran precisión el período de la órbita. Después de 10 años de observación pudieron confirmar que efectivamente esta disminución en el período se puede explicar considerando que el sistema pierde energía mediante radiación gravitacional (ver por ejemplo [4]).

En lo que sigue, haremos los cálculos que se requieren para obtener la radiación gravitacional producida por un sistema como éste.

3.2. Perturbación tensorial

En el capítulo anterior encontramos la aproximación a la perturbación de la métrica para ondas gravitacionales lejos de la fuente, la cual está dada por la ecuación (2.35). Detallemos ahora un sistema de dos estrellas de masa M , girando respecto a un punto común en el plano $x - y$, como se muestra en la Figura 3.3.

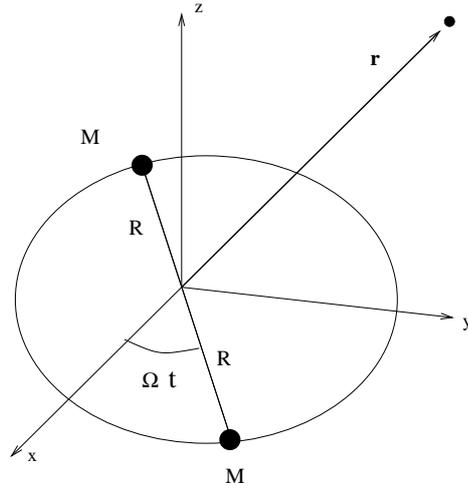


Figura 3.3: En esta figura se muestra un sistema binario de estrellas. Dos estrellas de masa M que orbitan alrededor de su centro de masas debido a la mutua atracción gravitacional. La órbita es circular, de radio R y frecuencia orbital Ω , y además hemos hecho coincidir al plano de la órbita con el plano $x - y$. Estamos interesados en la radiación gravitacional producida por el sistema lejos de él, en cualquier dirección \vec{r}

En estas circunstancias, la posición de cada una de las estrellas se puede describir mediante las siguientes expresiones:

$$x(t) = R \cos(\Omega t) \quad y(t) = R \sin(\Omega t) \quad z(t) = 0,$$

donde hemos considerado que la frecuencia orbital es Ω y R es el radio de la órbita.

Como hemos visto, describir las ondas gravitacionales es encontrar las componentes de la perturbación métrica h^{ij} .

Para un buen número de sistemas binarios de estrellas se cumple que el giro de sus componentes es lento, comparado con la velocidad de la luz; por otra parte, buscamos las ondas en la vecindad de la Tierra, lejos de estos sistemas. Por lo anterior, las componentes necesarias se pueden calcular usando las aproximaciones señaladas en el capítulo anterior.

$$h^{ij} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r),$$

dado que la expresión para $\ddot{I}^{ij}(t - r)$, está definida de la siguiente manera

$$\ddot{I}^{ij} = \int \mu(t) x^i x^j d^3x.$$

Para describir la densidad material, consideramos que el sistema de dos masas está contenido en una esfera del mismo radio que la órbita, de tal manera que:

$$\mu(t) = \frac{2M}{\frac{4\pi}{3}R^3}.$$

Dado lo anterior, podemos calcular las componentes necesarias, empezando por I^{11} :

$$I^{11} = \frac{6M}{4\pi R^3} \int \int \int x^2 d^3x.$$

Considerando que la posición de cada estrella en el sistema está dada por, $x(t)$, la integral toma la forma

$$I^{11} = \frac{6M}{4\pi R^3} R^2 \cos(\Omega t) \int \int \int d^3x,$$

y finalmente podemos escribir esta componente como

$$I^{11} = 2MR^2 \cos(\Omega t).$$

Ahora usamos la identidad trigonométrica para reescribir la expresión de tal manera que la primera componente es

$$I^{11} = MR^2[1 + \cos(2\Omega t)].$$

Con esto podemos encontrar la segunda derivada, para así tener la primera componente de la perturbación, de tal manera que tenemos

$$\ddot{I}^{11} = -4\Omega^2 MR^2 \cos(2\Omega t). \quad (3.1)$$

Ahora calcularemos la componente I^{12} ; para ello usaremos las dos coordenadas dadas por x, y , entonces

$$I^{12} = \frac{6M}{4\pi R^3} \int \int \int R^2 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) d^3x.$$

Al calcular la integral de volumen y usando la propiedad del ángulo doble para la función seno tendremos

$$I^{12} = MR^2 \sin(2\Omega t).$$

Al igual que la vez anterior, calcularemos la segunda derivada para así poder encontrar la componente I^{12} y dada la simetría del tensor, ésta es también la componente I^{21} ; de tal manera que

$$\ddot{I}^{12} = -4\Omega^2 MR^2 \sin(2\Omega t) = \ddot{I}^{21}. \quad (3.2)$$

Con esto solo falta por calcular I^{22} y comprobar la simetría del tensor de perturbación.

Ahora usaremos la coordenada y , de tal manera que

$$I^{22} = \frac{6MR}{4\pi R^3} \int \int \int R^2 \sin^2(\Omega t) d^3x,$$

calculando la integral de volumen y reduciendo términos tenemos

$$I^{22} = MR^2[1 - \cos(2\Omega t)].$$

De nueva cuenta calcularemos la segunda derivada para finalmente encontrar la componente I^{22} :

$$\ddot{I}^{22} = 4\Omega^2 MR^2 \cos(2\Omega t). \quad (3.3)$$

Con las expresiones (3.1), (3.2) y (3.3) podemos construir la perturbación producida por un sistema binario, lejos de la fuente:

$$\mathfrak{h}^{ij}(t, \vec{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{8\Omega^2 MR^2}{r} \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Debido a que confinamos el movimiento de las estrellas al plano $x - y$, no hay movimiento de masa fuera de éste, por lo tanto las otras componentes I^{33} , I^{31} e I^{32} son cero.

3.3. Ondas perpendiculares al plano de las órbitas

Acabamos de encontrar la representación a la aproximación de la radiación al plano de la onda en cualquier dirección. La frecuencia de radiación emitida es dos veces la correspondiente al movimiento de las estrellas que la generan, y su amplitud es $\frac{-8\Omega^2 MR^2}{r}$. Además, podemos señalar que representa el caso particular de la radiación propagándose en la dirección z , perpendicular al plano de la órbita, debido a que es un tensor TT en ésta dirección.

La solución descrita por la ecuación (3.4), no es un TT, en la dirección x . Si necesitamos representar a la radiación propagándose en esta dirección, debemos construir la correspondiente TT.

Para ello empezamos por igualar a cero las componentes xx y xy de la perturbación para tener

$$\mathfrak{h}^{ij}(t, \vec{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{8\Omega^2 MR^2}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora sustraemos la traza de la ecuación anterior de las componentes transversales a la propagación buscada, para obtener así el tensor TT en la dirección x :

$$\mathfrak{h}^{ij}(t, \vec{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{4\Omega^2 MR^2}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(2\Omega t) \end{pmatrix}.$$

3.4. Estimando el efecto de la perturbación

Con el resultado obtenido para la perturbación podemos dar una estimación, a orden de magnitud, del efecto que tendría el paso de la radiación gravitacional sobre un sistema de masas prueba. Como es descrito en la sección 1.2, dos masas inicialmente separadas a una distancia L_* se encontrarán separadas por la distancia

$$L \approx L_* \left(1 + \frac{1}{2} h_{11}\right),$$

después de que una onda gravitacional con las características estudiadas incide sobre ellas.

Con este cálculo podemos estimar el cambio porcentual en la distancia entre las masas:

$$\frac{\Delta L}{L_*} = \frac{|L - L_*|}{L_*} = \frac{1}{2} h_{11},$$

y usarlo como indicador de lo detectables que pueden ser las ondas gravitacionales.

La amplitud de la perturbación, h_{11} , es una función que oscila en el tiempo, podemos usar su valor máximo para encontrar el cambio porcentual más grande en la distancia:

$$\frac{\Delta L}{L_*} = \frac{4\Omega^2 MR^2}{r}.$$

Para introducir valores realistas de la frecuencia de las estrellas orbitantes, Ω , sus masas, M , la distancia entre ellas, R y la distancia entre las estrellas y las masas prueba r (la distancia entre Tierra y las estrellas); consideremos el sistema binario ι Boo.

Este sistema consiste de dos estrellas cuya masa es aproximadamente una masa solar que se encuentra a una distancia de aproximadamente 11.7 pc de Tierra, situadas en la dirección de la constelación Boötes. Sus órbitas son tales que prácticamente están en contacto, al girar una respecto la otra con período orbital de 6.5hr.[5]

Consideremos que la aceleración tangencial para las estrellas proviene completamente de la interacción gravitacional, esto nos permite calcular la velocidad de la órbita circular, v (para esta estimación a orden de magnitud es suficiente la aproximación clásica):

$$\frac{M}{(2R)^2} = \frac{v^2}{R},$$

si además consideramos que esta velocidad corresponde a completar una vuelta en un período,

$$v = \frac{2\pi R}{P} = \Omega R$$

Entonces el radio de la órbita está completamente descrito por el período:

$$R^3 = \frac{MP^2}{16\pi^2},$$

con lo que podemos estimar el cambio porcentual buscado, en términos de los parámetros conocidos para el sistema ι Boo:

$$\frac{\Delta L}{L_*} = 2 \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 \frac{M}{r} \left(\frac{MP^2}{16\pi^2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

En este trabajo hemos estado usando *unidades geometrizadas*: aquellas para las cuales $c = G = 1$. Para poder usar los parámetros M , P y r , los cuales están en unidades convencionales, escogemos cambiar M y r a unidades de tiempo, en este caso horas.

Para poder llevar a cabo estas conversiones los factores necesarios son[6]:

$$1\text{hr} \equiv 3600\text{s}, \quad 1M_{\odot} \approx 1.989 \times 10^{30}\text{Kg}, \quad 1\text{pc} \approx 3.0857 \times 10^{16}\text{m},$$

$$c \equiv 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \frac{G}{c^3} \approx 2.476 \times 10^{36} \frac{\text{s}}{\text{kg}}$$

(aquí M_{\odot} es la masa solar y pc, la unidad de distancia parsec).

Después de estas consideraciones el el cambio porcentual más grande en la separación de las masas prueba es:

$$\frac{\Delta L}{L_*} \approx 7.826 \times 10^{-20} \rightarrow 10^{-19}$$

Conclusiones

En este trabajo estudiamos a la radiación gravitacional generada por un sistema físico, en donde su detección se realizó lejos de él. Para la descripción de esta radiación se tomó en cuenta la métrica del espaciotiempo plano mas una pequeña perturbación descrita de la siguiente manera

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta},$$

donde hemos definido a esta perturbación $h_{\alpha\beta}(x)$ como ondas gravitacionales. Resulta que su efecto es en los ejes transversales al eje de propagación por lo que se describe matemáticamente (por ejemplo para ondas propagándose en el eje z):

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_+(t-z) & f_\times(t-z) & 0 \\ 0 & f_\times(t-z) & -f_+(t-z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez encontrado el comportamiento de las ondas gravitacionales, resolvimos la ecuación de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta}.$$

considerando una pequeña perturbación a la métrica del espaciotiempo plano, por lo que primero linealizamos la ecuación para después encontrar la solución homogénea, es decir en ausencia de masa. Dadas estas consideraciones, el problema se reduce a una ecuación de onda definida como

$$\square h_{\alpha\beta}(x) = 0,$$

con cuatro condiciones sobre la perturbación:

$$\partial_\beta h_\alpha^\beta(x) - \frac{1}{2}\partial_\alpha h_\beta^\beta(x) = 0.$$

Encontrada la solución en el vacío, analizamos el caso para el cual la densidad de energía-momento no es nula; para este caso (continuando en la aproximación lineal) la ecuación para el campo se convierte en:

$$\square h_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}$$

Esta expresión consta de 16 ecuaciones, dada la simetría del tensor todas son de la forma:

$$-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} + \nabla^2 f(x) = j(x).$$

Escogemos como caso particular aquel en el cual el tamaño de la fuente es pequeño (o bien, muy lejos de donde se busca el campo) y la velocidad de la masa que produce las ondas gravitacionales es pequeña, comparada con la velocidad de la luz. Así la solución general a la gravedad linealizada, para un sistema emitiendo radiación gravitacional es:

$$h^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = 4 \int \frac{T^{\alpha\beta}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

que se puede reescribir en términos de los segundos momentos de masa I^{ij} :

$$h^{ij}(t, \vec{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r).$$

Aplicamos este resultado a un sistema binario de estrellas, cada una con masa M y que giran en el plano $x - y$ con respecto a un centro común. Para este caso encontramos:

$$h^{ij}(t, \vec{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{8\Omega^2 MR^2}{r} \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y con ello pudimos estimar, a orden de magnitud, el cambio porcentual en la distancia entre dos masas prueba cuando les incide esta radiación gravitacional:

$$\frac{\Delta L}{L_*} \approx 10^{-19}$$

Como vemos, el cambio es extremadamente pequeño. Por esta razón la radiación gravitacional es difícil de detectar directamente. Para favorecer su descubrimiento en este momento construyen dispositivos con distancias nominales para L_* mucho mayores que el radio de Tierra[7], los cuales entrarán en línea en la próxima década.

Bibliografía

- [1] M.P Hobson, G.P Efstathiou and A.N Lasenby *General Relativity - An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press (2006). ISBN-10: 0-511-13795-8
- [2] LIGO. *Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory* <http://www.ligo.caltech.edu>. EGO/VIRGO *European Gravitational Observatory* <http://www.ego-gw.it>. LISA *Laser Interferometer Space Antenna* <http://lisa.nasa.gov>.
- [3] R.A. Hulse and J.H Taylor *Discovery of a Pulsar in a Binary System*. **ApJ**,**195**:L51-L53, 1975
- [4] Joel M. Weisberg. *The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty years of Observations and Analysis*. **ASP Conference Series**, Vol. **328**, 2005.
- [5] James B. Hartle *Gravity – An Introduction to Einstein’s General Relativity*; Addison Wesley (2003). ISBN: 0-8053-8662-9.
- [6] E. F. Taylor and J. A. Wheeler *Exploring Black Holes*. Addison Wesley Longman (2000). ISBN: 978-0-201-38423-9.
- [7] NGO. *New Gravitational wave Observatory*
<http://sci.esa.int/ngo/50169-ngo-technical-and-programmatic-review-report/#> .
- [8] Bernard Schutz *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press (2009). ISBN: 978-0-521-88705-2.
- [9] Norbet Straumann. *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer-Verlag (1984). ISBN: 3-540-13010-1.
- [10] A. Papapetrou *Lectures on General Relativity*. D. Reidel Publishing Company (1974). ISBN: 90 277 0540 2.