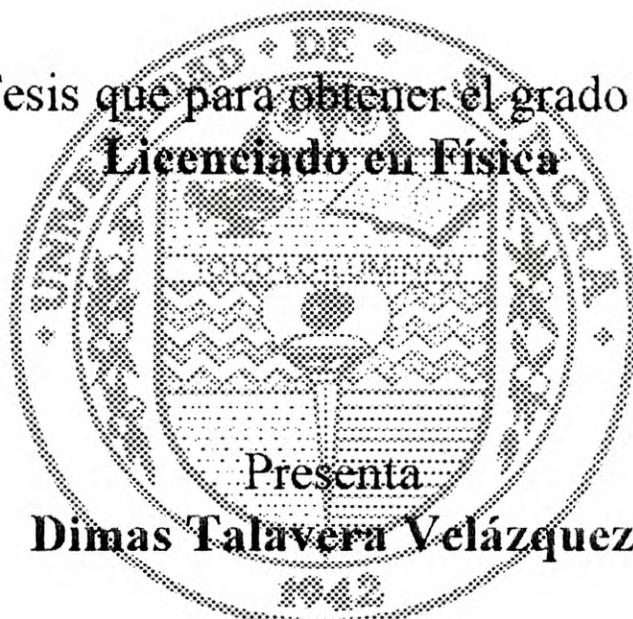


UNIVERSIDAD DE SONORA
DEPARTAMENTO DE FISICA

BIBLIOTECA
C. I. F. - U. S.

“MOVIMIENTOS ONDULATORIO DE UNA CUERDA
TENDIDA CON CORRIENTE ELECTRICA EN UN
CAMPO MAGNETICO”

Tesis que para obtener el grado de
Licenciado en Física



Presenta

Dimas Talavera Velázquez

Dirigida por:

Dr. Euguenii V. Kourmychev K.

Hermosillo, Sonora.

Junio de 1997.

AGRADECIMIENTOS

Para el Dr. Euguenii V. Kourmychev K. quien con dedicación y gran paciencia ha dirigido este trabajo.

Al Sr. Claudio Delgadillo Rodríguez por su apoyo en asesorías y construcción del aparato experimental.

Para M.C. Rodolfo Peón Aguirre, por haber apoyado en sugerencias y prestamo de equipo eléctrico.

Al Ing. Oracio Munguía Aguilar y para el Lic. Francisco Armenta Aguilar quienes contribuyeron con asesorías e ideas sobre este equipo experimental.

Quiero expresar mi reconocimiento al P.L.F. Martín Castro Cubedo, quien con su curiosidad y gran persistencia en su intento de conocer mas sobre las ondas en una cuerda tendida con corriente eléctrica en un campo magnético, nos contagió con su interés por investigar mas sobre la naturaleza de este fenómeno.

Para los doctores Germán Campoy Güereña, Raúl García Llamas y Arturo Ortiz Estandante por el gran apoyo en seminarios y correcciones de este trabajo.

Con gran agradecimiento para mi familia que me ha apoyado en todo momento.

Y en general para maestros, compañeros y amigos del Departamento de Física y del Centro de Investigación en Física de la Universidad de Sonora quienes de alguna u otra manera han otorgado apoyo moral y académico.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con todo cariño para mis padres: Ernesto y Dominga, quienes no han escatimado esfuerzo alguno en estar alentandome a seguir adelante.

A mis hermanos: Veronica, Jesús, Silvia y Carlos Armando.

Con cariño para Griselda Leue Florez.

Contents

1	CONCEPTOS BÁSICOS DE OSCILACIONES Y ONDAS	5
1.1	OSCILACIONES	5
1.1.1	GENERALIDADES SOBRE LAS OSCILACIONES	5
1.1.2	OSCILACIONES ARMÓNICAS	6
1.1.3	COMPOSICIÓN DE OSCILACIONES PERPENDICULARES ENTRE SÍ	7
1.1.4	OSCILACIONES AMORTIGUADAS	10
1.1.5	OSCILACIONES FORZADAS	16
1.2	ONDAS	22
1.2.1	OCURRENCIA Y NATURALEZA DE LAS ONDAS	22
1.2.2	ONDA PLANA ARMÓNICA	24
1.2.3	ONDAS ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS	27
1.2.4	ECUACIÓN DE ONDA	28
1.2.5	EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN Y LAS ONDAS ESTACIONARIAS	30
2	ONDAS EN CUERDAS TENDIDAS	32
2.1	LEY DE HOOKE	32
2.2	MOVIMIENTO LONGITUDINAL	33
2.3	MOVIMIENTO TRANSVERSAL	37
2.3.1	MOVIMIENTO VECTORIAL	39
2.4	PROBLEMAS CON CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA	40
2.4.1	CONDICIONES INICIALES Y SOLUCIÓN DE D'ALEMBERT DE LA ECUACIÓN DE ONDA	40
2.4.2	REFLEXIÓN DE UNA ONDA EN LA FRONTERA	41
2.4.3	ONDAS TRANSVERSALES EN UNA CUERDA TENDIDA CON DIFERENTES CONDICIONES DE FRONTERA	43
3	ECUACIÓN DE ONDA DE UNA CUERDA CON CORRIENTE ELÉCTRICA EN UN CAMPO MAGNÉTICO	47
3.1	DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO	47
3.2	CLASIFICACIÓN DE LOS TIPOS DE ECUACIONES DE ACUERDO CON LAS CONDICIONES FÍSICAS	49
3.3	ALGUNAS SOLUCIONES	55
3.3.1	SOLUCIÓN DEL ESQUEMA 1: MOVIMIENTO TRANSVERSAL	58
3.3.2	SOLUCIÓN DEL ESQUEMA 2: MOVIMIENTO TRANSVERSAL	60
3.3.3	SOLUCIÓN DEL ESQUEMA 3: MOVIMIENTO TRANSVERSAL	61
4	EXPERIMENTO	62
4.1	METAS	62
4.2	PARÁMETROS PRINCIPALES DEL SISTEMA	62
4.3	DISEÑO DEL EQUIPO EXPERIMENTAL	63
4.3.1	COMPONENTE ELÉCTRICA	63
4.3.2	COMPONENTE MAGNÉTICA	63
4.3.3	COMPONENTE MECÁNICA	64

4.4	MONTAJE EXPERIMENTAL	65
4.5	DATOS NUMÉRICOS DEL SISTEMA	66
4.6	MEDICIONES Y DATOS EXPERIMENTALES	67
5	CONCLUSIONES	80
6	APENDICE	81
6.1	METODO DE FOURIER	81
6.1.1	SEPARACION DE VARIABLES PARA LA ECUACION DE ONDA HO- MOGENEA.	81
6.1.2	LAS SOLUCIONES NORMALES	82
6.1.3	SUPERPOSICIÓN DE SOLUCIONES NORMALES	82
6.1.4	SOLUCIONES NORMALES DE LA ECUACIÓN DE ONDA HOMOGÉNEA GENERALIZADA	83
6.1.5	SOLUCIONES NORMALES DE LA ECUACIÓN DE ONDA HOMOGÉNEA CON OTRAS CONDICIONES DE FRONTERA	84
6.1.6	ECUACIÓN DE ONDA NO HOMOGÉNEA	84
7	REFERENCIAS	86

List^{de} of Figures

1.1	Trayectoria en forma de elipse.	9
1.2	Figura de Lissajou.	11
1.3	Figura de Lissajou (Trayectoria parabólica).	12
1.4	Oscilaciones amortiguadas.	14
1.5	Dos posibles procedimientos de retorno del sistema a la posición de equilibrio en caso de oscilaciones sobreamortiguadas.	17
1.6	Curvas de resonancia.	21
2.1	Deformación longitudinal en una barra.	33
2.2	La cuerda está en un estado de equilibrio, y después, en un estado desplazado al momento t (los puntos de la cuerda están desplazados de sus posiciones iniciales).	35
2.3	Fuerzas que se ejercen sobre una sección de una cuerda desplazada transversalmente.	38
4.1	Diagrama del aparato experimental.	64
4.2	Posición del imán respecto a los planos.	68
4.3	Oscilaciones con extremos TL fijos con posiciones del imán en $x = 11.5$ cm, $x =$ 34.5 cm y $x = 57$ cm.	70
4.4	Oscilaciones observadas sobre el plano xz para extremos TL fijos, a simple vista son indistinguibles para las posiciones del imán en $x = 21.5$ cm y $x = 46.5$ cm.	70
4.5	Oscilaciones observadas sobre el plano xy con posición del imán en $x = 21.5$ cm.	71
4.6	Oscilaciones observadas sobre el plano xy con posición del imán en $x = 46.5$ cm.	71
4.7	Oscilaciones cambiando la configuración del campo magnético sobre el eje z en $x = 11$ cm, con extremos TL fijos.	73

4.8	Oscilaciones cambiando la configuración del campo magnético sobre el eje z con $x = 34$ cm, con extremos TL fijos.	74
4.9	Oscilaciones cambiando la configuración del campo magnético sobre el eje z con $x = 34$ cm.	75
4.10	Oscilaciones de trampa de onda.	76
4.11	Perturbaciones en la fase de trampa de onda.	77
4.12	Oscilaciones con un extremo L fijo y el otro L amortiguado manteniendo los dos extremos T fijos con posición del imán en $x = 55.4$ cm.	78
→ 4.13	Trampa de onda con el imán en la posición $x = 49.5$ cm.	78
4.14	Trampa de onda con la posición del imán en $x = 20$ cm.	79

INTRODUCCIÓN

Tanto oscilaciones como ondas y los fenómenos relacionados con ellos son muy importantes, tanto en todas las ramas de las ciencias exactas y naturales como en la vida cotidiana.

En esta tesis se presentan los resultados de un estudio teórico y experimental del movimiento ondulatorio y oscilaciones en una cuerda flexible con corriente eléctrica en un campo magnético. A pesar de ser un sistema bastante académico (a primera vista), el sistema en realidad es un modelo físico con un gran campo, tanto para la investigación como para la enseñanza. Se muestra que los sistemas de este tipo poseen una gran variedad de formas interesantes del movimiento ondulatorio.

Antecedentes de este trabajo se pueden mencionar puramente cualitativas. Anteriormente en el departamento de física se tenía un equipo experimental. En la bibliografía aún no se ha encontrado nada parecido a este trabajo.

En el capítulo 1 se tratan brevemente las bases teóricas de oscilaciones en las que se destacan, las oscilaciones amortiguadas por su gran información, y ondas en general, resaltando la ecuación de onda, el principio de superposición y las ondas estacionarias.

En el capítulo 2 se estudia el comportamiento de las ondas en una cuerda tendida, su ecuación de onda y sus aplicaciones. Se resuelve el problema con valores iniciales y condiciones de frontera, cuyas soluciones serán de utilidad en los próximos capítulos.

Posteriormente se sigue con las ecuaciones de onda de una cuerda tendida con corriente eléctrica en un campo magnético¹ (capítulo 3). En este capítulo se hace resaltar la gran importancia que tiene la interacción electromagnética para la generación de los diferentes tipos de ondas, dependiendo de la configuración del campo magnético.

Contando con las bases teóricas, se realiza la parte experimental dándole sustento físico a los modos de oscilación de la cuerda para diferentes configuraciones del campo magnético (capítulo 4). En este capítulo se realizan los experimentos, encontrando modos de vibración bastante interesantes, aunque este trabajo se limitan a dar a conocer algunos de ellos.

Las metas principales de la parte experimental son: hacer reproducibles los experimentos con determinadas condiciones de frontera y con parámetros específicos; tratar de incorporar este diseño al proceso de enseñanza en el Departamento de Física y en la investigación, ya que muchos de los fenómenos físicos presentan un carácter ondulatorio y con este trabajo tal vez sería posible modelar muchos de ellos.

En lo que sigue se escriben las bases necesarias para tratar los fenómenos a estudiar.

¹Trabajo desarrollado por el Dr. Evgenii V. Kourmychev K.

1. CONCEPTOS BÁSICOS DE OSCILACIONES Y ONDAS

1.1. OSCILACIONES

1.1.1. GENERALIDADES SOBRE LAS OSCILACIONES

Los procesos que se distinguen de uno u otro grado de repetición, reciben el nombre de vibraciones (oscilaciones). Poseen semejante propiedad de repetición, las oscilaciones del péndulo de un reloj, las oscilaciones de una cuerda o las de las ramas de un diapasón.

En dependencia de la naturaleza física del proceso que se repite, se distinguen algunas de las siguientes oscilaciones: mecánicas, electromagnéticas, electromecánicas, etc.

Las oscilaciones están extensamente difundidas en la naturaleza y en la técnica. En muchos casos juegan un papel nocivo, en estos casos, el problema consiste en evitar la aparición de estas oscilaciones o bien, por lo menos, obstaculizar que éstas alcancen dimensiones peligrosas.

Pero, al mismo tiempo, los procesos vibratorios, yacen en la propia base de diversas ramas de la técnica. Por ejemplo, son la base de casi toda la radiotécnica.

En función del carácter de la influencia sobre el sistema oscilatorio se distinguen las oscilaciones *libres* (o propias), *amortiguadas*, *forzadas*, *paramétricas* y las llamadas *autooscilaciones*.

Las oscilaciones *libres* se producen en un sistema que después de haberlo sacado de su estado de equilibrio, se le deja oscilar por sí mismo. Como ejemplo puede ser un péndulo ([1], 51 pag. 31).

Las oscilaciones *forzadas*, son aquellas en las cuales se ejerce la acción de una fuerza externa sobre el sistema y que no dependen del movimiento del sistema. Como ejemplo, un circuito LRC con fuerza electromotriz de voltaje alterno (ref. [1] pp 222-228, ref. [2] cap. 53 pp 48-49).

Las oscilaciones *amortiguadas* se realizan con la influencia de una fuerza externa, pero en contraste con las forzadas, la fuerza de fricción depende del movimiento del sistema, de tal modo que frena el movimiento. Como ejemplo un péndulo oscilando en un ambiente denso (ref. [1] pp 216-221).

Debido a la influencia externa, durante las oscilaciones *paramétricas* se produce la variación periódica de cierto parámetro del sistema, por ejemplo, la longitud del hilo del que está suspendida una bola que realiza oscilaciones (péndulo) (ref. [1] pag. 228).

Las *autooscilaciones*, como las oscilaciones forzadas se acompañan por la acción de las fuerzas externas sobre el sistema en oscilación, pero los instantes de tiempo en que dichas acciones se ejercen se prefijan por el propio sistema, es decir, el sistema oscilatorio gobierna por sí mismo el influjo externo. Un ejemplo de un sistema autooscilatorio puede ser un reloj, en el que el péndulo se anima a cuenta de la energía del peso subido o del muelle torsionado, con la particularidad de que los impulsos se transmiten cuando el péndulo pasa por su posición media (ref. [1] pp 221-222, ref. [2] cap. 52 pp 42-43).

1.1.2. OSCILACIONES ARMÓNICAS

Las oscilaciones más sencillas son las armónicas, es decir, son aquellas oscilaciones que varían en el tiempo según las relaciones trigonométricas del seno o coseno. Este tipo de oscilaciones son de particular importancia, por las siguientes razones: primero, en la naturaleza y en la técnica las oscilaciones tienen con frecuencia (regularidad) un carácter próximo al de las armónicas y segundo, los procesos periódicos se representan como la superposición de varias oscilaciones armónicas (ref. [1] pag. 192).

La ecuación que describe a las oscilaciones realizadas por un cuerpo de masa m , sobre el que sólo actúa la fuerza cuasielástica $F = -kx$, tiene la forma básica (ref. [1] pp 201-205, ref. [2] pp 15-17)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.1)$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ es la frecuencia propia de oscilación del sistema con magnitud real, se define $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$, y k es la constante del resorte.

La solución general es

$$x = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (1.2)$$

donde c_1 y c_2 en general son constantes complejas, puesto que la función $x(t)$ que describe las oscilaciones debe de ser real. Con este fin, los coeficientes c_1 y c_2 de la ec. (1.2) se deben elegir de manera que se cumpla la condición $x^* = x$, entonces

$$c_1 = c_2^*.$$

Los coeficientes c_1 y c_2 satisfacen la indicada condición, en forma exponencial, designando su módulo $A/2$ y su argumento con α :

$$c_1 = \frac{A}{2} e^{i\alpha}; \quad c_2^* = \frac{A}{2} e^{-i\alpha}.$$

La solución de estas expresiones en la ec. (1.2) nos proporciona

$$x = \frac{A}{2} \left[e^{i(\alpha+\omega t)} + e^{-i(\alpha+\omega t)} \right],$$

de esta forma, la solución de la ec. (1.1) tiene la forma

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

donde A y α son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales para ser determinadas.

1.1.3. COMPOSICIÓN DE OSCILACIONES PERPENDICULARES ENTRE SÍ

Se supone que un punto material puede realizar vibraciones tanto a lo largo del eje x , como a lo largo del eje y , perpendicular al primero. Si se excitan ambas vibraciones, el punto material se moverá por una trayectoria que será curvilínea y cuya forma depende de la diferencia de fases de las dos vibraciones. Pueden en general, oscilar con diferente frecuencia (ref. [1] pp 212-216).

Se escoge el tiempo inicial de manera que la fase inicial de la primera vibración, es cero. En tal caso, las ecuaciones de las oscilaciones se escriben como:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.3)$$

donde α es la fase inicial.

La ec. (1.3) es la ecuación paramétrica respecto al tiempo "t" de la trayectoria por la que se mueve el cuerpo. Para obtener la ecuación de la trayectoria en forma desarrollada, hay que excluir de las ecs. (1.3) el parámetro t . De la primera ecuación se sigue que

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}, \quad (1.4)$$

y por consiguiente,

$$\text{sen } \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (1.5)$$

Usando la identidad de la suma del argumento de un coseno en la segunda ec. (1.3) y sustituyendo en lugar de $\cos \omega t$ y $\text{sen } \omega t$ sus correspondientes valores de las ecs. (1.4 y 1.5). Como resultado son:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha \mp \text{sen } \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Después de un poco de álgebra se llega a

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \text{sen}^2 \alpha. \quad (1.6)$$

Esta es la ecuación de una elipse, cuyos ejes están girados respecto de los ejes de coordenadas x y y . La orientación de la elipse y el valor de sus semiejes, dependen de las amplitudes A y B , y de la diferencia de fase α .

Para ciertos casos particulares se determinará la forma de la trayectoria.

Caso 1: Cuando la diferencia de fase α es nula. De aquí la ec. (1.6) será de la forma

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0,$$

y de aquí se obtiene la ecuación de una recta

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (1.7)$$

El movimiento resultante es una oscilación armónica a lo largo de la recta, ec. (1.7) con frecuencia ω y amplitud igual a $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Caso 2: Cuando $\alpha = \pm\pi$. La ec. (1.6) tiene el aspecto

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

y por lo tanto, también resulta un movimiento oscilatorio armónico a lo largo de una recta

$$y = -\frac{B}{A}x. \quad (1.8)$$

El movimiento resultante es una oscilación armónica con frecuencia ω y amplitud $\sqrt{A^2 + B^2}$ a lo largo de la recta, ec. (1.8).

Caso 3: Con $\alpha = \pm\pi/2$ la ec. (1.6) se convierte en la ecuación

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

que es la ecuación de una elipse, con la particularidad de que los semiejes de la elipse son iguales a las correspondientes amplitudes de las vibraciones. Además los semiejes de la elipse están orientados por los ejes x y y . Cuando las amplitudes $A = B = R$, la elipse degenera en una circunferencia.

Los casos $\alpha = +\pi/2$ y $\alpha = -\pi/2$ se distinguen por la dirección del movimiento por la elipse o la circunferencia. Si $\alpha = +\pi/2$ las ecs. (1.3) pueden ser escritas de la siguiente manera

$$x = A \cos \omega t, \quad y = -B \sin \omega t.$$

En el instante $t = 0$ el cuerpo se halla en el punto 1, en los siguientes momentos de tiempo la coordenada x disminuye, mientras que la coordenada y se hace negativa. Esto significa que el movimiento transcurre en el sentido de las manecillas del reloj. De manera semejante se obtuvo para $\alpha = -\pi/2$, las ecuaciones de las vibraciones tienen el aspecto

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t.$$

De aquí se concluye que el movimiento se realiza en sentido contrario al de las manecillas del reloj (ver fig. 1.1).

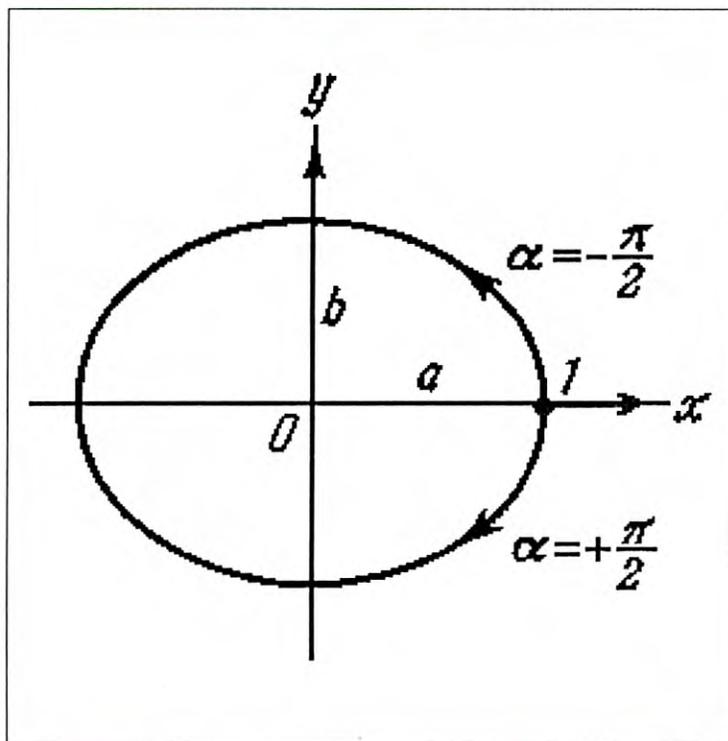


Figure 1.1: Trayectoria en forma de elipse.

La velocidad angular $\dot{\varphi}$ se encuentra por medio de las siguientes relaciones:

$$\tan \varphi = \frac{B \cos(\omega t + \alpha)}{A \cos \omega t}, \quad \frac{d(\tan x)}{dx} = 1 + \tan^2 x.$$

Como,

$$\dot{\varphi} (1 + \tan^2 \varphi) = \dot{\varphi} \left(1 + \frac{B^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{A^2 \cos^2 \omega t} \right) = -\frac{B\omega \sin \alpha}{A \cos^2 \omega t},$$

y por lo tanto,

$$\dot{\varphi} = -\frac{AB\omega \sin \alpha}{A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}.$$

Por consiguiente, la velocidad angular es una función del tiempo. En los casos particulares cuando $\alpha = 0, \pm\pi$ la velocidad angular $\dot{\varphi} = 0$, dado que el movimiento transcurre a lo largo de una recta. En el caso particular $\alpha = \pm\pi/2$ y $A = B = R$ se tiene que $\tan \varphi = \mp \tan \omega t$, y $\dot{\varphi} = \mp \omega$. Entonces, el movimiento es uniforme por una circunferencia de radio R , a velocidad angular ω , que se puede representar como la composición de dos oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí: $x = R \cos \omega t$, $y = \mp R \sin \omega t$.

Caso 4: Cuando las frecuencias de oscilaciones perpendiculares entre sí, se distinguen en una pequeña magnitud $\Delta\omega$, es posible considerarlas de igual frecuencia, pero con diferencia de fase que varía lentamente con el tiempo:

$$(\Omega = \omega + \Delta\omega, \quad \Delta\omega \ll \omega),$$

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\Omega t + \alpha) = B \cos(\omega t + \tilde{\alpha}(t)),$$

donde $\tilde{\alpha}(t) = \alpha + t\Delta\omega$. En este caso, el movimiento resultante ocurre sobre una curva que cambia su forma con lentitud, tomando consecuentemente la forma que corresponde a todos los valores de la diferencia de fases entre $-\pi$ y π .

Caso 5: Si las frecuencias ω_x y ω_y de las oscilaciones perpendiculares entre sí, no son iguales, las trayectorias del movimiento resultante tienen la forma de curvas bastante complicadas, que reciben el nombre de figuras de Lissajous (ver fig. 1.2). Para $\omega_x/\omega_y = 1/2$ y $\alpha = \pi/2$ las ecuaciones de las oscilaciones son $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos(2\omega t + \pi/2)$.

Pero con $\omega_x/\omega_y = 1/2$ y $\alpha = 0$, la trayectoria degenera en una parábola (ver fig. 1.3).

1.1.4. OSCILACIONES AMORTIGUADAS

En los sistemas vibratorios, cuando la fuerza de resistencia es proporcional al valor y opuesta en dirección a la velocidad del movimiento \dot{x} , la acción de la fuerza conduce a la disminución de la energía del sistema. Si el decrecimiento de la energía no se compensa a cuenta del trabajo de

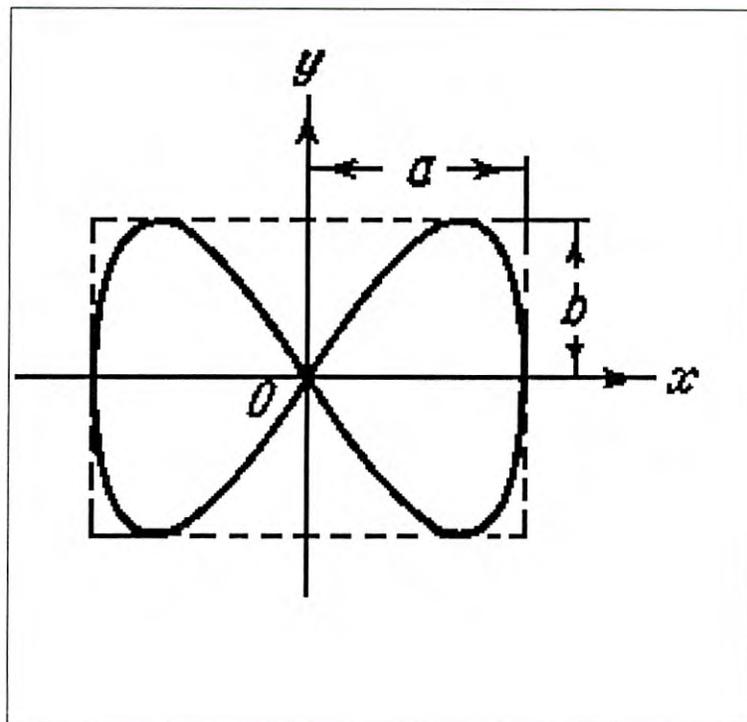


Figure 1.2: Figura de Lissajou.

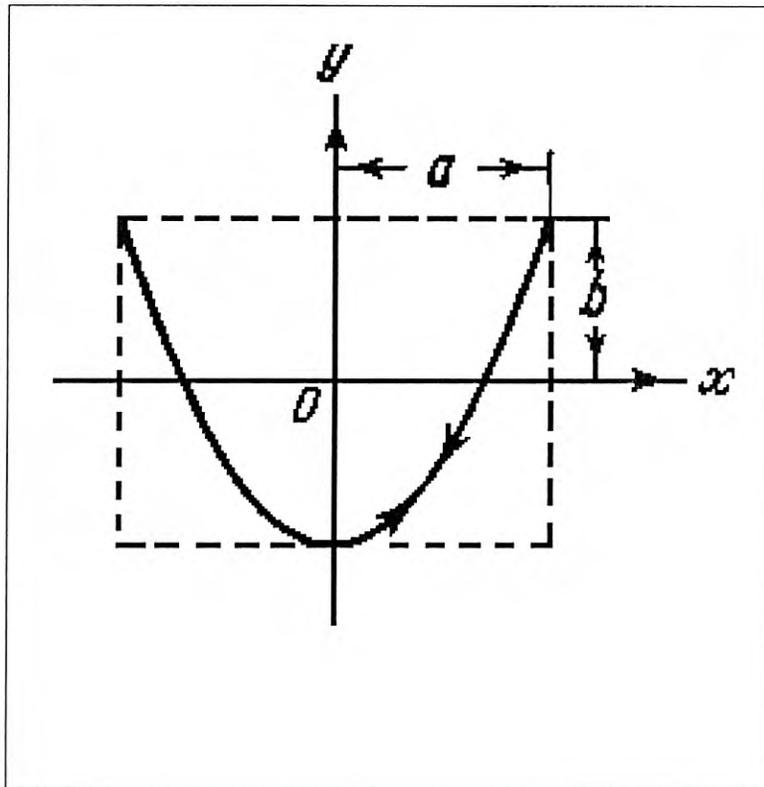


Figure 1.3: Figura de Lissajou (Trayectoria parabólica).

las fuerzas externas, las oscilaciones se amortiguarán. La forma canónica de la ecuación de las oscilaciones amortiguadas es

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.9)$$

dependiendo de la naturaleza física del sistema, los parámetros son: $2\beta = (\frac{r}{m})$ para un sistema mecánico; R/L para un circuito eléctrico en serie; $1/RC$ para un circuito eléctrico en paralelo, etc.); la frecuencia propia del sistema $\omega_0^2 = (k/m)$ para un sistema mecánico; $1/LC$ para un circuito eléctrico tanto en serie como en paralelo, etc.; r y m son el *coeficiente de resistencia* y la *masa* del sistema mecánico.) (ref. [1] pag. 217)

Se busca la solución de la ecuación de las oscilaciones amortiguadas en forma exponencial. Se sustituye la función $z = e^{\lambda t}$ en la ec. (1.9), obteniendo de aquí la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.10)$$

Las raíces de la ecuación son

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Cuando el amortiguamiento no es grande $\omega_0 > \beta$, se reescribe la ec. (1.10)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega \quad (1.11)$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ es la magnitud real. En este caso, la solución general compleja de la ec. (1.9) será la función

$$z(t) = c_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + c_2 e^{(-\beta-i\omega)t}. \quad (1.12)$$

Tomando la parte real de la solución compleja, ec. (1.12), se encuentra la solución física (real)

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.13)$$

donde A_0 (la amplitud) y α (la fase inicial) son las dos constantes arbitrarias (ver fig. 1.4). De acuerdo con la forma de la función (1.13), el movimiento del sistema puede ser considerado como una oscilación armónica de frecuencia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ y amplitud que varía según la ley

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (1.14)$$

El período de las oscilaciones amortiguadas

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \geq T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.15)$$

La velocidad de amortiguamiento de las vibraciones se determina por la magnitud β llamado *coeficiente de amortiguamiento*, dado que β es inverso en magnitud al intervalo de tiempo τ , en el transcurso del cual la amplitud disminuye a e de su valor:

$$e^{-\beta\tau} = e^{-1}, \implies \beta\tau = 1. \quad (1.16)$$

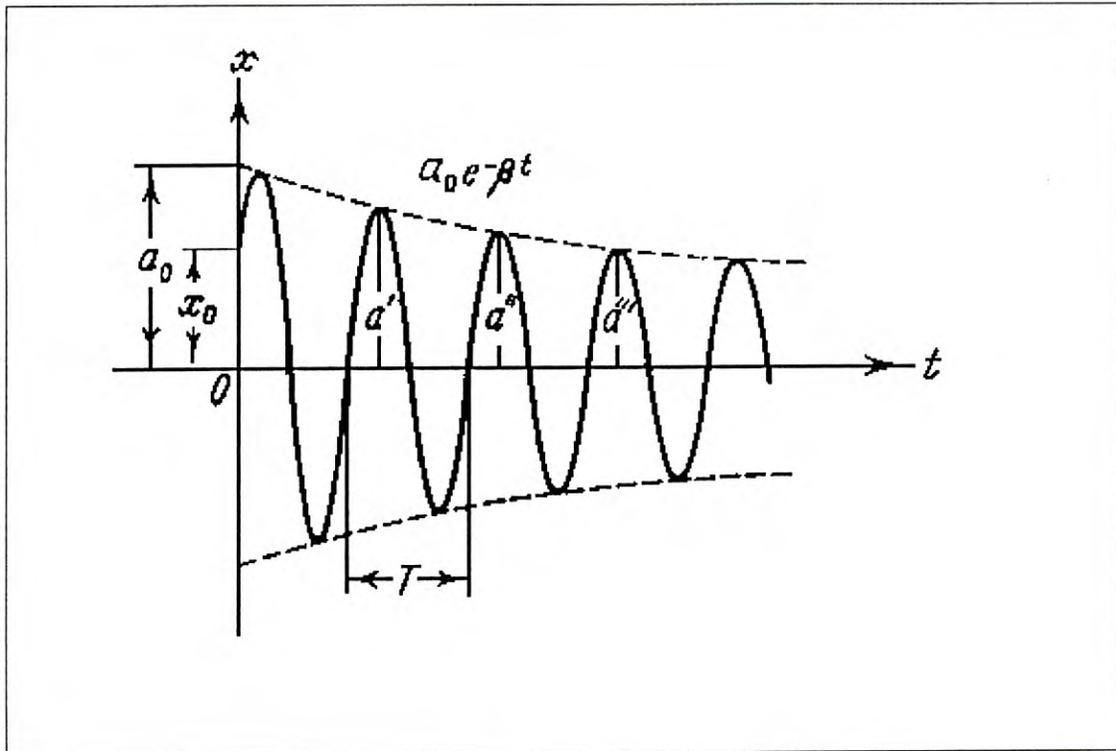


Figure 1.4: Oscilaciones amortiguadas.

Las desviaciones máximas consecutivas, forman una progresión geométrica (vease ec. (1.14)):

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Esta razón recibe el nombre de *decremento del amortiguamiento* (ref. [1] pag. 218), mientras que su logaritmo, *decremento logarítmico del amortiguamiento*:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (1.17)$$

El decremento logarítmico λ se emplea por regla general, como la característica de un sistema vibratorio. De donde se puede escribir

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}.$$

En el transcurso del tiempo τ , durante el cual la amplitud disminuye para un factor de e , el sistema puede realizar un número $N_e = \tau/T$ oscilaciones. Por lo tanto, usando las ecs. (1.16 y 1.17), se encuentra la relación

$$e^{-1} = e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-\lambda N_e}, \implies \lambda = N_e^{-1}. \quad (1.18)$$

Frecuentemente, para caracterizar un sistema oscilatorio amortiguado, también se utiliza el *coeficiente de calidad* (ref. [1] pag. 218):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e,$$

el cual es proporcional al número de oscilaciones N_e .

Sustituyendo la función, ec. (1.13), y su derivada respecto del tiempo

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{x}(t) &= -A_0 e^{-\beta t} (\beta \cos(\omega t + \alpha) + \omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)) \\ &= A_0 \omega_0 e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha + \psi), \end{aligned}$$

donde $\tan \psi = \beta/\omega$ en la expresión de la energía total de un sistema oscilatorio, después de ciertas transformaciones se tiene que

$$\begin{aligned} E(t) &= (kx^2 + m\dot{x}^2)/2 \\ &= \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t} \left(1 + \frac{\beta}{\omega_0} \operatorname{sen}(2\omega t + 2\alpha + \psi) \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

El decremento de la energía total está condicionada por el trabajo de la fuerza de resistencia $F_{re} = -r\dot{x}$, con la potencia igual a $(-r\dot{x})\dot{x} = -r\dot{x}^2$. Así que

$$\dot{E} = -r\dot{x}^2 \leq 0. \quad (1.20)$$

Ahora considerando el caso cuando el amortiguamiento es pequeño, $\beta \ll \omega_0$. Bajo esta condición, se usa la ec. (1.19), se encuentra que la energía total cambia con el tiempo, según la ley

$$E(t) \simeq \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}.$$

De aquí se observa que

$$\dot{E} \simeq -2\beta E(t) \leq 0. \quad (1.21)$$

Durante un período T de oscilaciones, el decremento de energía total es aproximadamente igual a

$$-\Delta E \simeq 2\beta E(t)T = 2E(t)\lambda = 2E(t)N_e^{-1}.$$

Por lo tanto, la razón entre la energía total y su decremento durante un período de oscilaciones del sistema se representa

$$\frac{E(t)}{-\Delta E} \simeq \frac{N_e}{2} = \frac{Q}{2\pi},$$

la cual da significado a los parámetros N_e y Q .

En el caso de un sistema sobreamortiguado (figura 1.5), $\beta > \omega_0$, las raíces de la ecuación característica se hacen reales, y la solución general de la ec. (1.9) resulta ser la suma de dos exponenciales:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

donde $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0$. Porque $\lambda_{1,2}$ tiene valores reales negativos, aquí se tiene un decaimiento exponencial sin oscilaciones. El decaimiento depende del valor de $\lambda_{1,2}$, si es un poco prolongada su caída.

1.1.5. OSCILACIONES FORZADAS

La ecuación de movimiento de un sistema oscilatorio sobre el cual actúa una fuerza, tanto en casos de los sistemas reales, como en modelos con cierta aproximación, se presenta en la siguiente forma:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (1.22)$$

donde $f(t) = \frac{F(t)}{m}$ es una fuerza externa reducida.

La solución general de la ec. (1.22) es una suma de la solución general a la ecuación homogénea y una solución particular de la ec. (1.22):

$$x(t) = x_{gh} + x_{pmh} \quad (1.23)$$

donde x_{gh} es la solución a la ecuación homogénea y x_{pmh} es la solución a la ecuación no homogénea.

La solución general de la homogénea es

$$x_{gh}(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad (1.24)$$

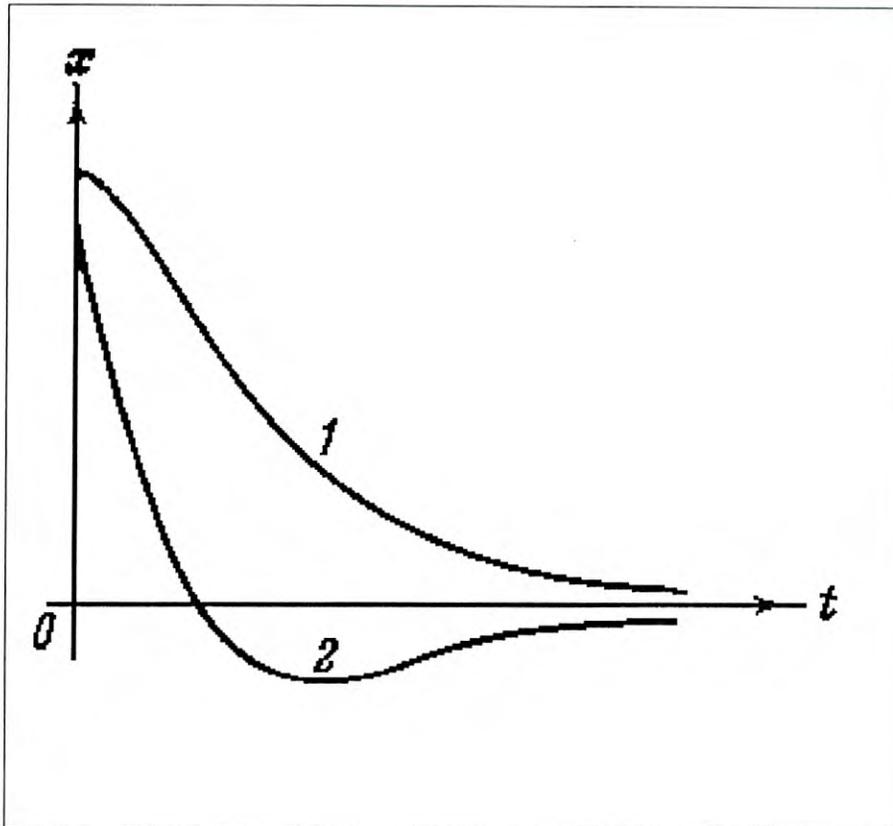


Figure 1.5: Dos posibles procedimientos de retorno del sistema a la posición de equilibrio en caso de oscilaciones sobreamortiguadas.

donde c_1 y c_2 son constantes que se determinan con las condiciones iniciales y x_1 y x_2 son soluciones fundamentales.

Al variar una fuente de excitación según la ley armónica, las ecuaciones de las oscilaciones forzadas se describen con la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (f_0 e^{i\omega t}). \quad (1.25)$$

Aquí β es el coeficiente de amortiguamiento, ω_0 la frecuencia propia del sistema, $f_0 = F_0/m$ es la amplitud reducida de la fuente de excitación, ω la frecuencia de la fuerza externa armónica.

Como se sabe, la solución de una ecuación no homogénea, es igual a la suma de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega} t + \alpha), \quad (1.26)$$

y de la solución particular de la ec. (1.25), donde $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, mientras que A_0 y α son constantes arbitrarias.

Del modo directo, se propone una solución particular en forma

$$x_p(t) = A e^{i\omega t}, \quad (1.27)$$

donde A es una cierta amplitud compleja por determinar. Derivando con respecto a t la función $z(t)$ se obtiene

$$\dot{x}_p = i\omega A e^{i\omega t}, \quad \ddot{x}_p = -\omega^2 A e^{i\omega t}.$$

Sustituyendo la función, ec. (1.27) y sus derivadas en la ec. (1.25), se obtiene

$$-\omega^2 A + 2i\beta\omega A + \omega_0^2 A = f_0.$$

De aquí se encuentra el valor de la amplitud A .

$$A = \frac{f_0}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + 2i\beta\omega} = \frac{f_0}{\rho} e^{-i\varphi}, \quad (1.28)$$

donde $\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$, $\tan \varphi = 2\beta\omega/\omega_0^2 - \omega^2$. Sustituyendo el valor de A en la ec. (1.27), se obtiene la solución particular de la ec. (1.25) en forma compleja:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\rho} e^{i(\omega t - \varphi)},$$

y su parte real es

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{f_0}{\rho} \cos(\omega t - \varphi) \\ &= \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

La solución, ec. (1.29), sumada con la ec. (1.26) nos da la solución general de la ec. (1.25), que describe la conducta de un sistema con oscilaciones forzadas.

En el transcurso del tiempo, a causa del factor $e^{-\beta t}$, el papel del sumando ec. (1.26), disminuye hasta que puede ser despreciado al transcurrir un tiempo suficientemente grande. Este sumando de las oscilaciones propias del sistema desempeña un papel notorio sólo en la etapa transitoria del establecimiento de las oscilaciones.

Entonces, la ec. (1.29) describe oscilaciones forzadas estacionarias, con las siguientes características principales:

- Son oscilaciones armónicas con una frecuencia igual a la ω de la fuerza de excitación.
- La amplitud de las oscilaciones forzadas, es proporcional a la amplitud de la fuerza de excitación. Además, para un sistema oscilatorio con parámetros ω_0 y β determinados, la amplitud depende también de la frecuencia de la fuerza.
- Las oscilaciones forzadas se retardan en fase respecto de la fuerza de excitación, con la particularidad de que la magnitud del retardo depende de ω y β para la ω_0 dada.

La dependencia entre la amplitud A y la frecuencia ω de la fuerza de excitación conduce a que con cierta frecuencia la amplitud de las oscilaciones forzadas alcance su valor máximo. Este fenómeno se llama *resonancia* y la frecuencia correspondiente que es la frecuencia de resonancia ω_r . Para determinar ω_r , se buscará el mínimo del denominador en la ec. (1.28). Derivando con respecto a ω e igualando el resultado a cero, se tiene

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0,$$

que tiene las siguientes soluciones:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Por razón física, la frecuencia de resonancia es igual a

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leq \omega_0. \quad (1.30)$$

Sustituyendo éste resultado en la ec. (1.28), se encuentra la amplitud de resonancia

$$A_r = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.31)$$

Ahora, de las ecs. (1.30 y 1.31), con condición $\beta \rightarrow 0$, sigue que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \omega_r = \omega_0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} A_r = \infty.$$

La dependencia entre la amplitud de las oscilaciones forzadas y la frecuencia de la fuerza exterior está representada gráficamente en la figura 1.5, curvas de resonancia para diferentes

valores del coeficiente de amortiguamiento β . De acuerdo con las ecs. (1.30 y 1.31), mientras más pequeño sea β , más arriba y a la derecha desplaza ω_0 el máximo de la curva dada. Con un amortiguamiento grande, tal que $2\beta^2 > \omega_0^2$, la expresión para ω_r ec. (1.30), se vuelve imaginaria. Esto significa que bajo semejantes condiciones no se observa la resonancia, la amplitud de las vibraciones forzadas decrecen monótonamente con β .

Respecto de las curvas de resonancia (para ω_0 y F_0 dados), se pueden presentar, además, las siguientes observaciones. Al tender ω a 0, las curvas llegan al mismo valor límite igual a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$, la elongación de la posición de equilibrio bajo la acción de la fuerza constante de la magnitud F_0 . Cuando la frecuencia ω de la fuerza tiende al infinito, todas las curvas tienden a cero de forma asintótica, ya que la fuerza (con F_0 dado) varía la dirección con tal frecuencia, que el sistema no puede desplazarse notoriamente de su posición de equilibrio:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta x_{\max} \simeq \int_0^{2\pi/\omega} \dot{x} dt = \int_0^{2\pi/\omega} dt \int_0^t \ddot{x} d\tau \longrightarrow 0,$$

por ser limitada la velocidad desde arriba. Se señala que mientras menor sea β , la amplitud cerca de la resonancia variará considerable, al cambiar la frecuencia, más agudo resultará el máximo.

Para $\beta \ll \omega_0$, la razón entre la amplitud de resonancia $A_r = (F_0/m)/2\beta\omega_0$ y la elongación $x_0 = F_0/k$ de la posición de equilibrio, bajo la acción de la fuerza constante, será igual al coeficiente de calidad del sistema

$$\frac{A_r}{x_0} \simeq \frac{\omega_0}{2\beta} \simeq \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.$$

De este modo, el coeficiente de calidad Q que muestra cuantas veces, en el momento de resonancia, la amplitud supera la desviación de la posición de equilibrio bajo la acción de una fuerza constante, de la misma magnitud de la fuerza de excitación.

Como se observa de la fórmula, ec. (1.29), las vibraciones forzadas se retardan por fase de la fuerza de excitación con la magnitud de retardo igual a $\varphi = \tan^{-1}(2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2))$. La φ está en el intervalo $0 \leq \varphi \leq \pi$. A la frecuencia $\omega = \omega_0$, el retardo es $\varphi_0 = \pi/2$. La resonancia $\varphi_r < \pi/2$, porque $\omega_r < \omega_0$.

El fenómeno de resonancia se debe tomar en consideración al proyectar la maquinaria y diferentes construcciones como un fenómeno nocivo y destructivo. Por otro lado, en electrónica y radiotecnica, éste fenómeno es muy útil en los procesos de sintonización. Sea $u(t)$ la tensión aplicada al circuito

$$u(t) = u_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + u_2(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

Ajustando el circuito a una de las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots$ (variando los parámetros L y C), se puede obtener en el condensador una tensión Q veces mayor que el valor de la componente dada, mientras que las tensiones creadas por las demás componentes serán débiles.

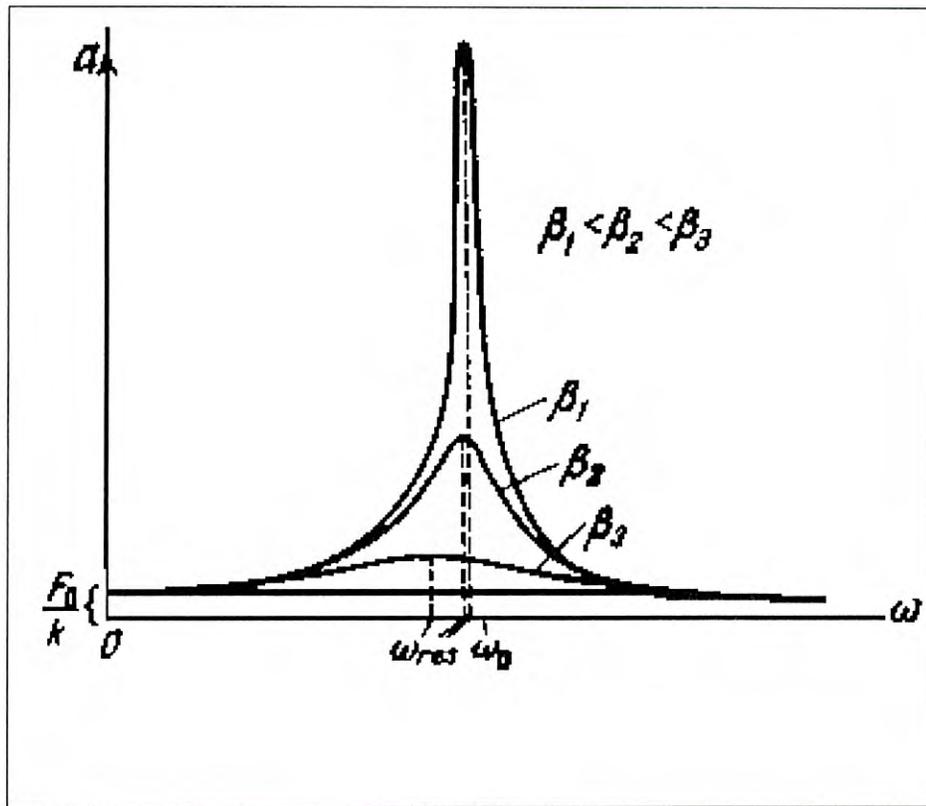


Figure 1.6: Curvas de resonancia.

1.2. ONDAS

1.2.1. OCURRENCIA Y NATURALEZA DE LAS ONDAS

A la propagación de una perturbación a través de un medio se le llama *onda*.

Por ejemplo, las oscilaciones que se producen en un punto de un medio elástico se transmiten a los puntos vecinos, los cuales también empiezan a oscilar. El proceso de transmisión de las oscilaciones de un punto a otro es característico no solamente de los medios elásticos, sino también del campo electromagnético.

Las oscilaciones de un medio elástico, originan una *onda elástica*; las del campo electromagnético, una *onda electromagnética*.

Respecto a cualquier magnitud física, que cambia su valor con respecto a su promedio (h) en el tiempo periódicamente en torno a su valor de equilibrio, se puede decir que esta magnitud oscila, y a éste proceso de variaciones se les llama oscilaciones. Lo importante es que estos cambios se describen sólo como función del tiempo

$$P(t) = P_0 + f(t) \quad (= P_0 + A \cos(\omega t + \alpha)),$$

donde la función $f(t)$ describe oscilaciones de la magnitud $P(t)$ respecto a su promedio P_0 al tiempo t . En comparación con las oscilaciones, las ondas son un proceso de variación de una magnitud física tanto en tiempo como en espacio. Con más detalle se hace referencia a lo siguiente.

El movimiento ondulatorio requiere de un *medio*, que es cualquier conjunto de "partículas" con interacción entre ellas. Como ejemplo de medios, que con mucha frecuencia se encuentra en la física, se puede mencionar: 1) gases, para ondas sonoras, 2) sólidos, para ondas elásticas, 3) cables coaxiales, para transmisión de señales eléctricas, un ejemplo muy importante son las fibras ópticas, 4) capas superficiales del mar, para olas, etc.

Una perturbación local en el estado de un medio (respecto a su estado de equilibrio) resultará, debido a la interacción entre las partículas, a su movimiento en las regiones próximas. Esta perturbación se propaga en el medio de una región a otra con cierta velocidad v . El proceso ondulatorio se describe no sólo como una función del tiempo, sino $P = P(\mathbf{r}, t)$, que es una función dependiente de las variables espaciales y del tiempo.

La siguiente tabla muestra algunos de los ejemplos del movimiento ondulatorio, los medios de propagación correspondientes y las formas típicas de las ondas.

	Fenómeno	Medio	Interacción	Forma de onda
1	Ondas superficiales en líquido	Capas superficiales de líquido	Tensión superficial y gravitación	Sinusoidal, periódica
2	Olas del mar por viento	Capas superficiales de agua más aire	Presión del aire, gravitación, tensión superficial	Periódicas
3	Ondas transversales en una cuerda flexible	Cuerda flexible	Elasticidad	Periódicas, arbitrarias
4	Sonido (cambio de presión)	Aire, líquido y sólido	Fuerzas intermoleculares	Periódicas
5	Ondas sísmicas	Tierra	Elasticidad	Irregulares
6	T-, L-, Tor-ondas elásticas	Sólidos	Elasticidad	Periódicas, arbitrarias
7	Ondas electromagnéticas	Vacío, dieléctricos, semiconductores	Campo fundamental	Periódicas arbitrarias
8	señales-corrientes en cables	Conductores	Electromagnetismo	Periódicas, arbitrarias

Tabla: Ondas en diferentes medios.

Cabe mencionar, que cuando una onda se propaga en un medio, las partículas del medio no son trasladadas en el espacio, sino solamente oscilan alrededor de su posición de equilibrio. Lo que se propaga en una onda es la energía y momento (ímpetu).

TIPOS DE ONDAS

Dependiendo de la dirección de oscilación de las partículas respecto a la dirección de propagación de la onda, se suelen distinguir tres tipos de ondas: *longitudinales*, *transversales* y *torcionales*.

En una *onda longitudinal* (L-onda), las partículas en cada punto del medio oscilan a lo largo de la dirección de propagación de la onda. Al propagarse una onda longitudinal, se crean en el medio compresiones y enrarecimientos consecutivos que se transmiten en el sentido de la propagación de la onda con una velocidad v . Se pueden generar L-ondas en gases, líquidos y sólidos.

En una *onda transversal* (T-onda) las partículas en cada punto del medio oscilan en dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda. T-ondas sólo pueden existir en un medio que posee una resistencia al cizallamiento. Por lo tanto, se pueden generar T-ondas en sólidos,

pero no es así en líquidos ni en gases.

Si se aplica una torca variable a un extremo libre de una varilla, el ángulo de torsión cambia con el tiempo, dando como resultado una *onda de torsión* (Tor-onda) que se propaga a lo largo de la varilla. En Tor-onda las partículas hacen oscilaciones giratorias respecto al eje de la varilla, la cual coincide con la dirección de propagación de la Tor-onda.

Al propagarse de la fuente las perturbaciones, la onda abarca cada vez nuevas partes del espacio-medio. El lugar geométrico de los puntos hasta los cuales llegan las oscilaciones en un instante de tiempo t , se llama *frente de onda*. El frente de onda se traslada continuamente.

El lugar geométrico de los puntos que oscilan con la misma fase se llama *superficie de fase de la onda*. Existe un conjunto infinito de superficies de onda. Las superficies de onda pasan por las posiciones de equilibrio de las partículas que oscilan en la misma fase; por consiguiente, las superficies de onda permanecen inmóviles para ondas estacionarias. La superficie de onda puede tener cualquier forma, en los casos más simples, cuando la superficie de onda es un plano, o un cilindro o una esfera, se dice que la onda es plana, cilíndrica o esférica, respectivamente. En una onda plana las superficies de onda, son un conjunto de planos paralelos entre sí, en ondas cilíndricas, son un conjunto de cilindros coaxiales, y en una onda esférica, un conjunto de esferas concéntricas.

La distancia λ a la que se propaga la onda armónica dentro de un intervalo de tiempo igual al período de oscilaciones de las partículas del medio se denomina *la longitud de onda*,

$$\lambda = vT, \quad (1.32)$$

donde v es la velocidad de onda, T es el período de las oscilaciones. Tomando en cuenta la relación entre T y la frecuencia de oscilación $\nu = T^{-1}$, se obtiene $\lambda\nu = v$.

1.2.2. ONDA PLANA ARMÓNICA

Se encuentra la función $\xi(\mathbf{x}, t)$ que describe las oscilaciones de una magnitud física en una onda plana, suponiendo que las oscilaciones son armónicas. Los ejes de coordenadas se dirigen de tal modo que el eje x coincida con la dirección de propagación de la onda. Entonces, las superficies de fase serán perpendiculares al eje x . Como en todos los puntos de una superficie de onda la magnitud ξ oscila con la misma fase, la función de onda dependerá sólo de la coordenada x y del tiempo t , $\xi = \xi(x, t)$. Se supone que las oscilaciones de la magnitud ξ , en los puntos del plano $x = 0$ son armónicas,

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (1.33)$$

Para recorrer el camino del plano $x = 0$ hasta un plano x , la onda necesitará el tiempo $\tau = x/v$, donde v es la velocidad de fase de la onda. Por lo tanto, las oscilaciones en el plano x tendrán un retraso de tiempo τ respecto a las oscilaciones en el plano $x = 0$. Las oscilaciones tienen la siguiente forma:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - \tau) + \alpha) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right), \quad (1.34)$$

donde A es la amplitud constante de onda plana, α es la fase inicial, la cual se determina por elección de los puntos de referencia para x y t . Si está considerada sólo una onda, el inicio de x ó t se suele elegir de tal modo que α sea igual a cero. En caso general, cuando coexisten simultáneamente varias ondas, no se consigue igualar a cero todas las fases iniciales.

Si se fija cualquier valor de la fase de onda por medio de la relación

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = cte., \quad (1.35)$$

ésta expresión determina la relación entre el tiempo t y el punto x , en el cual la fase tiene un valor fijado. La derivada de x respecto al tiempo t , dx/dt , tomada según la ec. (1.35), es la velocidad con la que se traslada el valor dado de la fase. Tomando la diferencial de la ec. (1.35), $dt - (1/v) dx = 0$, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (\geq 0). \quad (1.36)$$

Por lo tanto, la velocidad v con la cual se traslada la fase se llama la *velocidad de fase*. Considerando la v positiva, según la ec. (1.36) se tiene $dx/dt \geq 0$, y la expresión, ec. (1.34), describe una onda que se propaga en el sentido en el que x aumenta. La onda que se propaga en el sentido opuesto, se describe por la ecuación

$$\xi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \alpha\right), \quad (1.37)$$

de la cual sigue que $dx/dt = -v \leq 0$.

Por conveniencia se introduce la magnitud

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.38)$$

denominado *número de onda*, que permite escribir la onda plana en forma simétrica

$$\xi_{\pm}(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx + \alpha). \quad (1.39)$$

Al deducir la fórmula, ec. (1.39), se supuesto implícitamente que la amplitud de las oscilaciones no dependen de x (ni de y, z). Cuando la onda se propaga en un medio que absorbe energía, su intensidad disminuye con la distancia de la fuente. Por experiencia en un medio homogéneo (un medio homogéneo es aquel que permanece invariante vajo translaciones de los ejes), éste amortiguamiento transcurre según la ley exponencial

$$\xi_{\pm}(x, t) = A_0 \exp(-\beta|x|) \cos(\omega t \mp kx + \alpha), \quad \beta \geq 0, \quad (1.40)$$

donde el coeficiente de amortiguamiento β puede depender de la frecuencia ω , $\beta = \beta(\omega)$.

Si la fuente genera perturbaciones en forma $\xi(0, t) = f(t)$ con cierta función $f(t)$ distinta de la armónica, ec. (1.33), con razonamiento similar a lo dicho anteriormente, uno puede concluir que una expresión matemática de la forma $\xi(x, t) = f(x \mp vt)$ describe una situación (perturbación) física que se propaga sin deformación a lo largo del eje x hacia la derecha o izquierda

con velocidad de fase v . La magnitud $\xi(x, t)$ puede representar diversas cantidades físicas, tales como la deformación de un sólido, la presión en un gas, un campo electromagnético, etc. Está claro que la onda de la forma $u(x, t) = f(x \mp vt)$ es una onda plana, porque en un momento dado, t' en todos los puntos de cualquier plano $x = cte$, la perturbación tiene el mismo valor $f(cte \mp vt') \equiv f(cte)$.

Es conveniente expresar la onda plana $\xi(x, t) = f(x \mp vt)$ en una forma tal que sea independiente de la orientación de los ejes, en otras palabras, escribir la expresión de una *onda plana* que se propaga según la dirección definida por un vector unitario $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, con ángulos α , β y γ respecto a los ejes x , y , z . Se supone que las oscilaciones en el plano que pasa por el origen del sistema de coordenadas tienen la forma armónica, ec. (1.33). Las oscilaciones en cualquier punto marcado por el vector de posición \mathbf{x} en el plano, que se encuentra a la distancia l del origen de coordenadas, se retrasan respecto a las oscilaciones, ec. (1.33), por el tiempo $\tau = l/v$. Por lo tanto, las oscilaciones en cualquier punto de este plano son

$$\xi(\mathbf{x}, t) = A \cos \left(\omega \left(t - \frac{l}{v} \right) + \alpha \right) = A \cos(\omega t - kl + \alpha), \quad (1.41)$$

donde $k = \omega/v$ es el número de onda. Se expresa l por medio del radio vector \mathbf{x} de los puntos de la superficie de onda considerada.

El producto escalar de $\hat{\mathbf{n}}$ por \mathbf{x} es igual a l

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} = r \cos \varphi = l.$$

Por lo tanto, sustituyendo l por el producto escalar $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}$ en la ec. (1.41), se llega a

$$\xi(\mathbf{x}, t) = A \cos(\omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} + \alpha) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \alpha), \quad (1.42)$$

donde se introduce el vector $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$, cuyo módulo es el número de onda $k = 2\pi/\lambda$, y la dirección está definida por la normal $\hat{\mathbf{n}}$ de la superficie de onda. La ec. (1.42) presenta una onda plana no amortiguada, que se propaga según el vector de onda \mathbf{k} . Si la onda está amortiguada, hay que multiplicar esta expresión por el factor $e^{-\beta\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}$. El producto escalar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ se puede expresar también por

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_x x + k_y y + k_z z, \quad k_x = k \cos \alpha, \quad k_y = k \cos \beta, \quad k_z = k \cos \gamma. \quad (1.43)$$

La función, ec. (1.42), representa la desviación de la magnitud física ξ de su valor de equilibrio, en un punto del medio con radiovector \mathbf{x} . En caso de oscilaciones relacionadas con el desplazamiento de los puntos del medio, el vector \mathbf{x} determina la posición de equilibrio del punto que oscila.

Las ondas planas armónicas pueden ser presentadas en forma compleja:

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left(\hat{\xi}(\mathbf{x}, t) \right), \quad \hat{\xi}(\mathbf{x}, t) = \hat{A} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (1.44)$$

donde $\hat{A} = A e^{i\alpha}$, es la amplitud compleja de la onda.

Es fácil de ver que la onda plana de forma arbitraria no armónica, que se propaga en una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ con una velocidad v , se escribe como

$$\xi(\mathbf{x}, t) = f(vt - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}). \quad (1.45)$$

Las superficies de fase de onda para cada momento t están determinadas por la ecuación $vt - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} = cte$, la cual, por supuesto, es la ecuación de un plano.

1.2.3. ONDAS ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

Las ondas planas, ecs. (1.42 y 1.45), aunque contienen las tres coordenadas x, y, z son en realidad unidimensionales, ya que la propagación es según una dirección particular y la situación física es la misma en cada plano perpendicular a la dirección de propagación. En la naturaleza hay otras clases de ondas, que se propagan en varias direcciones, de las cuales, las más comunes son: las *esféricas* y las *cilíndricas*. En el caso de las ondas cilíndricas, las superficies de fase son cilindros coaxiales a una línea recta dada. La perturbación se propaga en todas las direcciones perpendiculares a ésta línea. Se llaman ondas *esféricas* a las ondas que tienen superficies de fase en forma de esferas concéntricas a un punto donde se originó la perturbación.

Se supone que la fase de oscilaciones armónicas de la fuente puntual es igual a $(\omega t + \alpha)$, por lo tanto, la perturbación en la región muy cercana al origen será proporcional a $\xi(+0, t) \sim \cos(\omega t + \alpha)$. La magnitud física $\xi(\mathbf{x}, t)$ considerada en la superficie de onda esférica del radio r oscila con la fase

$$\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \alpha = \omega t - kr + \alpha,$$

a razón de que para recorrer la distancia r , la onda necesita el tiempo $\tau = r/v$. La amplitud de oscilación en este caso, aunque la energía de la onda no se absorba por el medio, no permanece constante, sino que disminuye con la distancia de la fuente según la ley $1/r$. La última es consecuencia de la conservación de la energía.

La onda esférica armónica se representa por la expresión

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t \mp kr + \alpha), \quad (1.46)$$

donde A es una constante, y los signos \mp corresponden a una onda esférica divergente (expansión) y a una convergente (compresión). Para un medio absorbente hay que multiplicar la expresión de la onda por el factor $e^{-\beta x}$.

En un medio isotrópico (es aquel medio en el que no se tiene una dirección preferencial para realizar alguna medición) y homogéneo un conjunto de fuentes uniformemente distribuidas a lo largo de una recta, todas oscilando en fase, producen ondas cilíndricas. La perturbación se propaga en todas direcciones perpendicularmente a la recta. Análogamente al caso de las ondas esféricas, para las ondas cilíndricas se tiene

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(\omega t \mp kr + \alpha), \quad (1.47)$$

donde r es el radio de la superficie de fase cilíndrica. El factor $1/\sqrt{r}$ aparece debido a que el flujo de energía a través de cada superficie de onda permanece constante.

1.2.4. ECUACIÓN DE ONDA

Tanto ondas planas como la gran variedad de las demás ondas, son soluciones de la ecuación diferencial llamada *ecuación de onda*. Para establecer la forma de la *ecuación de onda* (EO), se comparan las segundas derivadas parciales respecto a las coordenadas y el tiempo de la función descrita para una onda plana armónica (unidimensional):

$$\xi(x, t) = A \cos(kx \mp \omega t + \alpha).$$

La ecuación es

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (1.48)$$

donde se toma en cuenta la relación entre número, velocidad y frecuencia de onda, $v = \omega/k$.

La ec. (1.48), es la ecuación clásica unidimensional de onda. Por el modo de establecer la ec. (1.48), se puede establecer que ésta ecuación la satisface cualquier función de la forma $\xi(x, t) = f(x \mp vt) = f(kx \mp \omega t)$. Sustituyendo en la ecuación de onda, se observa que cumple la forma de la EO unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (1.49)$$

Debido a sus propiedades, la función $f(x \mp vt)$ se denomina onda plana, y se propaga a lo largo del eje x . En general, esta onda puede no ser armónica. Su generalización para el caso de propagación en una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ arbitraria, tiene la forma

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \tilde{f}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t), \quad (1.50)$$

donde \mathbf{x} es el radio vector, $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$ es un vector con la dirección del vector unitario de propagación $\hat{\mathbf{n}}$.

Tomando en cuenta que $\mathbf{k} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \pm \omega$, se encuentra que en el espacio, éste plano se propaga a velocidad

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \pm \hat{\mathbf{n}} \frac{\omega}{k} = \pm \hat{\mathbf{n}} v,$$

en dirección del vector de onda $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$.

La ec. (1.48), puede expandirse en tres dimensiones. Recordando que $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, se llega a la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 f, \quad (1.51)$$

donde v es el módulo de la velocidad de fase constante. Por lo tanto, cualquier función $f(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{x} \mp vt)$ con cualquier dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}}$ y el mismo módulo de velocidad v , satisface la ec. (1.51). La onda plana armónica es una solución particular de la ec. (1.51).

Además de las soluciones de la ec. (1.50), existen soluciones de la ec. (1.51), que también poseen propiedades propagatorias. Como un ejemplo, se busca una solución con simetría esférica, $\xi(r, t)$, donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, que es el módulo del radiovector del punto de observación de la onda. La ec. (1.51) en coordenadas esféricas para la función $\xi(r, t)$ es

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \nabla_r^2 \xi = v^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right), \quad (1.52)$$

donde ∇_r^2 es la parte radial del operador Laplaciano. La sustitución $\xi(r, t) = r^{-1}u(r, t)$ lleva a la relación

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-r^{-2}u + r^{-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (1.53)$$

Haciendo la sustitución de la ec. (1.53), en la ec. (1.52), se llega a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

la cual tiene como solución, las funciones $u(r, t) = f(r \mp vt)$ de onda "plana". De aquí, la solución de la EO con simetría esférica, se representa por

$$\xi(r, t) = r^{-1}u(r, t) = \xi(r, t) = r^{-1}f(r \mp vt).$$

Un caso particular de la última ecuación, es la onda esférica armónica con $f(r \mp vt) = A \cos(kr \mp \omega t)$, la cual fue introducida anteriormente.

SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Se tiene la ecuación de onda en la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.54)$$

donde se hace el cambio de variables

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct, \\ \eta &= x + ct. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Sumando las dos expresiones en la ec. (1.55), queda

$$2x = \xi + \eta,$$

y restándolas se obtiene

$$2ct = \xi - \eta.$$

Utilizando estas variables, se expresa la onda en nuevas variables

$$u(x, t) = v(\xi, \eta).$$

Utilizando la regla de la cadena para las derivadas, se tienen las siguientes expresiones

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \equiv v_{\xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2c}u_t,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \equiv v_{\eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t,$$

o bien

$$2cv_{\xi} = cu_x - u_t,$$

y

$$2cv_{\eta} = cu_x + u_t.$$

Ahora se obtienen la segunda derivada de la función $v(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} 4c^2v_{\xi\eta} &= 2c \frac{\partial}{\partial \eta} (cu_x - u_t) = 2c \left[(cu_{xx} - u_{tx}) \frac{\partial x}{\partial \eta} + (cu_{xt} - u_{tt}) \frac{\partial t}{\partial \eta} \right] \\ &= (cu_{xx} - u_{tx})c + (cu_{xt} - u_{tt}) = c^2u_{xx} - u_{tt}. \end{aligned}$$

Reduciendo la ecuación anterior queda

$$4c^2v_{\xi\eta} = c^2u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

La solución general de la última ecuación es

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta). \quad (1.56)$$

Para que sea consistente, es necesario que

$$f(\xi), g(\eta) \in C^2.$$

Es un grupo de funciones con segundas derivadas continuas. Cambiando ξ y η a las variables iniciales, ec. (1.55), se tiene

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (1.57)$$

que es la solución general de la ec. (1.54).

Cualquier solución a la ec. (1.54), puede ser presentada como la suma anterior.

1.2.5. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN Y LAS ONDAS ESTACIONARIAS

Si en un medio lineal, las ondas se sobreponen unas sobre otras sin distorsión, produciendo finalmente una onda resultante, de tal manera que la oscilación en cada punto de la onda compuesta, es la suma vectorial lineal de las oscilaciones en las ondas constituyentes, se dice que

cumple el *principio de superposición lineal de las ondas*. Este principio se puede considerar como una consecuencia de la linealidad de la EO.

Ya se comprobó que las ondas del tipo $u_1(x, t) = f(x - ct)$ y $u_2(x, t) = g(x + ct)$, son soluciones de la EO unidimensional. Debido a la linealidad de la EO, la onda compuesta de las dos, $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$, también es la solución de la EO. Un caso particular, pero de gran importancia, es la interferencia de dos ondas planas de igual amplitud y frecuencia. El proceso ondulatorio que resulta de esta composición, se llama *onda estacionaria*. En la práctica, se producen como resultado de la composición de dos ondas que se mueven en sentidos opuestos, una de ellas es la onda excitada por la fuente, que avanza siguiendo el eje de propagación y la otra es la onda que es reflejada debido a la presencia de un obstáculo (por ejemplo, una onda armónica en la cuerda tendida con un extremo fijo) invirtiendo su sentido.

Como un ejemplo, se considera la composición de dos ondas planas armónicas que se propagan a lo largo del eje x , en sentidos opuestos, siendo estas $u_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1)$ y $u_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2)$. Sumando estas expresiones y transformando el resultado, se tiene

$$u = u_1 + u_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right). \quad (1.58)$$

Escogiendo los puntos de referencia para x y t de tal manera que α_1 y α_2 nulas, de la ec. (1.58)

$$u(x, t) = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (1.59)$$

De la ec. (1.59) se desprende que en cada plano x , la onda estacionaria produce las oscilaciones de la misma frecuencia que la de las oscilaciones en las ondas que se encuentran, y la amplitud de oscilación depende de x

$$\tilde{A} = |2A \cos kx|. \quad (1.60)$$

En los puntos cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi, \quad \text{ó } x_{cr} = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

la amplitud de las oscilaciones alcanzan su valor máximo igual a $\tilde{A} = |2A|$. Estos puntos se llaman *crestas*.

En los puntos cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad \text{ó } x_{nodo} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

la amplitud de las oscilaciones es nula. Estos puntos se denominan *odos*.

El factor $2A \cos kx$, ec. (1.59), al pasar el valor nulo, cambia de signo. Esto significa que los puntos que se encuentran a distintos lados de un nodo oscilan en fases contrarias. Todos los puntos comprendidos entre dos nodos contiguos oscilan en fase.

2. ONDAS EN CUERDAS TENDIDAS

2.1. LEY DE HOOKE

Al aplicar una fuerza sobre cualquier cuerpo, éste se deforma, es decir, varía en dimensiones y forma. La deformación se llama elástica, si después de cesar la fuerza, el cuerpo toma las dimensiones y la forma inicial. Las deformaciones elásticas se observan cuando la fuerza aplicada no supera cierto límite (límite de elasticidad) determinado para cada cuerpo. En la teoría de la elasticidad estudia todos los tipos y distribuciones de las tensiones y deformaciones dentro de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas externas aplicadas. Aquí es considerado un ejemplo más simple, pero práctico.

Deformación de una barra al aplicarle una fuerza F_{ext} .

La deformación unilateral de una barra, se caracteriza por la variación relativa de su longitud (ref. [4])

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (2.1)$$

Como es sabido, para las barras de un material dado, se cumple (en el límite de elasticidad del material) la siguiente relación entre fuerza externa y deformación relativa:

$$\varepsilon = \alpha \frac{F_{ext}}{S}, \quad \text{ó} \quad \frac{F_{ext}}{S} = E\varepsilon,$$

donde S es el área de la sección, $E = 1/\alpha$ es una constante del material, se denomina el módulo de elasticidad de Young. A la razón F_{ext}/S se le llama *tensión normal* σ , cuando está dirigida según la normal a la superficie; se le llama *tensión tangencial* τ , cuando la fuerza está dirigida según la tangente a la superficie sobre la que actúa la fuerza. La fórmula anterior es reescrita en la forma

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.2)$$

que es la expresión de la ley de Hooke.

Para caracterizar la distribución de deformación y de la fuerza elástica en cada punto de una barra, que es importante en caso de un cuerpo no uniforme, se usa la forma diferencial de la ley de Hooke. Para obtenerla se aplica esta ley en forma integral, ec. (2.2), a un trozo pequeño de la barra de longitud Δx entre dos secciones con coordenadas x y $x' = x + \Delta x$ en su estado natural (sin deformación). La sección x de la barra, en un estado deformado se desplaza al punto $x + u(x)$ y la sección x' de la barra se desplaza al punto $x' + u(x')$, donde $u(x)$ es el desplazamiento de los puntos de la sección de la barra, que está marcado por la coordenada x en estado no deformado.

De la ec. (2.2) sigue que

$$\sigma(x') = E\varepsilon = E \frac{l - l_0}{l_0} \quad (2.3)$$

donde $l_0 = x' - x$ y $l = x' + u(x') - (x + u(x))$, sustituyendo estos valores en la ec. (2.3), queda

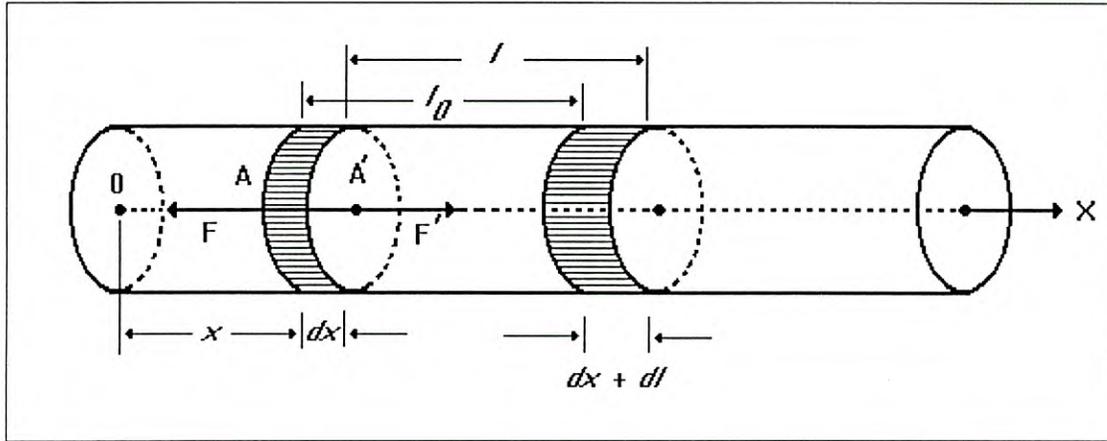


Figure 2.1: Deformación longitudinal en una barra.

$$\sigma(x') = E \frac{[x' + u(x') - (x + u(x))] - (x' - x)}{x' - x}.$$

Ahora, el término $u(x')$ lo desarrollo en series de Taylor alrededor de $x' = x$

$$\sigma(x) = E \frac{[\Delta x + u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + O(\Delta x^2) - u(x)] - \Delta x}{\Delta x},$$

y, tomando el límite $\Delta x \rightarrow 0$, se tiene la ley de Hooke en forma diferencial

$$\sigma(x) = \frac{\partial u}{\partial x} E,$$

donde la deformación local es $\varepsilon(x) = \partial u / \partial x$.

De la última expresión, uno comprende que allí donde los desplazamientos de las partículas del medio son máximos, la deformación $\varepsilon(x) = \partial u / \partial x = 0$ y, por consiguiente la tensión es nula, $\sigma(x) = 0$. En los sitios donde las partículas por su posición de equilibrio natural, $u(x, t) = 0$, la deformación $\varepsilon(x, t)$ y la tensión normal $\sigma(x, t)$ alcanzan sus valores máximos, alternándose unas con otras, las deformaciones positivas y negativas. De acuerdo con esto, la onda elástica longitudinal consta de compresiones y depresiones.

2.2. MOVIMIENTO LONGITUDINAL

Una cuerda puede ser considerada , hasta cierto punto, como una barra delgada con sección transversal muy pequeña $S \rightarrow 0$. Este es un medio cuasi-unidimensional. De acuerdo con estas

propiedades la deformación longitudinal de una cuerda y de una barra, son muy parecidas, por lo que, las ecuaciones del movimiento longitudinal son idénticas.

Se considera el movimiento de una cuerda elástica, en principio infinita. De aquí en adelante, se supone que la cuerda es perfectamente flexible, es decir, que no hay resistencia al cizallamiento, lo que la distingue de una barra. Además, se supone que para la cuerda se cumple la ley de Hooke en todos los movimientos de interés.

En su estado de equilibrio una cuerda elástica tendida por una fuerza longitudinal de tensión $T_0(x)$, despreciando el momento de las demás fuerzas, está en una línea recta, sea el eje x . La cuerda considerada puede ser especificada por los siguientes parámetros:

la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud), que es $\rho(x)$;

el módulo de elasticidad (que está relacionada con el módulo de Young) es $\lambda(x) = S(x) \cdot E(x)$, donde $S(x)$ es la sección transversal de la cuerda y $E(x)$ es el módulo de Young; la tensión normal $T_0(x)$, que se determina por las fuerzas longitudinales externas.

Los parámetros λ y ρ son propios de la cuerda, la tensión T_0 es el parámetro externo. Los tres parámetros λ , ρ y T_0 determinan el estado de equilibrio de la cuerda y, en general, son funciones de la coordenada x .

Se considera un trozo de la cuerda de longitud natural l_0 , bastante pequeño para que $\lambda(x)$ sea constante en este trozo. Si se extiende este trozo hasta una longitud l_1 , la fuerza de tensión T_1 en este pequeño segmento se define por la expresión

$$T_1 = \lambda \frac{l_1 - l_0}{l_0}; \Rightarrow l_0 (T_1 + \lambda) = \lambda l_1. \quad (2.4)$$

Para el mismo trozo extendido a la longitud l_2 se tiene

$$T_2 = \lambda \frac{l_2 - l_0}{l_0}; \Rightarrow l_0 (T_2 + \lambda) = \lambda l_2. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, dividiendo la ec. (2.5) entre la ec. (2.4), es

$$\frac{T_2 + \lambda}{T_1 + \lambda} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (2.6)$$

Se considera el movimiento longitudinal de una cuerda tendida. La Figura 2.2 muestra a la cuerda en su estado de equilibrio y en su estado al tiempo t , cuando los puntos de la cuerda están desplazados de sus posiciones de equilibrio.

Sea el punto O el origen del sistema de coordenadas, y sean P_e y P'_e , los dos puntos marcados de la cuerda en su estado de equilibrio. Las coordenadas de estos puntos son x y x' respectivamente. Debido a una fuerza neta no nula, el segmento marcado $P_e P'_e$ se mueve de tal manera que en el momento t los puntos P_e y P'_e se desplazan a los puntos P_t y P'_t , respectivamente. En consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned} OP_e &= x, & \rightarrow OP_t &= x + u(x, t), \\ OP'_e &= x', & \rightarrow OP'_t &= x' + u(x', t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

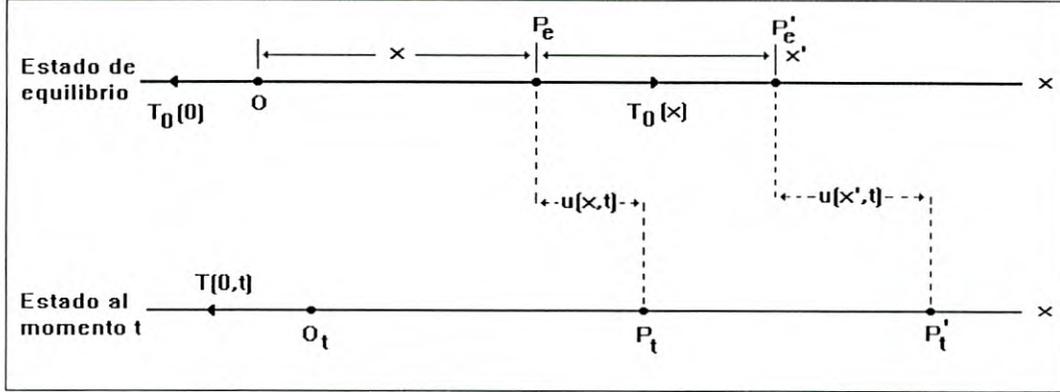


Figure 2.2: La cuerda está en un estado de equilibrio, y después, en un estado desplazado al momento t (los puntos de la cuerda están desplazados de sus posiciones iniciales).

donde $u(x, t)$ es el desplazamiento del punto $P_e(x)$, con coordenada x en el estado de equilibrio de la cuerda. Por lo tanto, suponiendo que la separación Δx entre los puntos P_e y P'_e es pequeña, las longitudes de los segmentos de interés son

$$P_e P'_e = x' - x, \quad (2.8)$$

$$P_t P'_t = x' + u(x', t) - x - u(x, t) \simeq \Delta x \left(1 + \frac{\partial u_L}{\partial x} \right). \quad (2.9)$$

Se supone que los desplazamientos del medio causados por una onda, no son extremadamente rápidos para que se cumplan las relaciones basadas en la ley de Hooke. Pues, usando las ecs. (2.6, 2.8 y 2.9), se encuentra la siguiente relación:

$$\frac{T(P'_t, t) + \lambda(P'_t)}{T(P_e) + \lambda(P_e)} = \frac{P_t P'_t}{P_e P'_e} \simeq \left(1 + \frac{\partial u_L(x, t)}{\partial x} \right). \quad (2.10)$$

En el límite $x' \rightarrow x$ de la fórmula anterior se llega a

$$T(P_t, t) - T_0(P_e) + [\lambda(P_t) - \lambda(P_e)] \simeq [T_0(P_e) + \lambda(P_e)] \frac{\partial u_L(x, t)}{\partial x},$$

donde T_0 es la tensión que se ejerce sobre la cuerda.

Tomando en cuenta que las deformaciones pequeñas del medio no cambian, hasta cierto grado, las propiedades elásticas del material, es decir $\lambda(x + u_L(x, t)) \simeq \lambda(x)$, y despreciando el factor $[\lambda(P_t) - \lambda(P_e)]$ de la ecuación anterior. Finalmente se llega a la relación:

$$T(P_t, t) - T_0(P_e) \simeq [T_0(P_e) + \lambda(P_e)] \frac{\partial u_L(x, t)}{\partial x}, \quad \text{ó} \quad (2.11)$$

$$T(x + u(x, t), t) - T_0(x) \simeq [T_0(x) + \lambda(x)] \frac{\partial u_L(x, t)}{\partial x}.$$

La tensión de la cuerda depende de las fuerzas externas que la mantienen tendida, ó en un estado de movimiento ondulatorio. Además, pueden existir algunas fuerzas externas adicionales, con la densidad lineal $g(x, t)$, las cuales llevan a un movimiento ondulatorio forzado. Tomando en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre una porción de la cuerda y usando la segunda ley de Newton, se puede escribir la siguiente ecuación para el movimiento longitudinal de un trozo de la cuerda, de longitud $x' - x = \Delta x$:

$$\rho(\xi) \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u_L(\xi, t)}{\partial t^2} = g(\xi, t) \cdot \Delta x + \{[T(P'_t, t) - T_0(P'_t)] - [T(P_t, t) - T_0(P_t)]\}, \quad (2.12)$$

donde $x < \xi < x'$. Al desarrollar los términos entre llaves en serie de Taylor, conservando sólo el primer término, y además si se usa la ec. (2.11):

$$\{[T(P'_t, t) - T_0(P'_t)] - [T(P_t, t) - T_0(P_t)]\} \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left[[T_0(x) + \lambda(x)] \frac{\partial u_L(x, t)}{\partial x} \right] \Delta x,$$

donde se acepta la igualdad $T_0(x + u_L(x, t)) \cong T_0(x)$, porque la tensión en el estado de equilibrio se cambia muy poco en las distancias del orden de $u_L(x, t)$, tal como fue mencionada anteriormente en el caso con el módulo de elasticidad $\lambda(x)$. Sustituyendo el desarrollo de la ecuación anterior en la ec. (2.12), finalmente se obtiene la ecuación de movimiento longitudinal de una cuerda tendida en la siguiente forma:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u_L(x, t)}{\partial t^2} = g(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left([T_0(x) + \lambda(x)] \frac{\partial u_L(x, t)}{\partial x} \right). \quad (2.13)$$

Esta es una ecuación lineal diferencial parcial de segundo orden. Se recuerda que en esta ecuación $u_L(x, t)$ es el desplazamiento longitudinal del punto de la cuerda con coordenadas en equilibrio x , $\rho(x)$ es la densidad lineal de masa, $T_0(x)$ es la tensión en la cuerda en su estado de equilibrio, $\lambda(x)$ es el módulo de elasticidad y $g(x, t)$ es la densidad lineal de las fuerzas externas adicionales a las fuerzas que componen la tensión de equilibrio $T_0(x)$. Por lo general, los términos de la ecuación anterior son funciones de la coordenada espacial x . La fuerza $g(x, t)$ podría ser la suma de una fuerza de tracción $f(x, t)$, y de una fuerza de amortiguamiento lineal $(-Ru_L)$, donde R es una constante.

Si $g(x, t) \equiv 0$, la ec. (2.13) se convierte en la ecuación de movimiento ondulatorio libre:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u_L(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left([T_0(x) - \lambda(x)] \frac{\partial u_L(x, t)}{\partial x} \right). \quad (2.14)$$

Cuando la cuerda es uniforme, es decir, las funciones $\rho(x)$, $T_0(x)$ y $\lambda(x)$ son constantes, la ec. (2.14) se reduce a la ecuación de onda clásica

$$u_{tt} = v_L^2 u_{xx},$$

donde $v_L = \sqrt{(T_0 + \lambda)/\rho}$. Por lo tanto, la cuerda uniformemente tendida transmite las ondas longitudinales a ésta velocidad.

2.3. MOVIMIENTO TRANSVERSAL

Se estudiará el movimiento transversal de la cuerda flexible sometida a una tensión $T_0(x)$. En condiciones de equilibrio, la cuerda está en línea recta. Se restringe a considerar un movimiento confinado a un plano, en el cual se escoge un sistema de coordenadas u, x de tal manera que el eje x coincida con la línea recta del estado de equilibrio y el eje u nos represente los desplazamientos transversales (ver figura 2.3).

Para encontrar la ecuación del movimiento transversal de la cuerda, se considera el movimiento de un segmento de la cuerda que ocupa la posición entre las coordenadas x y x' en el estado de equilibrio. Sean los puntos $P_e = (x, 0)$ y $P'_e = (x', 0)$, que marcan los extremos del trozo en equilibrio. A causa de un movimiento, al tiempo t , los extremos del trozo se desplazan de sus posiciones de equilibrio a los puntos $P_t = (x, u(x, t))$ y $P'_t = (x', u(x', t))$, respectivamente. Aquí, la función $u(x, t)$ es el desplazamiento transversal del punto $P_e = (x, 0)$. En cada extremo del trozo desplazado actúa una fuerza de tensión que está dirigida a lo largo de la tangente en cada punto de la cuerda. Debido a la curvatura, estas dos fuerzas no son directamente opuestas, y, en principio no están en dirección del eje x . En consecuencia, surgen las componentes verticales-transversales de éstas fuerzas, las que causarán un movimiento transversal del trozo.

Para simplificar el problema y proseguir, se hacen las siguientes suposiciones:

- 1) la cuerda es perfectamente flexible, es decir, no hay resistencia al cizallamiento;
- 2) la cuerda en su estado de equilibrio está bajo la acción de la tensión normal $T_0(x)$;
- 3) el movimiento transversal confinado a un plano, es pequeño en el sentido que

$$\tan \alpha(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \ll 1, \quad (2.15)$$

donde $\alpha(x)$ es el ángulo formado por la tensión y la horizontal que es un ángulo pequeño para que se cumpla la ley de Hooke.

Debido a esta consideración, se tiene que:

- 1) La componente que está dirigida a lo largo del eje x es

$$T \cos \alpha \simeq T.$$

- 2) La componente transversal de la tensión es

$$T \operatorname{sen} \alpha \simeq T \tan \alpha = T \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.16)$$

- 3) El incremento longitudinal $du_L = dS - dx \simeq dx (\partial u / \partial x)^2 / 2$ de un segmento, causado por el movimiento transversal de la cuerda, es muy pequeño, es decir,

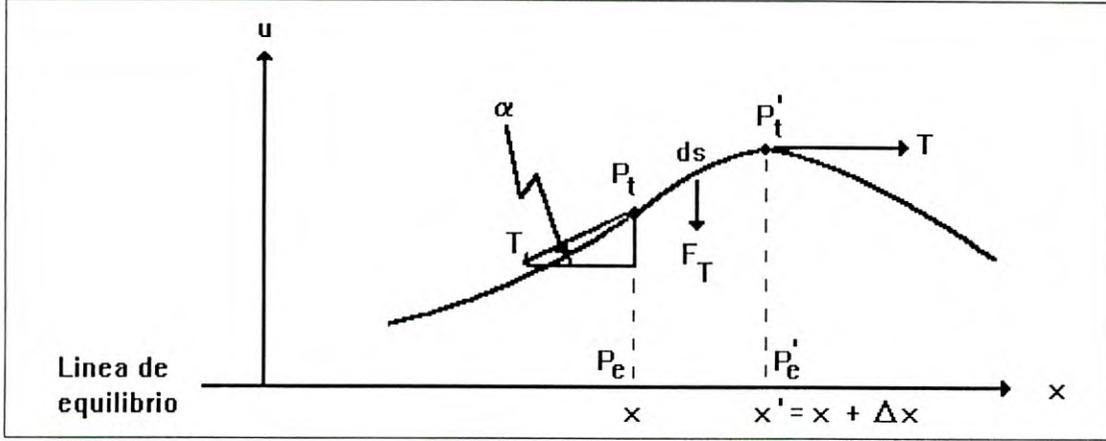


Figure 2.3: Fuerzas que se ejercen sobre una sección de una cuerda desplazada transversalmente.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \tan^2 \alpha \approx \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (2.17)$$

donde dx y dS son la longitud del segmento en el estado de equilibrio y en un estado de movimiento de la cuerda, respectivamente.

Ya se encontró que los cambios de tensión, causados por alargamientos de la cuerda, están relacionados con deformaciones longitudinales por la ec. (2.11). Usando la fórmula (2.17), en el caso del movimiento transversal, se tiene

$$\frac{T}{T_0} - 1 = \left(1 + \frac{\lambda(x)}{T_0} \right) \frac{\partial u_L}{\partial x} = \left(1 + \frac{\lambda(x)}{T_0} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x} - 1 \right) \approx \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{\lambda(x)}{T_0} \right).$$

Debido a que $T_0/\lambda \gg \alpha^2$, ya que α es pequeño, la parte derecha de la ecuación anterior es aproximadamente cero. Por consiguiente, para un movimiento transversal pequeño, se tiene

$$T(x, t) \approx T_0(x). \quad (2.18)$$

A causa de la tensión, sobre un trozo de cuerda de longitud Δx actúa la fuerza transversal

$$\begin{aligned} F_T(x, t) &= T(x', t) \frac{\partial u(x', t)}{\partial x} - T(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \\ &\simeq T_0(x') \frac{\partial u(x', t)}{\partial x} - T_0(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \cdot \Delta x + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Apoyándonos en la segunda ley de Newton, para el trozo considerado se tiene la ecuación

$$\rho(x) \cdot \Delta x \cdot u_{tt}(x, t) = g_T(x, t) \cdot \Delta x + F_T(x, t) + O(\Delta x^2),$$

donde $g_T(x, t)$ es la densidad lineal de las fuerzas transversales adicionales, $\rho(x)$ es la densidad lineal de masa y $u(x, t)$ es el desplazamiento transversal del punto de la cuerda con coordenada x . De la última ecuación, dividiendo entre Δx y tendiendo $x' \rightarrow x$, finalmente se llega a la ecuación de movimiento transversal pequeño de una cuerda tendida, que es

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = g(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right). \quad (2.19)$$

En el caso, en que $\rho(x)$ y $T_0(x)$ son constantes y además $g(x, t) \equiv 0$, la ec. (2.19) se convierte en la ecuación de onda clásica

$$u_{tt} = v^2 u_{xx},$$

donde $v = \sqrt{T_0/\rho}$ es la velocidad constante de las ondas transversales.

Al comparar las velocidades de propagación de las ondas longitudinales y transversales en la misma cuerda, se encuentra que

$$v = \sqrt{T_0/\rho} \leq \sqrt{\frac{T_0 + \lambda}{\rho}} = v_L, \quad (2.20)$$

es decir, la velocidad transversal v es menor o igual que la velocidad longitudinal v_L . Si $T_0 \ll \lambda$, entonces $v \ll v_L$. Esta situación se encuentra en la cuerda de un violín. Al contrario, cuando la cuerda es muy débil, $T_0 \gg \lambda$, entonces $v \sim v_L$. Esta situación se puede observar en un resorte espiral débil.

2.3.1. MOVIMIENTO VECTORIAL

Hasta el momento se han considerado las ondas escalares, que en cada punto del espacio y en cada momento se caracterizan solamente por una magnitud escalar. Cuando el movimiento transversal no está confinado a un plano, se puede extender nuestra consideración a un caso más general, que son los desplazamientos transversales vectoriales cuando el desplazamiento $\mathbf{u}(x, t)$ es un vector bidimensional en un plano perpendicular al eje x . En este caso, el movimiento ondulatorio se describe por la ec. (2.19), con la sustitución de $u \rightarrow \mathbf{u}$ y $g \rightarrow \mathbf{g}$:

$$\begin{aligned} \rho(x) u_{tt}^z(x, t) &= g^z(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0(x) \frac{\partial u^z(x, t)}{\partial x} \right), \\ \rho(x) u_{tt}^y(x, t) &= g^y(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0(x) \frac{\partial u^y(x, t)}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Juntando estas dos expresiones se pueden escribir en forma vectorial

$$\rho(x) \mathbf{u}_{tt}(x, t) = \mathbf{g}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0(x) \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} \right), \quad (2.21)$$

donde $\mathbf{u}(x, t)$ es el vector de desplazamiento transversal. Si a su vez, al movimiento transversal se agrega el movimiento longitudinal, entonces la componente longitudinal se describe por la ec. (2.13):

$$\rho(x)u_{tt}^L(x, t) = g^L(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left((T_0(x) + \lambda(x)) \frac{\partial u^L(x, t)}{\partial x} \right).$$

La ec. (2.21), en el caso en que $\mathbf{g}(x, t) \equiv 0$ y $T_0(x) = cte$, se convierte en una EO vectorial clásica:

$$\mathbf{u}_{tt}(x, t) = v^2 \mathbf{u}_{xx}(x, t). \quad (2.22)$$

Se llama *onda plana polarizada* a la onda de la forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \hat{\mathbf{n}} \cdot u(x, t),$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario constante. La dirección de polarización está en la dirección del vector $\hat{\mathbf{n}}$, y el plano de polarización es el que contiene al vector $\hat{\mathbf{n}}$ y la dirección de propagación de la onda (en nuestro caso es el eje x).

Cualquier onda que sea una solución de la ec. (2.21), se puede escribir como la composición lineal de dos ondas planas polarizadas en dos direcciones perpendiculares entre sí.

Un ejemplo particular es el de una onda armónica que se propaga en la dirección positiva del eje x a velocidad v , la cual tiene la forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{A} \cos(kx - kct) + \mathbf{B} \sin(kx - kct),$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son vectores constantes. En un punto dado con $x = x_0$, el extremo del vector $\mathbf{u}(x_0, t)$ describe por lo general una elipse durante el período $T = 2\pi/kv$ (ver la sección 1.1.3). En este caso, se dice que la onda tiene polarización elíptica. En el caso particular de $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, la onda polarizada es plana. Cuando $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ y $(\mathbf{A} \perp \mathbf{B}) = 0$, tiene la polarización circular.

2.4. PROBLEMAS CON CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

2.4.1. CONDICIONES INICIALES Y SOLUCIÓN DE D'ALEMBERT DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Como la solución general se emplea para resolver un problema particular, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de la ec. (1.57), se determinan por condiciones iniciales y por condiciones de frontera.

Se considera un problema con condiciones iniciales. Se buscará una función $u(x, t)$ ($|x| < \infty$, $t > 0$) que satisface la ec. (1.55) y las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= a(x), \\ u_t(x, 0) &= b(x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde las funciones conocidas $a(x)$ y $b(x)$ están definidas en el intervalo $|x| < \infty$. Sustituyendo la solución general (1.57), en (2.23), se tiene

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = a(x). \quad (2.24)$$

Derivando la ec. (1.57) parcialmente con respecto al tiempo, se tiene

$$u_t(x, 0) = -cf'(x) + cg'(x) = b(x). \quad (2.25)$$

$a(x) \in C^2$ y $b(x) \in C^1$. Al integrar la ecuación anterior se encuentra el siguiente resultado

$$-(g(x_0) - f(x_0)) - f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x b(s) ds, \quad (2.26)$$

donde $C_0(x_0) = g(x_0) - f(x_0)$ es una constante de integración. Usando (2.26) y (2.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}a(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x b(s) ds - C_0(x_0), \\ f(x) &= \frac{1}{2}a(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x b(s) ds + C_0(x_0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

De aquí, sustituyendo las ecuaciones anteriores en la (1.57), se llega a la solución particular conocida como solución de D'Alembert de la EO unidimensional con condiciones iniciales:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x - ct) + a(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(s) ds. \quad (2.28)$$

2.4.2. REFLEXIÓN DE UNA ONDA EN LA FRONTERA

En realidad, la mayoría de los medios de propagación de ondas son finitos, y por lo tanto, es importante conocer qué va a suceder con una onda al encontrar la frontera de su medio de propagación. La respuesta a esta pregunta depende de las condiciones dadas en la frontera del medio, que se llaman *condiciones de frontera*.

Se inicia con la ecuación de onda unidimensional para un medio semiinfinito:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad (x < 0, \quad t > 0), \quad (2.29)$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = a(x), \quad u_t(x, 0) = b(x), \quad x < 0. \quad (2.30)$$

Antes de introducir condiciones de frontera, se considera la solución $\tilde{u}(x, t)$ del problema auxiliar cuando las funciones $a(x)$ y $b(x)$ están extendidas a todo el eje x , según la siguiente regla:

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} a(x) & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}, \quad \tilde{b}(x) = \begin{cases} b(x) & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Aplicando la fórmula de D'Alembert ec. (2.28), a este problema, se presenta la solución en la forma

$$\tilde{u}(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (2.32)$$

donde (ver la ec. (2.27))

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\tilde{a}(\xi) + \frac{1}{2c} \int_{\xi}^0 \tilde{b}(s) ds, \quad (2.33)$$

$$g(\xi) = \frac{1}{2}\tilde{a}(\xi) - \frac{1}{2c} \int_{\xi}^0 \tilde{b}(s) ds. \quad (2.34)$$

Las funciones $f(\xi)$ y $g(\xi)$ están definidas sólo por las $\tilde{a}(\xi)$ y $\tilde{b}(\xi)$, y viceversa. Se observa que

$$f(\xi) = 0 = g(\xi), \quad \text{para } \xi > 0, \quad (2.35)$$

debido a que $\tilde{a}(x) = 0 = \tilde{b}(x)$ para $\xi > 0$.

La solución general de la EO, puede ser representada en forma de la composición siguiente:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) = \sum_i f_i(x - ct) + \sum_m g_m(x + ct).$$

Por eso, se supone que cuando se aplican las condiciones de frontera en el extremo $x = 0$, la solución del problema se puede representar en la forma

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + F(x + ct) + G(x - ct), \quad (2.36)$$

donde las funciones $F(\xi)$ y $G(\xi)$ son funciones que se deben encontrar. Para el semiespacio $x < 0$, las condiciones iniciales se satisfacen por la función $\tilde{u}(x, t)$, entonces, aplicando las condiciones iniciales a la función $u(x, t)$ se tiene

$$\begin{aligned} a(x) &= u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0) + F(x) + G(x) \\ &= a(x) + F(x) + G(x) \quad \text{para } x < 0, \\ b(x) &= u_t(x, 0) = \tilde{u}_t(x, 0) + cF'(x) - cG'(x) \\ &= b(x) + cF'(x) - cG'(x) \quad \text{para } x < 0, \end{aligned}$$

se concluye que

$$F(x) + G(x) = 0, \quad (2.37)$$

y

$$cF'(x) - cG'(x) = 0. \quad (2.38)$$

Integrando la última ecuación se puede reescribir las ecs. (2.37 y 2.38) en la siguiente forma

$$F(\xi) + G(\xi) = 0, \quad \text{para } \xi < 0, \quad (2.39)$$

$$F(\xi) - G(\xi) = cte, \quad \text{para } \xi < 0. \quad (2.40)$$

Restando las ecs. (2.39 y 2.40) se obtiene

$$2G(\xi) = cte, \quad \xi < 0,$$

y tomando la $cte = 0$, finalmente se tiene

$$G(\xi) = 0, \quad \xi < 0. \quad (2.41)$$

Si se sumaman las ecs. (2.39 y 2.40), se tiene

$$F(\xi) = 0, \quad \xi < 0, \quad (2.42)$$

pero $F(\xi) \neq 0$, cuando $\xi > 0$.

Por lo tanto, para el semiespacio $x < 0$ y $t > 0$ la función $G(x - ct)$ se puede despreciar de la $u(x, t)$, ec. (2.36), y escribir la solución del problema en forma general

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) + F(x + ct), \quad (x < 0, \quad t > 0). \quad (2.43)$$

La función $f(x - ct)$ y $g(x + ct)$, ecs. (2.33 y 2.34), permiten que se satisfagan las condiciones iniciales ($F(x) = 0$ para $x < 0$). La función $F(\xi)$ se encuentra con la utilización de las condiciones de frontera ($g(ct) = 0$ para $t > 0$):

$$u(0, t) = f(-ct) + F(ct). \quad (2.44)$$

La onda $g(x + ct)$ se propaga en la dirección negativa del eje x y no está relacionada con las condiciones de frontera. Por lo dicho anteriormente,

$f(x - ct)$ se le llama *onda incidente*,
 $g(x + ct)$ se le llama *onda de retroceso*,
 $F(x + ct)$ se le llama *onda reflejada*.

2.4.3. ONDAS TRANSVERSALES EN UNA CUERDA TENDIDA CON DIFERENTES CONDICIONES DE FRONTERA

Aquí se consideran problemas con condiciones de frontera para movimientos transversales en una cuerda tendida con extremo en el punto $x = 0$.

EXTREMO FIJO

Se consideran ondas en una cuerda semiinfinita con un extremo fijo, en el punto $x = 0$.

Aplicando la condición de frontera, que en este caso es $u(0, t) = 0$, de la ec. (2.43) se obtiene la siguiente expresión

$$0 = f(-ct) + F(ct).$$

Despejando la ecuación anterior y sustituyendo el valor $ct = \xi$ es

$$F(\xi) = -f(-\xi).$$

Que es el valor de la onda reflejada en términos de la onda incidente.

Ahora el resultado obtenido en la ecuación anterior lo sustituyo en la ec. (2.43), queda

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) - f(-x - ct),$$

que es la solución de la ecuación de onda con valores iniciales y con condiciones de frontera del tipo extremo fijo. Las funciones $f(\xi)$ y $g(\xi)$ se definen en ecs. (2.33 y 2.34).

EXTREMO LIBRE

Para las ondas en una cuerda semiinfinita con extremo libre en el punto $x = 0$, la condición de frontera $u_x(0, t) = 0$.

De la condición de frontera $u_x(0, t) = 0$, aplicada a la ec. (2.43), se tiene

$$0 = f'(-ct) + g'(ct) + F'(ct).$$

Tomando en cuenta que $g'(ct) = 0$, ya que la función $g(\xi) = 0$, (ver ec. (2.35)), es

$$F'(\xi) = -f'(-\xi).$$

Integrando la ecuación anterior queda

$$F(\xi) = f(-\xi) + cte.$$

Para encontrar la constante de integración se observa que

$$f(\xi) = 0, \text{ y } F(-\xi) = 0 \text{ para } \xi > 0, \text{ ver ecs. (2.35 y 2.42),}$$

lo que lleva a que la constante es cero, entonces

$$F(x + ct) = f(-x - ct).$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ec. (2.43) queda

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) + f(-x - ct).$$

La onda reflejada $F(x + ct) = f(-x - ct)$ conserva la forma y el signo.

EXTREMO CON RESORTE

Ahora se consideran las ondas en una cuerda semiinfinita con un resorte en el extremo.

Se tiene la condición de frontera $Tu_x + \tilde{K}u = Tu_x + TKu = 0$, donde \tilde{K} es la constante elástica del resorte y T es la tensión de la cuerda. Si se aplica a la ec. (2.43), se tiene

$$f'(-ct) + F'(ct) + Kf(-ct) + KF(ct) = 0.$$

Sustituyendo $ct = \xi$ en la ecuación anterior, agrupando los términos similares y despejándolos, se llega a la ecuación

$$-(f'(-\xi) + Kf(-\xi)) = F'(\xi) + KF(\xi). \quad (2.45)$$

Se observa que

$$e^{-K\xi} \frac{d}{d\xi} [e^{K\xi} F(\xi)] = F'(\xi) + KF(\xi),$$

$$-e^{K\xi} \frac{d}{d\xi} [e^{-K\xi} f(-\xi)] = f'(-\xi) + Kf(-\xi).$$

Sustituyendo las dos últimas expresiones en la ec. (2.45), se obtiene la siguiente ecuación

$$e^{-K\xi} \frac{d}{d\xi} [e^{K\xi} F(\xi)] = e^{K\xi} \frac{d}{d\xi} [e^{-K\xi} f(-\xi)]. \quad (2.46)$$

Integrando la ec. (2.46) por partes, y teniendo la constante de integración igual a cero para satisfacer las condiciones $F(\xi) = 0$ para $\xi < 0$, y $f(\xi) = 0$ para $\xi > 0$, se llega por fin a

$$\int_0^\xi \frac{d}{d\xi} [e^{K\xi} F(\xi)] d\xi = \int_0^\xi e^{2K\xi} \frac{d}{d\xi} [e^{-K\xi} f(-\xi)] d\xi,$$

y

$$e^{K\xi} F(\xi) = e^{K\xi} f(-\xi) - 2K \int_0^\xi e^{Ks} f(-s) ds.$$

Se despeja $F(\xi)$:

$$F(\xi) = f(-\xi) - 2Ke^{-K\xi} \int_0^\xi e^{Ks} f(-s) ds. \quad (2.47)$$

Sustituyendo la ec. (2.47) en la ec. (2.46), se encuentra la solución de la EO para la cuerda con un resorte en el extremo.

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) + f(-x - ct) - 2Ke^{-K(x+ct)} \int_0^{x+ct} e^{Ks} f(-s) ds,$$

donde a los términos

$$f(-x - ct) - 2Ke^{-K(x+ct)} \int_0^{x+ct} e^{Ks} f(-s) ds,$$

se le llama onda reflejada, que está en términos de la onda incidente.

EXTREMO AMORTIGUADO

Las ondas en una cuerda semiinfinita con extremo amortiguado.

Aquí se tiene la condición de frontera $Tu_x(0, t) + Ru_t(0, t) = 0$, donde R es el coeficiente de amortiguamiento y T la tensión de la cuerda. Ahora se aplica esta condición a la ec. (2.43) queda

$$Tf'(-ct) + TF'(ct) - Rcf'(-ct) + RcF'(ct) = 0,$$

donde se sustituye a $ct = \xi$ y se factoriza la ecuación anterior, donde la siguiente ecuación es

$$-f'(-\xi)(T - Rc) = F'(\xi)(T + Rc).$$

Es de interés conocer la onda reflejada, se integra la ecuación anterior y se obtiene el siguiente resultado

$$F(\xi) = \frac{T - Rc}{T + Rc} f(-\xi). \quad (2.48)$$

Ahora se sustituye en (2.43) la ec. (2.48) y se obtiene la solución de la ecuación de onda con valores iniciales y con condiciones de frontera del tipo extremo amortiguado, que es

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) + \frac{T - Rc}{T + Rc} f(x - ct). \quad (2.49)$$

Se observa que si $T = Rc$ desaparece la onda reflejada. A esto se le conoce como correspondencia de impedancia.

3. ECUACIÓN DE ONDA DE UNA CUERDA CON CORRIENTE ELÉCTRICA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Una cuerda tendida, es un sistema físico básico y es usado como un modelo bien establecido para la demostración de cierta variedad de las diferentes formas de ondas y movimiento oscilatorio. Los modos transversales y longitudinales del movimiento de un sistema semejante, suelen ser considerados independientes. Pero qué pasaría si se toma una cuerda con corriente eléctrica bajo tensión elástica y la somete a la acción de un campo magnético? Esta es la pregunta que se va a tratar de contestar en este trabajo (ref. [10]).

Si una corriente eléctrica en una cuerda y/o un campo magnético, bajo cuya influencia la cuerda es colocada, es alternante, la fuerza de Lorentz que actúa en la cuerda es también alterante. Esta fuerza extendida ciertamente causará una oscilación forzada (movimiento ondulatorio) en una cuerda. Además, se demostrará que debido a la estructura de la fuerza de Lorentz y debido a la posibilidad de dar una configuración deseable para el campo magnético, la variedad de formas del movimiento ondulatorio de una cuerda es sorprendentemente grande.

Así, para obtener las ecuaciones que gobiernan el movimiento ondulatorio de la cuerda con corriente eléctrica bajo la tensión T y la acción de un campo magnético, se toma la siguiente geometría del sistema. Una cuerda en equilibrio es extendida en una línea recta a lo largo del eje x , en el sistema de coordenadas cartesianas xyz . La forma de esta cuerda a cualquier instante, puede ser expresado en términos del desplazamiento de cada punto P de equilibrio de la cuerda en este punto x sobre el eje x . Al tiempo t , el desplazamiento del punto P se describe por el vector $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u^x, u^y, u^z)$, donde las componentes $u^y(x, t)$ y $u^z(x, t)$ describen un movimiento transversal pequeño de una cuerda extendida, mientras que la componente $u^x(x, t)$ es usada para describir un movimiento longitudinal.

Retomando del capítulo anterior las ecuaciones de movimiento longitudinal y transversal con una fuerza externa se tiene

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u^{y,z}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u^{y,z}}{\partial x} \right) + f_L^{y,z}(x, t). \quad (3.1)$$

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u^x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left([T(x) + \lambda(x)] \frac{\partial u^x}{\partial x} \right) + f_L^x(x, t), \quad (3.2)$$

donde la densidad lineal de las fuerzas externas (además de la tensión) son representadas por las componentes correspondientes $f_L^{x,y,z}(x, t)$, y donde el subíndice L indica que es una fuerza de Lorentz.

3.1. DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Una situación muy común, es que el movimiento transversal de una cuerda es independiente del movimiento longitudinal. Esto significa que la ec. (3.1) puede ser estudiada separadamente

de la ec. (3.2). Además, esto significa que a menudo los desplazamientos transversales u^y y u^z son independientes entre sí. Pero la situación cambia drásticamente cuando se considera una cuerda con corriente eléctrica en un campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Cada elemento pequeño $d\mathbf{l}$ de esta cuerda está sujeto a la *fuerza de Lorentz*

$$d\mathbf{f}_L(x, y, z, t) = I(t) [d\mathbf{l} \times \mathbf{H}(x, y, z)], \quad (3.3)$$

donde $I(t)$ es una corriente eléctrica en la cuerda y $\mathbf{H}(x, y, z)$ es un campo magnético que actúa sobre el segmento vectorial considerado $d\mathbf{l} = (dl^x, dl^y, dl^z)$ de la cuerda. La longitud en equilibrio del elemento vectorial considerado $d\mathbf{l}$ se supuso igual a dx . Tomando en cuenta las restricciones impuestas por la pequeñez de la amplitud del movimiento, se encuentra que a cualquier tiempo t las componentes del elemento vectorial $d\mathbf{l}$ son definidas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} dl^2 &= |d\mathbf{l}|^2 = (dl^x)^2 + (dl^y)^2 + (dl^z)^2 \\ dl^x &\simeq dl \left(1 - \left(\frac{\partial u^y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u^z}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \approx dx \left(1 - \left(\frac{\partial u^y}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u^z}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \approx dx, \\ dl^{y,z} &\simeq dl \frac{\partial u^{y,z}}{\partial x} \simeq dx \frac{\partial u^{y,z}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La sustitución de las expresiones dadas por las ecs. (3.4) en la ec. (3.3) nos dá las expresiones explícitas para las componentes de la densidad lineal de la fuerza de Lorentz $\mathbf{f}_L(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} f_L^x &= I(t) \left(H^z \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y \frac{\partial u^z}{\partial x} \right), \\ f_L^y &= I(t) \left(H^x \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z \right), \\ f_L^z &= I(t) \left(H^y - H^x \frac{\partial u^y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Un elemento pequeño de la cuerda, marcado por el punto $P_0(x, 0, 0)$ en el estado de equilibrio de la cuerda, se dispara al punto $P_t(x + u^x, u^y, u^z)$ al momento t . En las ecs. (3.5), el valor de un campo magnético tiene que ser tomado en el punto $P_t(x + u^x, u^y, u^z)$. En el caso de un movimiento pequeño de una cuerda, cada componente del campo magnético que actúa en la cuerda en el punto P_t , puede ser expresado en una serie de Taylor cerca de la posición de equilibrio del punto considerado de la cuerda, tal como sigue:

$$\begin{aligned} H^{x,y,z}(x + u^x, u^y, u^z) &\simeq H^{x,y,z}(x) + \frac{\partial H^{x,y,z}}{\partial x} u^x + \frac{\partial H^{x,y,z}}{\partial y} u^y + \frac{\partial H^{x,y,z}}{\partial z} u^z \\ &= H^{x,y,z}(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}(x). \end{aligned}$$

Sustituyendo la última expresión para las componentes del campo magnético en la ec. (3.5), se obtienen las siguientes expresiones aproximadas para las componentes de la fuerza de Lorentz:

$$f_L^x = I(t) \left[H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right] + I(t) \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right], \quad (3.6)$$

$$f_L^y = I(t) \left[H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right] + I(t) \left[\mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} - \mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right], \quad (3.7)$$

$$f_L^z = I(t) \left(H^y(x) - H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right) + I(t) \left(\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x) - \mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right). \quad (3.8)$$

Cabe señalar que todos los valores en las ecs. (3.6, 3.7 y 3.8) son calculados ahora sobre el eje x .

Las ecs. (3.1, 3.2, 3.6, 3.7 y 3.8), constituyen ahora las ecuaciones completas que gobiernan el movimiento de una cuerda tendida con corriente eléctrica en un campo magnético. Este es bastante tentativo para desprestigiar algunos de los términos en la segunda línea de las ecs. (3.6, 3.7 y 3.8), pues ellos contienen valores de orden pequeño. Pero un campo magnético es un elemento externo al sistema y, en principio, $grad(H^{x,y,z})$ puede tener un valor arbitrario, manteniendo los términos discutidos de magnitud considerable. Así en la siguiente sección se analizará cuidadosamente los órdenes de magnitud de los términos de la derecha de las ecs. (3.6, 3.7 y 3.8) para cada componente de la fuerza de Lorentz.

3.2. CLASIFICACIÓN DE LOS TIPOS DE ECUACIONES DE ACUERDO CON LAS CONDICIONES FÍSICAS

Aquí se demuestra que bajo ciertas condiciones, existen 10 casos diferentes del movimiento de una cuerda con corriente eléctrica en un campo magnético permanente.

Caso 1: Las condiciones tales que

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}| \sim |H^{x,y,z}| \quad \text{y} \quad |H^x| \gg |H^y| \sim |H^z|,$$

mantienen el mismo orden de magnitud para todos los términos de la derecha en las ecs. (3.6, 3.7 y 3.8). Por consiguiente, las 3 ecuaciones de movimiento, ecs. (3.1 y 3.2) están acopladas no linealmente entre sí. El movimiento longitudinal depende del movimiento transversal por medio de una derivada parcial $\partial u^{y,z}/\partial x$ y sus productos con $u^{y,z}$. El movimiento transversal depende de el longitudinal uno a través del valor de u^x y los productos $u^x (\partial u^{y,z}/\partial x)$. Los modos transversales en y y z dependen entre sí a través de los valores u^x , $\partial u^z/\partial x$, $u^z (\partial u^z/\partial x)$ y $u^y \partial u^y/\partial x$, $u^y (\partial u^y/\partial x)$, respectivamente.

Se nota aquí que los términos de la derecha de la ec. (3.6), son comparables entre si, pero son mucho más pequeños que los términos correspondientes de las ecs. (3.7 y 3.8), esto significa que la componente $f_L^x(x, t)$ es un orden de magnitud más pequeña que las de las componentes $f_L^{y,z}(x, t)$. Para decidir el problema de mantener o despreciar el término, es requerido un análisis más específico. Pero, apriori no es necesario suponer el mismo orden de magnitud para la amplitud del movimiento transversal, que para la amplitud del movimiento longitudinal. Una pequeña amplitud de la fuerza, puede también causar oscilaciones (ondas) de una considerable magnitud bajo las condiciones de resonancia. Además, en un sistema de ecuaciones de movimiento acopladas, una pequeña fuerza puede jugar un papel importante en regímenes de transición y dar lugar a cambios considerables del movimiento asintótico. Esto habla a favor de la retención de los términos de la derecha de la ec. (3.6).

Caso 2: Si un campo magnético satisface las siguientes condiciones

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}| \sim |H^{x,y,z}| \quad \text{y} \quad |H^x| \leq |H^y| \sim |H^z|,$$

entonces, un análisis comparativo de las magnitudes en las ecs. (3.6,3.7 y 3.8) nos lleva a los siguientes resultados

$$\begin{aligned} f_L^x(x, t) &= I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right) + \\ &+ I(t) \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$f_L^y(x, t) = -I(t) (H^z(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)), \quad (3.10)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) (H^y(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)). \quad (3.11)$$

En este caso, los modos transversales del movimiento de una cuerda son linealmente acoplados entre si y al movimiento longitudinal a través del desplazamiento de $u^{x,y,z}$. El movimiento transversal es acoplado no linealmente con el movimiento transversal. La misma disyuntiva de despreciar ($f_L^x(x, t) \simeq 0$) o mantener los términos de $f_L^x(x, t)$ surge aquí como en el Caso 1.

Caso 3: Si un campo magnético satisface las siguientes condiciones

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \ll |H^{y,z}|,$$

entonces se puede despreciar los términos de la segunda línea de la ec. (3.6), con respecto a esto en la primera línea. Entonces las ecuaciones del movimiento longitudinal (3.1,3.6 y 3.11), tienen solamente acoplamiento lineal al movimiento transversal a través de las derivadas $\partial u^{y,z}/\partial x$:

$$f_L^x(x,t) = I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right). \quad (3.12)$$

Pero, si se tiene

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| \sim |H^x| \quad \text{y} \quad |H^x| \gg |H^y| \sim |H^z|,$$

las ecuaciones del movimiento transversal, ecs. (3.2,3.7,3.8,3.12 y 3.14), están aún acopladas no linealmente al movimiento longitudinal y entre sí:

$$f_L^y(x,t) = I(t) \left[(H^x(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x)) \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z(x) \right], \quad (3.13)$$

$$f_L^z(x,t) = I(t) \left[H^y(x) - (H^x(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right]. \quad (3.14)$$

Y aquí surge la misma inquietud acerca de despreciar ó mantener el término $f_L^x(x,t)$ al igual que en el Caso 1.

Caso 4: Si

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \sim |H^{y,z}|, \quad |\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| \ll |H^x| \quad \text{y} \quad |H^x| \gg |H^y| \sim |H^z|,$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} f_L^x(x,t) &= I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right) + \\ &+ I(t) \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$f_L^y(x,t) = I(t) \left[H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} - (H^z(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)) \right], \quad (3.16)$$

$$f_L^z(x,t) = I(t) \left[(H^y(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)) - H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right], \quad (3.17)$$

En este caso, los modos transversales están linealmente acoplados entre sí y con los modos longitudinales (a través del desplazamiento $u^{x,y,z}$ y las derivadas $\partial u^{y,z}/\partial x$). El movimiento longitudinal es acoplado no linealmente con el movimiento transversal.

Caso 5: Una situación similar tiene lugar si

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \sim |H^{y,z}|, \quad |\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| \ll |H^x| \quad \text{y} \quad |H^x| \leq |H^y| \sim |H^z|.$$

Entonces ocurre que

$$\begin{aligned} f_L^x(x, t) &= I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right) + \\ &+ I(t) \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)) \right] \frac{\partial u^z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$f_L^y(x, t) = -I(t) (H^z(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^z(x)), \quad (3.19)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) (H^y(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^y(x)), \quad (3.20)$$

Aquí los modos transversales están linealmente acoplados entre sí y con los longitudinales a través del desplazamiento $u^{x,y,z}$ solamente. El movimiento longitudinal es acoplado no linealmente al movimiento transversal.

Caso 6: Si un campo magnético satisface las condiciones

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}| \ll |H^{x,y,z}| \quad \text{y} \quad |H^x| \gg |H^y| \sim |H^z|,$$

entonces las componentes de la fuerza de Lorentz son como siguen:

$$f_L^x(x, t) = I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right), \quad (3.21)$$

$$f_L^y(x, t) = I(t) \left(H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z(x) \right), \quad (3.22)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) \left(H^y(x) - H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right). \quad (3.23)$$

En este caso, todas las ecuaciones de movimiento de una cuerda son lineales. El punto interesante es que el movimiento longitudinal es aún dependiente del movimiento transversal (ver ec. (3.21)), pero los modos transversales no dependen del movimiento longitudinal. Este acoplamiento es en una dirección. Los modos y y z están linealmente acoplados entre sí (ver ecs. (3.22 y 3.23)). En este caso todos los acoplamientos son hechos a través de las derivadas $\partial u^{y,z}/\partial x$. Vuelve a considerarse la posibilidad de despreciar los términos de $f_L^x(x, t)$.

Caso 7: El otro caso particular ocurre cuando

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \ll |H^{y,z}|, \quad |\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| \sim |H^x|,$$

$$\text{y } |H^x| \gg |H^z| \quad \text{pero } |H^x| \sim |H^y|.$$

Bajo estas condiciones se encuentra que

$$f_L^x(x, t) = -I(t) H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x}, \quad (3.24)$$

$$f_L^y(x, t) = I(t) \left[(H^x(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x)) \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z(x) \right], \quad (3.25)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) H^y(x). \quad (3.26)$$

Las últimas ecuaciones significan que tanto el movimiento longitudinal como el movimiento transversal del modo en y son dependientes del modo z , así, mientras tanto, éste no depende de los anteriores. Además, el modo y depende no linealmente en los otros modos. Se nota que en el caso considerado, las componentes $f_L^x(x, t)$ y $f_L^y(x, t)$ tienen el mismo orden de magnitud, pero son mucho más pequeñas que $f_L^z(x, t)$.

Una situación similar, tiene lugar cuando se permutan las condiciones para los modos y y z :

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \ll |H^{y,z}|, \quad |\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| \sim |H^x|,$$

$$\text{y } |H^x| \gg |H^y| \quad \text{pero } |H^x| \sim |H^z|.$$

Bajo estas condiciones es

$$f_L^x(x, t) = I(t) H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x}, \quad (3.27)$$

$$f_L^y(x, t) = -I(t) H^z(x), \quad (3.28)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) \left[H^y(x, t) - (H^x(x) + \mathbf{u} \cdot \nabla H^x(x)) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right]. \quad (3.29)$$

Ahora ambas componentes $f_L^x(x, t)$ y $f_L^z(x, t)$, tienen el mismo orden de magnitud, pero son mucho más pequeñas que $f_L^y(x, t)$.

Caso 8: Este caso ocurre cuando

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}| \ll |H^{x,y,z}| \quad \text{y } |H^x| \gg |H^z| \quad \text{pero } |H^x| \sim |H^y|.$$

Entonces se obtienen las siguientes expresiones para la fuerza de Lorentz:

$$f_L^x(x, t) = -I(t) H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x}, \quad (3.30)$$

$$f_L^y(x, t) = I(t) \left(H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} - H^z(x) \right), \quad (3.31)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) H^y(x). \quad (3.32)$$

El significado de las últimas ecuaciones es, que tanto el movimiento longitudinal como el modo y del movimiento transversal son dependientes del modo z , mientras que este último no depende de los anteriores. En el caso considerado, las componentes $f_L^x(x, t)$ y $f_L^y(x, t)$ tienen los mismos órdenes de magnitud, pero son mucho más pequeñas que $f_L^z(x, t)$.

Una situación similar tiene lugar cuando se permutan las condiciones para los modos y y z :

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{x,y,z}| \ll |H^{x,y,z}| \quad \text{y} \quad |H^x| \gg |H^y| \quad \text{pero} \quad |H^x| \sim |H^z|.$$

Entonces la fuerza de Lorentz toma la siguiente forma:

$$f_L^x(x, t) = I(t) H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x}, \quad (3.33)$$

$$f_L^y(x, t) = -I(t) H^z(x), \quad (3.34)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) \left(H^y(x) - H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} \right). \quad (3.35)$$

Ahora ambas componentes $f_L^x(x, t)$ y $f_L^z(x, t)$, tienen el mismo orden de magnitud, y son mucho más pequeñas que $f_L^y(x, t)$. En este caso las ecuaciones del movimiento de la cuerda son lineales.

Caso 9: Una de las situaciones mas sencillas tiene lugar cuando

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \ll |H^{y,z}|, \quad |\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| \leq |H^x| \quad \text{y} \quad |H^x| \leq |H^y| \sim |H^z|,$$

Entonces las componentes de la fuerza de Lorentz son como sigue:

$$f_L^x(x, t) = I(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right), \quad (3.36)$$

$$f_L^y(x, t) = -I(t) H^z(x), \quad (3.37)$$

$$f_L^z(x, t) = I(t) H^y(x). \quad (3.38)$$

Aquí los modos transversales son independientes entre sí y del movimiento longitudinal, pero el último se mantiene linealmente dependiente de los anteriores. Ahora ambas componentes $f_L^y(x, t)$ y $f_L^z(x, t)$, tienen el mismo orden de magnitud, pero son más grandes que $f_L^x(x, t)$. Las ecuaciones del movimiento de la cuerda son lineales.

Un caso particular de la situación considerada, es como sigue. Si el campo magnético, el cual es perpendicular al eje x (es decir $H^x \equiv 0$) y satisface las condiciones $|\mathbf{u} \cdot \nabla H^{y,z}| \ll |H^{y,z}|$ (se supone que en una de las últimas componentes $H^{y,z} \neq 0$ y $|H^y| \sim |H^z|$), entonces los modos y y

z no son acoplados entre sí, pero el movimiento longitudinal es aún dependiente del transversal. Esta situación se describe en las ecs. (3.36 y 3.38).

Caso 10: En este caso se considera al campo magnético orientado a lo largo del eje x y tal que satisface la condición $|\mathbf{u} \cdot \nabla H^x| \ll |H^x|$, entonces los modos y y z son en principio, acoplados entre sí. Pero el movimiento longitudinal está libre de ellos y, además, la fuerza magnética no lo afecta:

$$f_L^x(x, t) = 0 \quad (3.39)$$

$$f_L^y(x, t) = I(t) H^x(x) \frac{\partial u^z}{\partial x}, \quad (3.40)$$

$$f_L^z(x, t) = -I(t) H^x(x) \frac{\partial u^y}{\partial x}. \quad (3.41)$$

Un campo magnético permanente uniforme, el cual está dirigido a lo largo del eje x , da origen a una fuerza de Lorentz que actúa sólo en el movimiento transversal de una cuerda.

Al final de esta clasificación, de posibles situaciones, las cuales se pueden encontrar para una cuerda tendida en diferentes configuraciones del campo magnético, se igualaría para notar que casi en todos los casos considerados aquí, la componente longitudinal es mucho más pequeña que las componentes transversales de la fuerza de Lorentz. Un análisis más específico es requerido. Pero, del mismo modo que en el caso 1, la consideración debe hacerse, es aplicable para todos esos casos. Además, algunos experimentos preliminares mostraron claramente que el movimiento longitudinal causado por la fuerza de Lorentz es observable, y los modos longitudinales están acoplados con los movimientos transversales en los experimentos mencionados.

Al analizar los casos 5 y 9 se tienen las ecuaciones de mov. que son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en t y x . Por lo general, el mov. en los modos T y L están acoplados entre sí (tanto linealmente como no linealmente). Además, el sistema considerado puede tener hasta cinco diferentes condiciones de frontera para cada extremo y para cada tipo de modos. Lo dicho indica que el sistema es un ejemplo de mov. ondulatorios complejos y con una gran variedad de tipos de ondas.

3.3. ALGUNAS SOLUCIONES

Ahora se procede con las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una cuerda en un campo magnético, en el Caso 9. Como un ejemplo, se considera una cuerda uniforme:

$$\rho(x) \equiv \rho = cte, \quad T(x) \equiv T = cte, \quad \lambda(x) \equiv \lambda = cte. \quad (3.42)$$

En este caso las ecuaciones de movimiento, ecs. (3.1, 3.2, 3.36, 3.37 y 3.38), toman la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u^x}{\partial t^2} = v_l^2 \frac{\partial^2 u^x}{\partial x^2} + \hat{I}(t) \left(H^z(x) \frac{\partial u^y}{\partial x} - H^y(x) \frac{\partial u^z}{\partial x} \right), \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 u^y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u^y}{\partial x^2} - \hat{I}(t) H^z(x) + g, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^2 u^z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u^z}{\partial x^2} + \hat{I}(t) H^y(x), \quad (3.45)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $v^2 = T/\rho$ es la velocidad de onda transversal, $v_l^2 = (T + \lambda)/\rho$ es la velocidad de onda longitudinal, $\hat{I}(t) = I(t)/\rho$ es una corriente eléctrica normalizada en la cuerda. También se toman las componentes transversales de un campo magnético como constantes en un cierto intervalo e igual a cero fuera de este intervalo y $H^x \equiv 0$:

$$H^y(x) = \begin{cases} H^y = cte^y, & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0, & \text{si } x \text{ está fuera de } (x_1, x_2) \end{cases}, \quad (3.46)$$

$$H^z(x) = \begin{cases} H^z = cte^z, & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0, & \text{si } x \text{ está fuera de } (x_1, x_2) \end{cases}. \quad (3.47)$$

Nótese que la configuración de un campo magnético puede ser aproximadamente realizada en una brecha angosta, entre las dos poleas planas de un imán permanente que sus terminales estén colocadas contrarias entre sí.

Se considera aquí una cuerda de longitud L con los dos extremos fijos. Esto implica las siguientes condiciones de frontera para las componentes del desplazamiento de la cuerda:

$$u^{x,y,z}(0, t) = u^{x,y,z}(L, t) = 0, \quad (3.48)$$

donde el tiempo es $t \geq 0$.

Para el sistema físico descrito con las ecs. (3.43 y 3.48), es natural considerar las siguientes condiciones iniciales, las cuales dan origen a los correspondientes esquemas de valores de frontera.

Esquema 1. El problema 1 es especificado con condiciones iniciales igual a cero (al tiempo $t = 0$ la cuerda está extendida uniformemente en una línea recta y está en reposo)

$$u^{x,y,z}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^{x,y,z}(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.49)$$

Esquema 2. El esquema 2 consiste en imponer las siguientes condiciones iniciales:

$$u^x(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^x(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3.50)$$

$$u^y(x, 0) = \frac{\rho g}{2T} x(x - L), \quad \frac{\partial u^y(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3.51)$$

$$u^z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^z(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.52)$$

Estas fórmulas describen la forma de equilibrio de la cuerda accionada por la fuerza de la gravedad en el plano vertical y accionada longitudinalmente por la tensión T . Al tiempo $t = 0$ la cuerda está en reposo y no hay desplazamiento longitudinal.

Esquema 3. Este problema está especificado por las siguientes condiciones iniciales:

$$u^x(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^x(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3.53)$$

$$u^y(x, 0) = B_M^y \text{sen } k_M x, \quad \frac{\partial u^y(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3.54)$$

$$u^z(x, 0) = B_N^z \text{sen } k_N x, \quad \frac{\partial u^z(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.55)$$

Esto significa que al tiempo $t = 0$ la cuerda está fija y no hay desplazamiento longitudinal. Está deformada en el plano vertical según el M -ésimo modo normal, y en el plano horizontal según el modo N -ésimo. Aquí M y N son ciertos números naturales correspondientes al M -ésimo y al N -ésimo modo normal, donde $k_n = n\pi/L$ es la forma general del número de onda de los modos normales (vea ec. (3.56)).

Ahora se procede a resolver los tres esquemas citados. Debido a que el movimiento transversal de la cuerda, descrito por las ecs. (3.44 y 3.45), es separable del longitudinal, se obtienen aquí solamente soluciones para el desplazamiento transversal. La separación de las variables es usada aquí para obtener las soluciones de los tres esquemas. Primero se presentan los pasos comunes en el procedimiento de la solución de los esquemas.

Sean las funciones $Y_n(x)$ y $Z_n(x)$ los modos normales de las ecuaciones homogéneas correspondientes a las ecs. (3.44 y 3.45):

$$u_{tt}^{y,z} - v^2 u_{xx}^{y,z} = 0,$$

donde los subíndices implican las correspondientes derivadas parciales. Entonces

$$Y_n''(x) - k_n^2 Y_n(x) = 0, \quad Z_n''(x) - k_n^2 Z_n(x) = 0,$$

donde los valores k_n son definidos por las condiciones de frontera, ec. (3.48), la cual implica que

$$Y_n(0) = Y_n(L) = 0, \quad Z_n(0) = Z_n(L) = 0.$$

En este caso se tiene

$$Y_n(x) = Z_n(x) = \text{sen } k_n x, \quad k_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.56)$$

Se supone que las componentes de la fuerza externa son desarrolladas en los modos normales como sigue ($0 < x < L$):

$$f^{y,z}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{y,z}(t) Y_n(x). \quad (3.57)$$

Se buscan las soluciones de las ecs. (3.46 y 3.47) en la forma de expansiones en los modos normales ($0 < x < L$, $t > 0$):

$$u^{y,z}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{y,z}(t) Y_n(x). \quad (3.58)$$

En este caso las ecuaciones de movimiento, ecs. (3.44 y 3.45), restringen las funciones $S_n^{y,z}(t)$ para ser soluciones de las ecuaciones

$$\frac{d^2 S_n^{y,z}(t)}{dt^2} + k_n^2 v^2 S_n^{y,z}(t) = f_n^{y,z}(t), \quad (3.59)$$

con las condiciones iniciales

$$S_n^{y,z}(0) = \alpha_n^{y,z}, \quad \frac{dS_n^{y,z}(0)}{dt} = \beta_n^{y,z}, \quad (3.60)$$

las cuales se siguen de los desarrollos de las condiciones iniciales

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^{y,z}(0) Y_n(x) = u^{y,z}(x, 0) \equiv \alpha^{y,z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{y,z} Y_n(x), \quad (3.61)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dS_n^{y,z}(0)}{dt} \right) Y_n(x) = \frac{\partial u^{y,z}(x, 0)}{\partial t} \equiv \beta^{y,z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{y,z} Y_n(x). \quad (3.62)$$

La solución de la ec. (3.59) sujeta a las condiciones iniciales (3.60) es fácilmente obtenida usando los métodos estandar y está dada por la siguiente expresión:

$$S_n^{y,z}(t) = \alpha_n^{y,z} \cos \omega_n t + \frac{\beta_n^{y,z}}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n^{y,z}(\tau) \operatorname{sen} \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad (3.63)$$

donde $\omega_n = k_n v$.

De aquí, a través de la solución de los problemas 1, 2 y 3, se tiene primero para expandir las componentes de la fuerza externa, ec. (3.57), correspondiendo a las condiciones iniciales, ec. (3.60).

3.3.1. SOLUCIÓN DEL ESQUEMA 1: MOVIMIENTO TRANSVERSAL

Aquí se resuelven las ecuaciones del movimiento transversal de una cuerda, ecs. (3.44 y 3.45), en un campo magnético constante, ecs. (3.46 y 3.47), con las condiciones de frontera dadas por la ec. (3.48) y con las condiciones iniciales dadas por la ec. (3.49).

A fin de tener las expansiones requeridas en modos normales, ec. (3.56), se hace una desarrollo de las funciones impares

$$f^y(x, t) = -\hat{I}(t) H^z(x) + g, \quad f^z(x, t) = \hat{I}(t) H^y(x), \quad 0 < x < L, \quad (3.64)$$

en la línea. Tomando en cuenta la configuración del campo magnético descrito por las ecs. (3.46 y 3.47), fácilmente se obtienen las siguientes expresiones con $(n = 1, 2, 3, \dots)$:

$$\begin{aligned} f_n^y(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L f^y(x, t) \operatorname{sen} k_n x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \hat{I}(t) H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) - \frac{2g}{n\pi} (\cos n\pi - 1), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$f_n^z(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f^z(x, t) \sin k_n x dx = -\frac{2}{n\pi} \hat{I}(t) H^y (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) \quad (3.66)$$

Entonces, para la corriente eléctrica de la forma $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cos \omega t$, la solución de la ec. (3.59) con condiciones iniciales igual a cero, la ec. (3.49), son fácilmente encontradas de la expresión general, ec. (3.63):

$$S_n^y(t) = \frac{A_n^y (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n(\omega_n^2 - \omega^2)} + G_n^y (\cos \omega_n t - 1), \quad (3.67)$$

$$S_n^z(t) = \frac{A_n^z (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n(\omega_n^2 - \omega^2)}, \quad (3.68)$$

donde

$$\begin{aligned} G_n^y &= \frac{2g}{n\pi\omega_n^2} (\cos \omega_n t - 1) = -\frac{4g}{n\pi\omega_n^2} \sin^2 n\frac{\pi}{2}, \\ A_n^y &= \frac{2}{\pi} \hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1), \\ A_n^z &= -\frac{2}{\pi} \hat{I}_0 H^y (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1), \\ \omega_n = k_n v &= \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = n\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

De aquí, juntando los resultados presentados por las ecs. (3.56, 3.58, 3.67, 3.68 y 3.69) se encuentran que las soluciones del problema 1 tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u^y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^y(t) Y_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^z (\cos(k_n x_2) - \cos(k_n x_1)) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin(k_n x) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4g}{n\pi\omega_n^2} (\cos(\omega_n t) - 1) \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) \sin(k_n x), \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} u^z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^z(t) Y_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^y (\cos(k_n x_1) - \cos(k_n x_2)) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin(k_n x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\hat{I}_0 H^y}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{1}{2}k_n (x_2 + x_1)\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_n (x_2 - x_1)\right) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{1}{2}k_n (\omega_n + \omega)\right) \sin\left(\frac{1}{2}k_n (\omega_n - \omega)\right) \sin(k_n x). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Debería notarse que no hay resonancia en estas soluciones cuando $\omega \rightarrow \omega_n$.

3.3.2. SOLUCIÓN DEL ESQUEMA 2: MOVIMIENTO TRANSVERSAL

Aquí se resuelven las ecuaciones del movimiento transversal de una cuerda, las ecs. (3.44 y 3.45), en un campo magnético constante, las ecs. (3.46 y 3.47), con las condiciones de frontera dadas por la ec. (3.48) y con las condiciones iniciales dadas por las ecs. (3.50 y 3.51). El esquema de la solución es idéntico que para el problema 1.

Entonces, para una corriente eléctrica de la forma $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cos \omega t$, la solución de la ec. (3.59) con las condiciones iniciales dadas por la ec. (3.60), son fácilmente encontradas de la ec. (3.63):

$$S_n^y(t) = \alpha_n^y \cos \omega_n t + \frac{A_n^y (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n (\omega_n^2 - \omega^2)} + G_n^y (\cos \omega_n t - 1), \quad (3.72)$$

donde las notaciones son dadas por la ec. (3.69). En el caso considerado, el valor inicial de $S_n^y(t)$ es dado por el valor de

$$\alpha_n^y = \frac{2\rho g L^2 ((-1)^n - 1)}{T \pi^3 n^3} = \frac{2g}{n \pi \omega_n^2} (\cos n\pi - 1) = G_n^y. \quad (3.73)$$

La función $S_n^y(t)$ es la misma que la ec. (3.68). De aquí que la solución $u^x(x, t)$ es la misma que para la ec. (3.71), como en el problema 1. La solución $u^y(x, t)$ es diferente de la del problema 1 y está dada por la siguiente serie:

$$\begin{aligned} u^y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^y(t) Y_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4g}{n \pi \omega_n^2} (2 \cos \omega_n t - 1) \sin^2 n \frac{\pi}{2} \sin k_n x. \end{aligned} \quad (3.74)$$

3.3.3. SOLUCIÓN DEL ESQUEMA 3: MOVIMIENTO TRANSVERSAL

Aquí se resuelven las ecuaciones del movimiento transversal de una cuerda, ecs. (3.44 y 3.45), en un campo magnético constante, ecs. (3.46 y 3.47), con las condiciones de frontera dadas por la ec. (3.48) y con las condiciones iniciales dadas por las ecs. (3.54 y 3.55). El esquema de la solución es idéntico al que se tenía en el problema 1.

Entonces para la corriente eléctrica de la forma $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cos \omega t$, la solución de la ec. (3.59) con las condiciones iniciales dadas por la ec. (3.60), se encuentra la ec. (3.63):

$$S_n^y(t) = \delta_{nM} B_M^y \cos \omega_n t + \frac{A_n^y (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n (\omega_n^2 - \omega^2)} + G_n^y (\cos \omega_n t - 1), \quad (3.75)$$

$$S_n^z(t) = \delta_{nN} B_N^z \cos \omega_n t + \frac{A_n^z (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{n (\omega_n^2 - \omega^2)}. \quad (3.76)$$

De aquí la solución del esquema 3 está dada por la siguiente serie:

$$\begin{aligned} u^y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^y(t) Y_n(x) = B_M^y \cos \omega_M t \sin k_M x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^z (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4g}{n\pi\omega_n^2} (\cos \omega_n t - 1) \sin^2 n \frac{\pi}{2} \sin k_n x, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} u^z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n^z(t) Y_n(x) = B_N^z \cos \omega_N t \sin k_N x + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{I}_0 H^y (\cos k_n x_1 - \cos k_n x_2) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Un caso particular del campo magnético considerado, descrito por las ecs. (3.46 y 3.47), es un campo magnético constante extendido sobre toda la cuerda. Esto significa que $x_1 = 0$ y $x_2 = L$ en dichas ecuaciones. Entonces, para la solución obtenida se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{2\hat{I}_0 H^{y,z} (\cos k_n x_2 - \cos k_n x_1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin k_n x = \\ &= \frac{2\hat{I}_0 H^{y,z} (\cos n\pi - 1) (\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)}. \end{aligned}$$

Esta expresión tiene una estructura muy similar a la de los términos referidos al campo gravitacional. La única diferencia es que el campo "pseudo-gravitacional" causado por la interacción de Lorentz tiene una frecuencia ω distinta de cero.

4. EXPERIMENTO

4.1. METAS

- Diseñar el equipo experimental.
- Desarrollar la metodología de experimentos en este sistema ondulatorio que proporciona la reproducibilidad de los resultados experimentales.
- Estudiar los modos transversales y longitudinales del movimiento ondulatorio de la cuerda tendida con corriente eléctrica en diferentes configuraciones del campo magnético permanente producido por un imán de bocina. Diferentes condiciones de frontera.
- Estudiar modos transversales y su acoplamiento con los modos longitudinales para dos condiciones de frontera que son: 1) dos extremos TL fijos y 2) un extremo TL fijo y el otro extremo T fijo y L amortiguado.
- El diseño y la utilización del equipo experimental depende de los parámetros obtenidos de las ecuaciones básicas de movimiento.
- Estos experimentos son tanto para desarrollar investigación como para la enseñanza principalmente en el laboratorio de electromagnetismo y ondas.

4.2. PARÁMETROS PRINCIPALES DEL SISTEMA

Primeramente, al analizar las ecuaciones básicas del movimiento de una cuerda con corriente eléctrica en un campo magnético permanente (ecuaciones del capítulo tres), se encontró que los parámetros principales del sistema ondulatorio son:

- Tensión de la cuerda (T).
- Densidad de masa lineal de la cuerda (ρ).
- Longitud de la cuerda (L).
- La corriente eléctrica en la cuerda (I).
- El campo magnético que actúa sobre la cuerda (H).
- Condiciones de frontera de la cuerda.

Además, están las condiciones iniciales para regímenes transitorios de las oscilaciones. Para estudios (investigaciones) experimentales de dicho fenómeno se diseñó y construyó un equipo experimental básico que permite controlar y/o variar modo reproducible los parámetros principales del sistema ondulatorio.

4.3. DISEÑO DEL EQUIPO EXPERIMENTAL

El equipo experimental está formado principalmente de tres componentes, que son: eléctrica, magnética y mecánica.

4.3.1. COMPONENTE ELÉCTRICA

La componente eléctrica consta de un circuito constituido por la cuerda conductora, por la que fluye una corriente eléctrica alterna (la frecuencia de esta corriente es constante de 60 Hz), que es proporcionada por un transformador. Se puede variar la intensidad de la corriente eléctrica con una resistencia variable. Se muestra un esquema de esta parte en la figura 4.1.

4.3.2. COMPONENTE MAGNÉTICA

En este experimento el campo magnético es proporcionado por un imán permanente, principalmente del tipo de "bocina", (también se probó con un imán de barra pero no se registraron los datos aquí en este trabajo). Los cambios de configuración del campo magnético que actúa sobre la cuerda, se logran por medio de variaciones de la posición del imán respecto a la cuerda.

La componente magnética del equipo experimental se representa esquemáticamente en la figura 4.1.

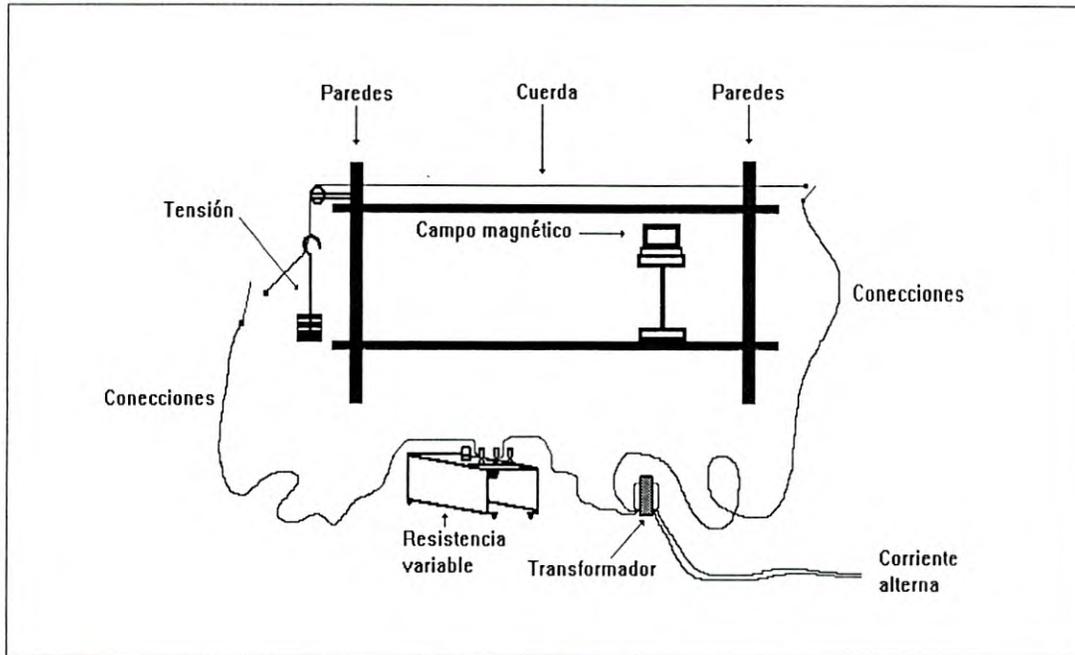


Figure 4.1: Diagrama del aparato experimental.

4.3.3. COMPONENTE MECÁNICA

La componente mecánica está formada por los siguientes elementos:

- cuatro tubos cromados,
- dos paredes de madera.

Los elementos anteriores, se encuentran ensamblados de tal manera que constituyen un marco con cierta rigidez y estructura que permite un acceso fácil (conveniente) para observaciones de ondas en la cuerda y cambio reproducible de los parámetros del sistema ondulatorio. Las dos paredes tienen un orificio a la mitad de la parte superior que contienen un buje perforado, por el que pasa la cuerda. Estos bujes nos proporcionan las condiciones de frontera (extremos TL fijos y un extremo T fijo y otro extremo L amortiguado).

Un punto importante, es que la componente mecánica del equipo experimental es bastante rígida, por lo cual no presenta vibraciones adicionales que afecten a las del sistema de interés.

La tensión físicamente graduada, es proporcionada por las pesas sujetas a un extremo de la cuerda (figura 4.1).

La cuerda siempre se mantiene fija en un extremo, donde se pone el origen de este sistema de coordenadas y en el otro extremo de la cuerda se tiene un dispositivo sujeto a la pared, compuesto de un pequeño eje, en el cual está colocada una polea. La polea nos sirve para el deslizamiento de la cuerda y para verificar el movimiento longitudinal.

4.4. MONTAJE EXPERIMENTAL

Aquí se describen las partes del equipo experimental y la metodología para realizar los experimentos.

Se pueden variar las dimensiones del equipo, deslizando las paredes sobre sus ejes horizontales (ver figura 4.1). Además se colocó una tabla en los dos tubos superiores del dispositivo, que sirve para variar la longitud de la cuerda sin desplazar las paredes. Un extremo de la cuerda se mantiene sujeto (el origen de la coordenada x) en todos los experimentos. Para proporcionar la tensión a la cuerda, al otro extremo se le aplica un sistema de pesas cuando este extremo no está sujeto. Después de proporcionar la tensión a la cuerda, para realizar las condiciones de frontera con extremo fijo se puede sujetar este extremo, conservando el valor de la tensión (ver figura 4.1). Un elemento importante en este equipo es, una polea que rueda sobre su eje y que sirve para facilitar el deslizamiento de la cuerda respecto a la pared.

En principio la cuerda puede ser de densidad de masa lineal de variable, conductora y hasta magnética. Pero al ser magnética la cuerda altera los resultados, debido a que la cuerda por sí sola se atrae con el imán. Por lo tanto, se optó por escoger la cuerda no magnética. Además se considera una cuerda con densidad de masa lineal uniforme, lo cual facilita los cálculos y la interpretación de los resultados de la observación.

Se hace circular por la cuerda una corriente eléctrica alterna de 24 volts a 60 Hertz, con opción de variar la intensidad, incorporándola al circuito eléctrico (ver figura 4.1).

Se necesitaba un voltaje y una corriente eléctrica alterna fr baja intensidad para que no fuera peligroso el experimento, u así poderlo utilizar en prácticas de laboratorio de electromagnetismo y ondas. Con este fin, se usa un transformador de 24 volts y 3 amperes como máximo de salida, conectado en serie con un resistor variable que proporciona hasta 24Ω . Además de ser inofensivo el equipo la cuerda no aumenta su temperatura circunstancia que podría modificar la tensión (un parámetro importante del sistema ondulatorio) en la cuerda de un modo significativo.

Para que las mediciones fueran reproducibles, era necesario que el imán tubiese libertad de posición perfectamente controlable. Se tomó la idea de una mesa óptica y se construyó un dispositivo que permite mover un objeto en 3 dimensiones, esta fue la solución a este problema.

Se usa el campo magnético inhomogéneo producido por un imán permanente. Para variar la configuración del campo magnético se hace cambiando la posición del imán.

La tensión a la que está sujeta la cuerda es un parámetro importante y preciso. De esta manera se empleó una polea en un extremo de la cuerda y un sistema de pesas que sirven para tener un control de la tensión desde 0.5 gr hasta 200 gr y más si es necesario, con escalamientos de 0.5 gramos.

Para tener un control más fino de dónde encontrar los nodos y los antinodos de las oscilaciones,

se coloca una regla graduada en la parte superior derecha del equipo, la que nos permite visualizar la distancia desde la frontera fija de la cuerda (que es el origen de la cuerda en $x = 0$ hasta su final) dirigida en el sentido positivo del eje x .

4.5. DATOS NUMÉRICOS DEL SISTEMA

En los experimentos se restringen los siguientes valores. Estos parámetros son los siguientes.

La longitud de la cuerda ($L = 67.25$ cm), que en el experimento se ha mantenido fija.

La densidad lineal de masa uniforme $\rho = 0.5268$ gr/m.

La tensión de la cuerda es $T = 50$ gr (aunque se realizaron experimentos desde 50 gr hasta 95 gr que no se escriben aquí).

El campo magnético \mathbf{H} inhomogéneo proporcionado por un imán permanente, que se cambia la configuración de este campo cambiando la posición del imán. Por la falta de un gaussímetro por el momento, no se pudo caracterizar los campos magnéticos cuantitativamente (conocemos un poco la distribución de las líneas de fuerza producidas por un imán de bocina, lo que se está trabajando por el momento).

Empleando un transformador reducimos la tensión eléctrica de 110 a 24 volts y se varió la intensidad de la corriente por medio de una resistencia variable en un rango de 6 a 24 ohms.

Condiciones de frontera. Se impuso en los experimentos con las siguientes condiciones de frontera. Un extremo se mantuvo fijo tanto para las ondas transversales como para las ondas longitudinales, lo que llamamos el extremo TL -fijo ($T =$ Transversal y $L =$ Longitudinal). Para el otro extremo en una serie de experimentos se realizaron con las condiciones de frontera del extremo TL -fijo, mientras que en otras, para éste extremo se impusieron las condiciones de frontera combinadas: para el movimiento transversal T -fijo y para el movimiento longitudinal L -amortiguado.

Un parámetro importante del sistema ondulatorio es la velocidad de propagación de onda. Los valores típicos de los parámetros empleados para los experimentos en este trabajo son:

$$\rho = 5.268 \times 10^{-4} \text{ kg/m.}$$

$$m = 0.05 \text{ kg.}$$

$$T_0 = m \cdot g = 0.4905 \text{ N.}$$

$$r = 3.04 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

$$S = \pi \cdot r^2 = 7.2583 \times 10^{-8} \text{ m}^2.$$

$$E = 1 \times 10^{11} \text{ N}^2/\text{m}^2.$$

$$\lambda = E \cdot S = 7258.3 \text{ N.}$$

Con los valores dados se obtiene la velocidad de onda transversal

$$v_T = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\rho}} = \sqrt{\frac{0.4905 \text{ N}}{5.268 \times 10^{-4} \text{ kg/m}}} = 30.51 \text{ m/s,} \quad (4.1)$$

y la velocidad de onda longitudinal

$$v_L = \sqrt{\frac{T_0 + \lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{m \cdot g + E \cdot \pi \cdot r^2}{\rho}} \quad (4.2)$$

$$= \sqrt{\frac{0.4905 \text{ N} + 7258.3 \text{ N}}{5.268 \times 10^{-4} \text{ kg/m}}} = 3712.02 \text{ m/s}, \quad (4.3)$$

donde ρ es la densidad de masa lineal, m la masa aplicada a la cuerda, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad, T_0 es la tensión ejercida sobre la cuerda, $\lambda = E \cdot S$ es el módulo de elasticidad, E es el módulo de Young, S es la sección transversal de la cuerda. La relación entre estas velocidades de onda es $v_L = 121.7v_T$.

A continuación se muestra que las oscilaciones forzadas de la cuerda ocurren fuera de la región de resonancia. Se recuerda que la frecuencia conductora es debido a la corriente eléctrica y es igual a

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 60 \text{ Hz}. \quad (4.4)$$

Las frecuencias de los modos normales de la cuerda son (vea ecs. (3.56 y 3.59))

$$\omega_n = k_n \cdot v = \frac{n\pi}{L} \cdot v, \quad (4.5)$$

donde k_n es el número de onda del modo normal n -ésimo, v es la velocidad de onda transversal ó longitudinal según sea el caso y L la longitud de la cuerda.

En caso de ondas transversales, cuando $n = 1$, la razón entre las frecuencias, (4.5 y 4.4), es igual a

$$\frac{\omega_{1T}}{\omega} = \frac{1}{120 \text{ Hz} \cdot L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = 0.3779.$$

Para $n = 2$

$$\frac{\omega_{2T}}{\omega} = 0.7558.$$

Para $n = 3$

$$\frac{\omega_{3T}}{\omega} = 1.1337,$$

que es el modo mas próximo para que ocurra la resonancia. Por lo tanto se ve que la resonancia no altera considerablemente las oscilaciones transversales.

Para el primer modo de la onda longitudinal se tiene

$$\frac{\omega_{1L}}{\omega} = \frac{1}{120 \text{ Hz} \cdot L} \sqrt{\frac{T_0 + \lambda}{\rho}} = 45.99.$$

Por lo tanto, las oscilaciones en ondas longitudinales se encuentran muy lejos de que ocurra resonancia.

4.6. MEDICIONES Y DATOS EXPERIMENTALES

Los experimentos se realizaron con los siguientes parámetros fijos $L = 67.25 \text{ cm}$, $T = 50 \text{ gr}$, $I \sim 3 \text{ amperes}$ y con una frecuencia de la corriente eléctrica $\nu = 60 \text{ Hz}$, ver figura 4.2.

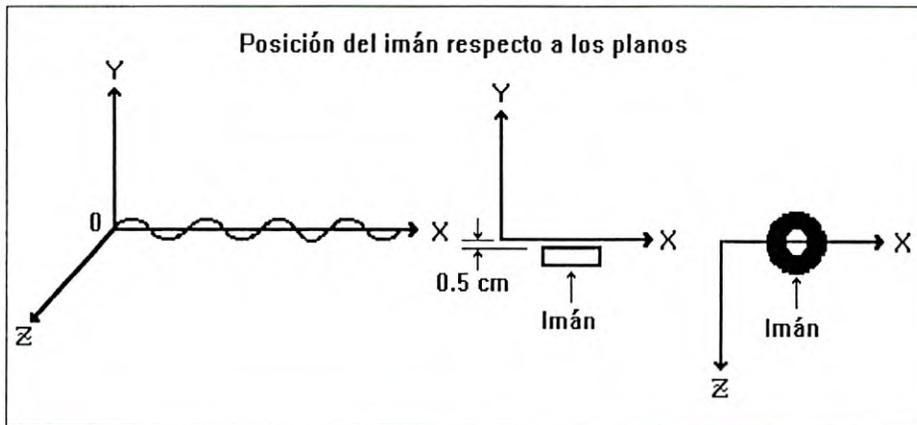


Figure 4.2: Posición del imán respecto a los planos.

Por la interacción con el aire y la fricción interna de la cuerda al doblamiento, las oscilaciones de la cuerda siempre ocurren en la presencia del amortiguamiento. Experimentalmente se encontró que el amortiguamiento total de las oscilaciones libres de la cuerda ocurren dentro de aproximadamente 10 segundos. Este es el período de transición de oscilaciones iniciales a oscilaciones forzadas. Debido a esta razón, las formas de oscilaciones observadas en este trabajo serán oscilaciones forzadas por la fuerza de Lorentz.

Las mediciones se realizaron sobre los planos xy y xz .

Caso 1.-Extremos TL fijos, cambiando la posición del imán permanente (imán en forma de anillo) sobre el eje de la cuerda (eje x). Directamente se observa el mov. transversal.

Prueba 1.- El imán se encuentra en la posición $P_x = 11.5$ cm y en la región $7 < P_x < 17.5$ cm se tienen modos transversales de oscilaciones estables. Las siguiente tabla muestra la posición de los nodos, figura 4.3

DATOS			
PRUEBA NO. 1			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.6	0.6	0.6
$2A_{xy}$	0.6	0.6	0.6
N_{xz}	22.5	44.5	
N_{xy}	20.5	43.75	

Prueba 2. El imán se encuentra en la posición $P_x = 34.5$ cm, y en la región de $28.5 < P_x < 41$ cm se tienen modos de oscilación estables, figura 4.3.

DATOS			
PRUEBA NO. 2			
	cms.	cms.	cms.
2A _{xz}	0.6	0.6	0.6
2A _{xy}	0.6	0.6	0.6
N _{xz}	23	45	
N _{xy}	23.5	43.75	

Prueba 3. La posición del imán $P_x = 57$ cm y en la región $54 < P_x < 60$ cm los modos de oscilación son estables, figura 4.3.

DATOS			
PRUEBA NO. 3			
	cms.	cms.	cms.
2A _{xz}	0.6	0.6	0.6
2A _{xy}	0.6	0.6	0.6
N _{xz}	23	45	
N _{xy}	23.75	46.5	

Además de cierta simetría del problema de oscilaciones, los modos observados en el caso 1 son muy estables respecto al desplazamiento del imán sobre el eje x en el intervalo de ~ 10 cm.

Caso 2.- Este caso es con condiciones de frontera de los dos extremos TL fijos.

Prueba1. El imán está en la posición de 21.5 cm, se observan 6 nodos sobre el plano xy bien definidos, y 3 nodos sobre el plano xz , uno bien definido y los otros dos no muy definidos. Las siguientes tablas y figuras 4.4 y 4.5 muestran lo dicho anteriormente.

DATOS							
PRUEBA NO. 1							
	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.	cms.
2A _{xz}	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
2A _{xy}	0.4	0.4	0.4	0.4			
N _{xz}	10.5	20	29	38.5	48	57.5	
N _{xy}	19	30	48.25				

Prueba 2. Con el imán en la posición 46.5 cm sobre el eje x se tienen las oscilaciones de la figura 4.6. En la figura 4.4 a simple vista no se puede distinguir entre las dos posiciones del imán de 21.5 cm y 46.5 cm.

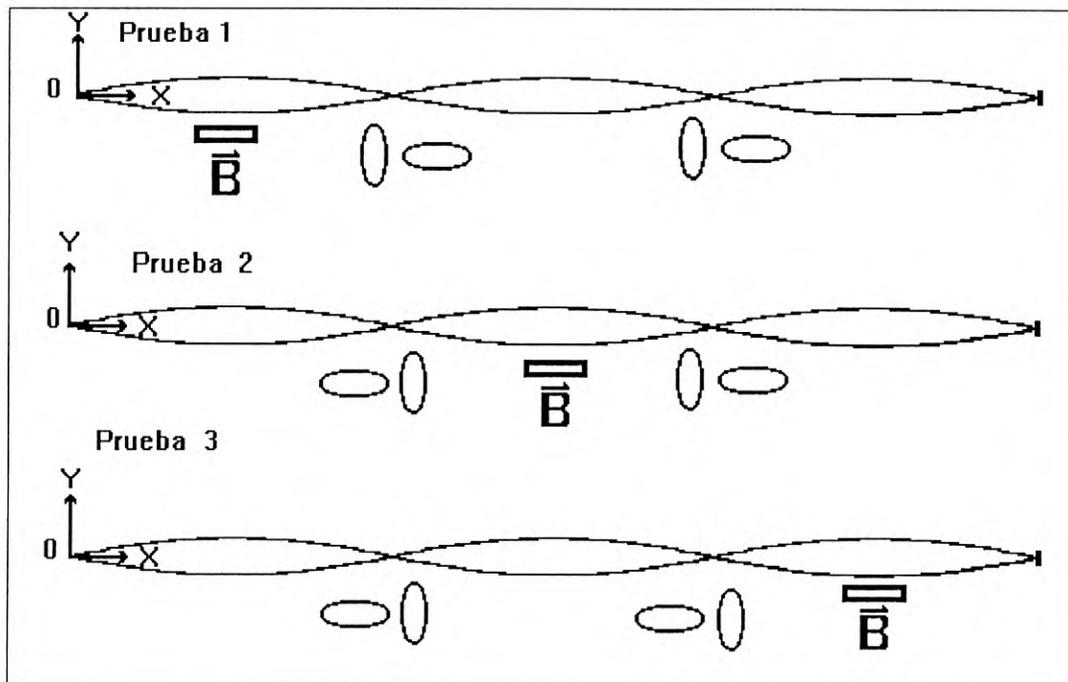


Figure 4.3: Oscilaciones con extremos TL fijos con posiciones del imán en $x = 11.5$ cm, $x = 34.5$ cm y $x = 57$ cm.

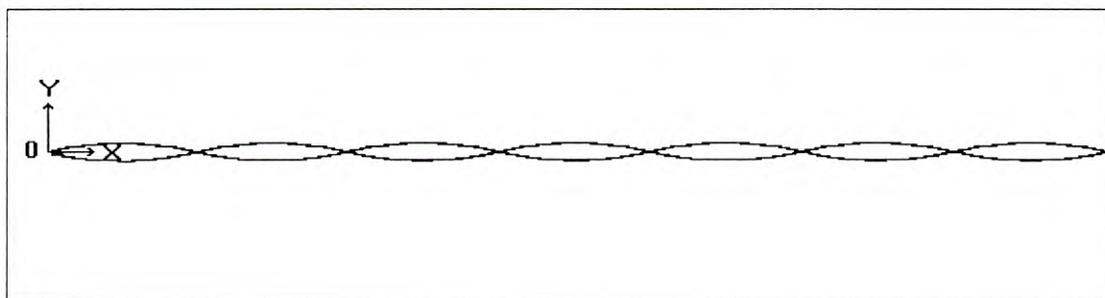


Figure 4.4: Oscilaciones observadas sobre el plano xz para extremos TL fijos, a simple vista son indistinguibles para las posiciones del imán en $x = 21.5$ cm y $x = 46.5$ cm.

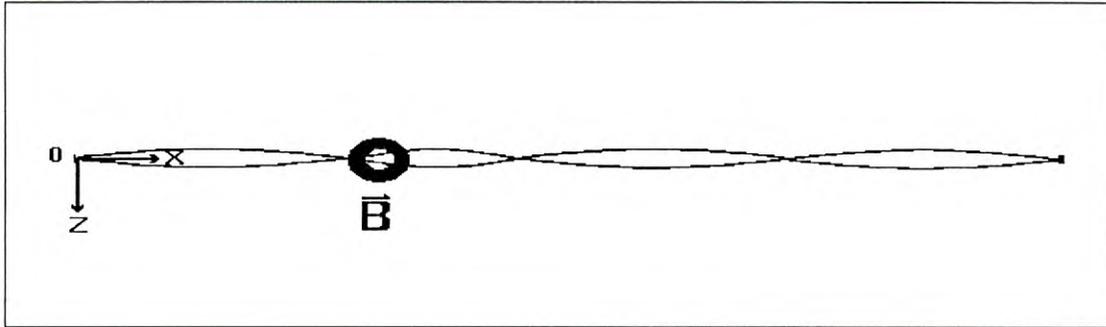


Figure 4.5: Oscilaciones observadas sobre el plano xy con posición del imán en $x = 21.5$ cm.

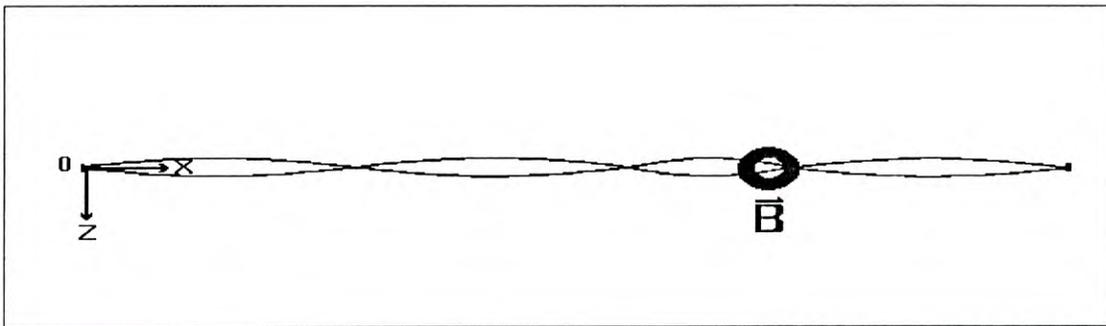


Figure 4.6: Oscilaciones observadas sobre el plano xy con posición del imán en $x = 46.5$ cm.

DATOS							
PRUEBA NO. 2							
	cms.						
$2A_{xz}$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$2A_{xy}$	0.4	0.4	0.4	0.4			
N_{xz}	10.5	20	29	38	48	57	
N_{xy}	19	37	48				

Se observan modos muy diferentes en comparación con el caso 1. Los modos son estables respecto a cierto desplazamiento del imán sobre el eje x , pero en un intervalo mas pequeño que en el caso 1.

Caso 3.-En este caso se analizan los efectos que causa en las oscilaciones el desplazamiento transversal (sobre el eje z). La siguiente tabla muestra los datos que fueron analizados en este

caso.

DATOS			
PRUEBA NO. 1			
	cms.	cms.	cms.
2Ay	0.5	0.5	0.5
2Az	0.5	0.5	0.5
Ny	22	44.5	
Nz	21.3	43.5	

DATOS			
PRUEBA NO. 2			
	cms.	cms.	cms.
2Ay	0.5	0.5	0.5
2Az	0.5	0.5	0.5
Ny	23.5	44.5	
Nz	34	43.5	

Prueba 1. En esta prueba, como en el caso 1, se colocó el imán a 11 cm y se varió su posición sobre el eje z negativo, obteniendo los resultados de la figura 4.7. La variación transversal del imán nos cambió la posición del eje mayor de la elipse rotándola como se muestra en la figura 4.7. Para $z = 0$ se mantiene el eje mayor de la elipse vertical u horizontal, pero cuando $z = -1$, varía el eje alrededor de $15^\circ - 20^\circ$ y de $105^\circ - 120^\circ$ respectivamente y además aparentemente se mantiene la perpendicularidad de estos ejes en cada nodo.

La orientación de las figuras es sobre el eje x positivo. La primer figura está antes del nodo y la siguiente está después del nodo, respectivamente.

Para la prueba 1 con $z = -2$ los ejes mayores de la elipse se localizan a 45° y a 135° respectivamente. Con esta posición no es preciso medir los nodos, por lo que los resultados que aquí estan son en promedio, esto es por la dificultad de medir los nodos en las componentes sobre el plano yz .

Prueba 2. Esta prueba se hizo similarmente a la prueba 1, pero con la posición del imán a 34 cm, y aquí vemos que la polarización cambia. Debido a la simetría del problema, tenemos que antes del primer nodo el eje mayor de la elipse es horizontal, después del nodo es vertical y en el otro nodo es vertical y horizontal respectivamente. En esta prueba se observan los mismos efectos que en la primera, la única diferencia es el orden en que estan localizados estos ejes. Estos resultados se muestran en la figura 4.8.

Prueba 3. En esta prueba el imán se colocó a 56 cm y por la simetría del problema, se tienen los mismos resultados que los de la prueba 1, pero con la polarización de los ejes de las elipses invertida. Estos resultados aparecen en la figura 4.9.

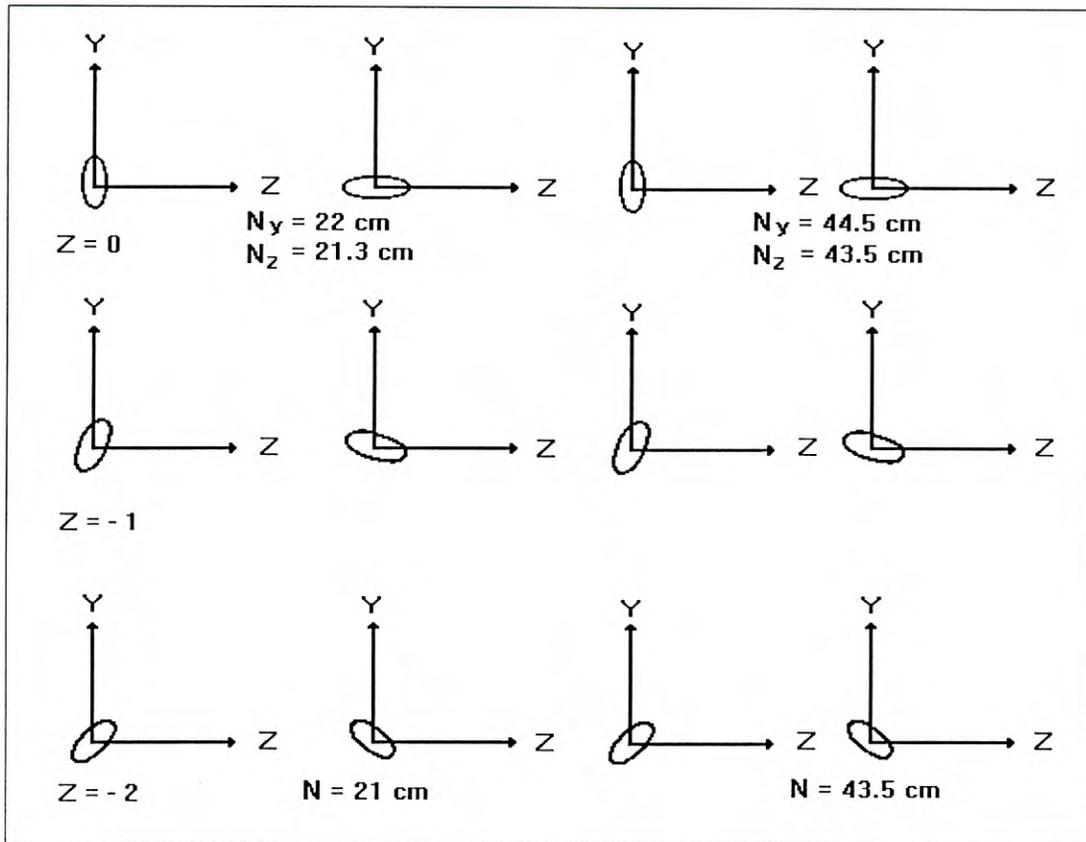


Figure 4.7: Oscilaciones cambiando la configuración del campo magnético sobre el eje z en $x = 11$ cm, con extremos TL fijos.

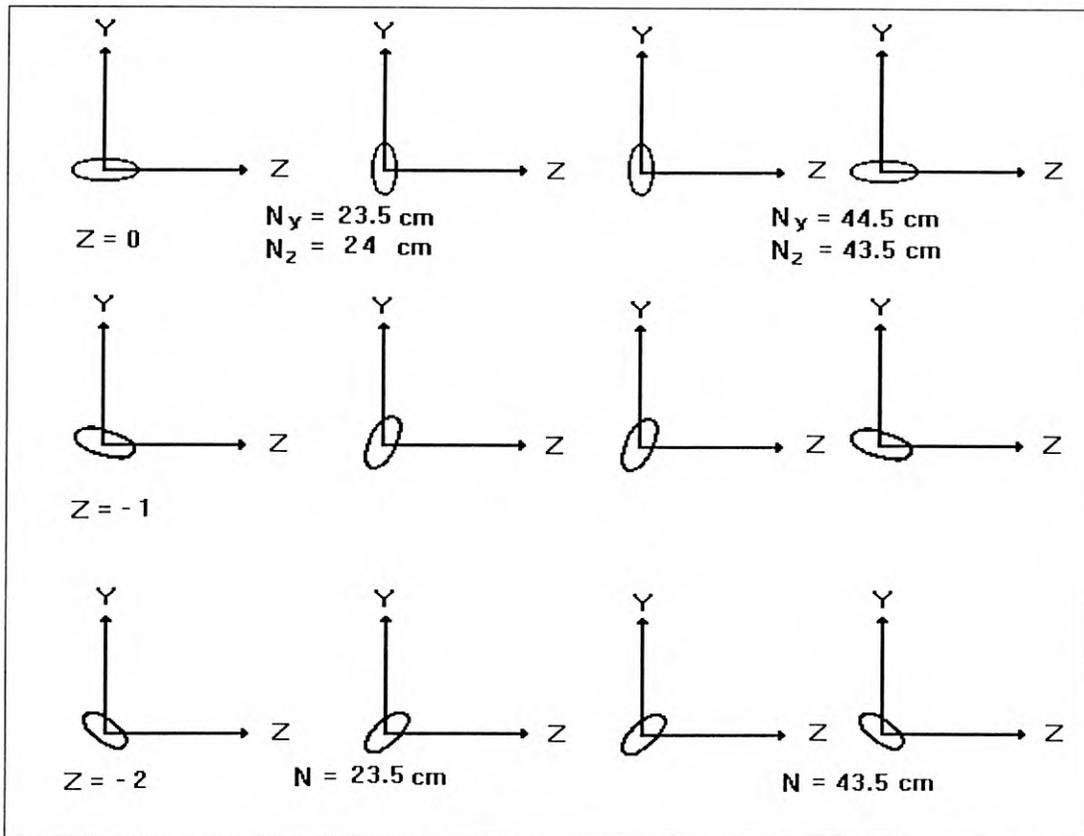


Figure 4.8: Oscilaciones cambiando la configuración del campo magnético sobre el eje z con $x = 34 \text{ cm}$, con extremos TL fijos.

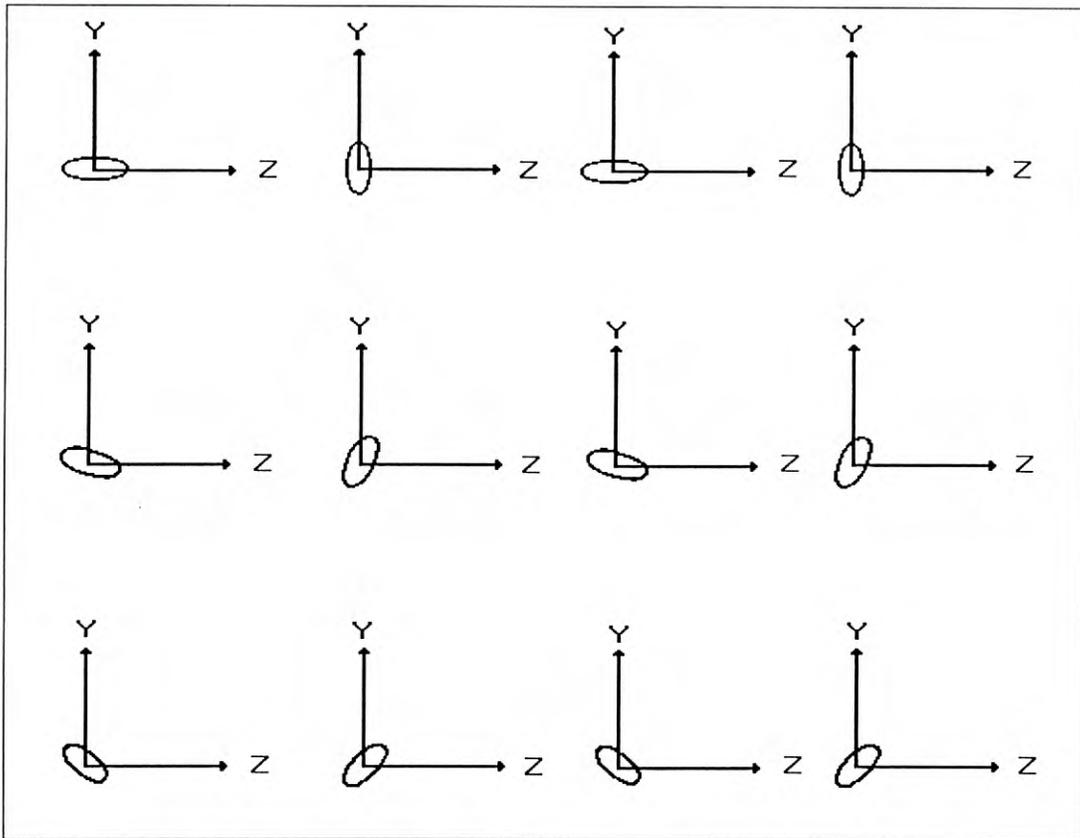


Figure 4.9: Oscilaciones cambiando la configuración del campo magnético sobre el eje z con $x = 34$ cm.

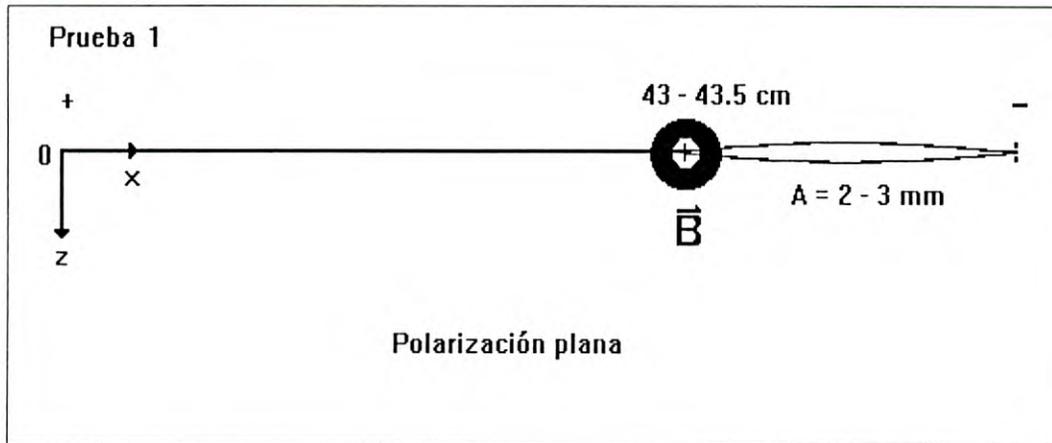


Figure 4.10: Oscilaciones de trampa de onda.

Caso 4.-Un extremo TL fijo y el otro extremo T fijo y L amortiguado. Con estas condiciones de frontera se observa que el mov. longitudinal modifica al movimiento. transversal.

Prueba 1. Con el imán en la posición de 43 – 43.5 cm sobre el eje x , se observan ondas estacionarias, en tal forma que las oscilaciones ocupan una parte de la cuerda y la otra parte se mantiene inalterada a simple vista. Estas oscilaciones fueron llamadas trampa de onda. La región inalterada llamada región de silencio se extiende desde 0 hasta 44 cm sobre el eje x , mientras tanto, la zona de oscilaciones transversales está entre 44 y 67.25 cm. La onda tiene polarización plana en xz , figura 4.10.

Aquí se tienen perturbaciones en intervalos de aproximadamente 20 seg con una duración aproximadamente de 10 seg cada una, rompiendo la trampa de onda y convirtiéndose en otro tipo de onda, figura 4.11. Después de haber transcurrido el tiempo de la perturbación se recupera la oscilación trampa de onda.

DATOS			
PRUEBA NO. 1			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.3	0.0	0.0
$2A_{xy}$	0.0	0.0	0.0
N_{xz}	0.0	0.0	0.0
N_{xy}			

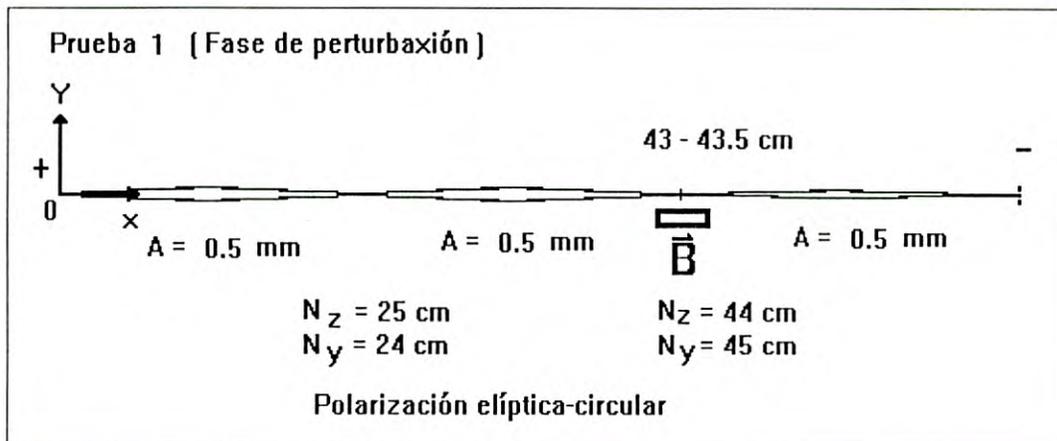


Figure 4.11: Perturbaciones en la fase de trampa de onda.

Prueba 2. El imán está en la posición de 55.5 cm sobre el eje x , se tienen oscilaciones con dos nodos y 3 antinodos de los cuales dos son iguales y el otro es mas pequeño, ver figura 4.12. La polarización es plana.

Cabe mencionar que las distancias entre nodos son diferentes aunque la onda sea estacionaria. Esto significa que la longitud de onda ($w_l = cte$) λ depende de x , pues el campo magnético efectivamente cambió el medio de propagación de las ondas.

DATOS			
PRUEBA NO. 2			
	cms.	cms.	cms.
$2A_{xz}$	0.3	0.3	0.2
$2A_{xy}$	0.0	0.0	0.0
N_{xz}	0.0	0.0	0.0
N_{xy}	25.0	48.5	

Prueba 3. La posición del imán está en 49.5 cm sobre el eje x , la onda tiene polarización plana en xz . Hay un nodo en $N_{xz} = 25$ cm sobre el eje x y a partir de 49.5 – 67.25 cm la cuerda se mantiene sin oscilar a simple vista, ver figura 4.13. Esto también es un regimen de trampa de onda.

Prueba 4. El imán está en la posición 20 cm sobre el eje x , tiene un nodo en $N_{xz} = 43$ cm y de 0 a 20.5 cm la cuerda permanece sin oscilar a simple vista, ver figura 4.14. Esta trampa de onda es parecida a la de la prueba 3 de este caso, pero no son inversión una de la otra.

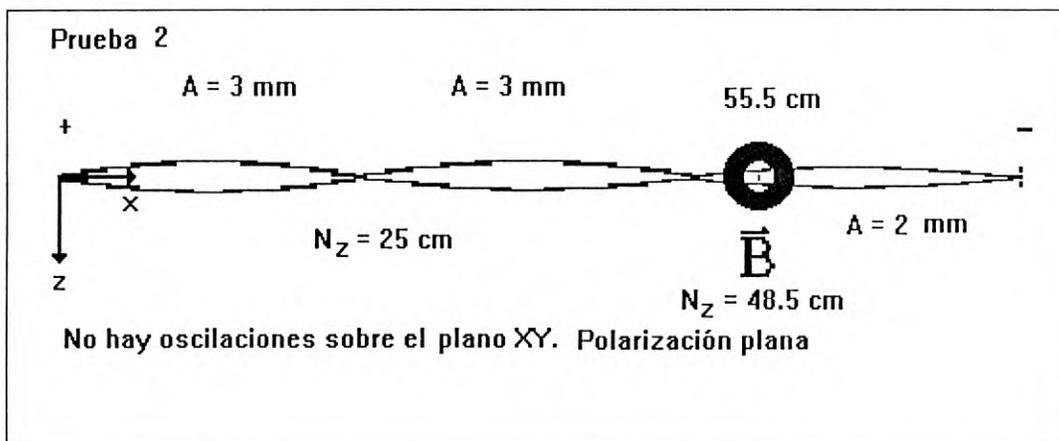


Figure 4.12: Oscilaciones con un extremo L fijo y el otro L amortiguado manteniendo los dos extremos T fijos con posición del imán en $x = 55.4 \text{ cm}$.

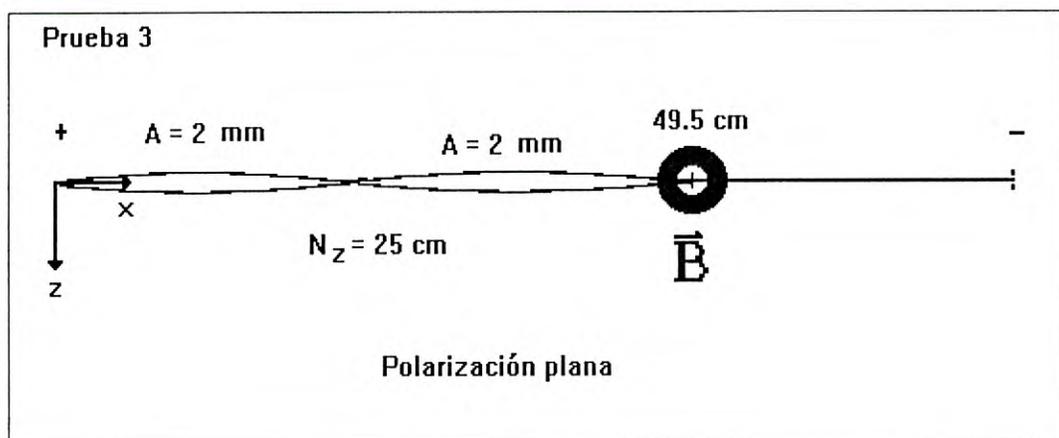


Figure 4.13: Trampa de onda con el imán en la posición $x = 49.5 \text{ cm}$.

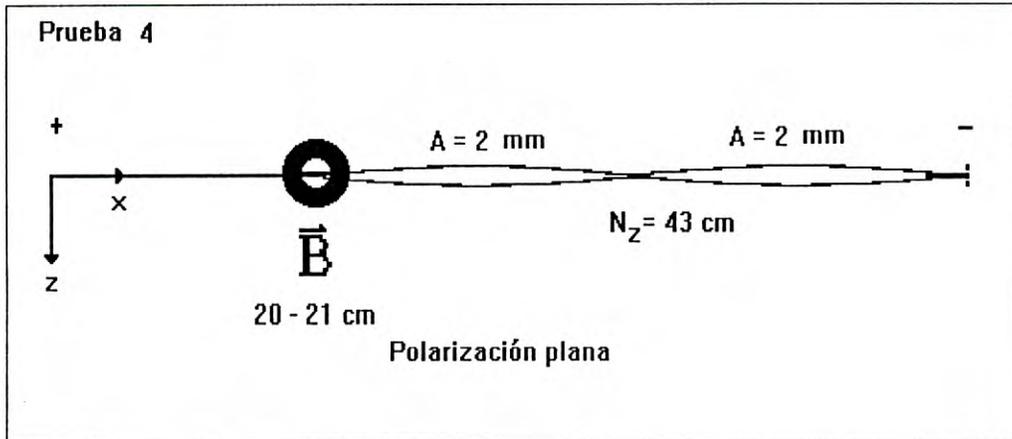


Figure 4.14: Trampa de onda con la posición del imán en $x = 20 \text{ cm}$.

Este modo de oscilación trampa de onda indica el efecto del movimiento longitudinal sobre el movimiento transversal, de lo que concluimos que hay un acoplamiento entre estos dos movimientos.

5. CONCLUSIONES

Fueron estudiadas las oscilaciones forzadas en el sistema ondulatorio que consiste de una cuerda tendida con corriente eléctrica en un campo magnético permanente de diferentes configuraciones. Se encontró lo siguiente.

1). Derivación y análisis de ecuaciones de movimiento demostraron complejidad y gran variedad de formas de movimiento ondulatorio del sistema considerado. Según la configuración del campo magnético se distinguen 10 diferentes formas del sistema de ecuaciones de movimiento. Cada forma del sistema de ecuaciones describe un cierto tipo de acoplamiento entre modos transversales y longitudinales.

2). Los parámetros principales que gobiernan el mov. del sistema son: T , L , ρ , \mathbf{H} , y condiciones de frontera (condiciones iniciales)

3). Fue diseñado el equipo experimental con posibilidad de variar y controlar los parámetros anteriores con el fin de tener reproducibilidad de resultados experimentales. Además fue desarrollada cierta metodología para los experimentos.

4). En el caso con condiciones de frontera de 2 extremos TL fijos con imán permanente en forma de anillo, el sistema muestra la simetría de inversión en la polarización de modos transversales. Además, se observa un cambio continuo de polarización (o más general, la deformación de la figura) de las oscilaciones transversales a lo largo del eje x .

5). Con condiciones de frontera un extremo TL fijo y el otro T fijo y L amortiguado encontramos un régimen de movimiento transversal llamado trampa de onda, con polarización plana.

6). Con condiciones de frontera un extremo TL fijo y otro extremo T fijo y L amortiguado están presentes los modos transversales que no se encuentran en el caso con condiciones de frontera de 2 extremos TL fijos. Esto indica el acoplamiento entre modos transversales y longitudinales.

7). La experiencia de este trabajo permite incorporar el equipo experimental a la enseñanza y a la investigación.

6. APENDICE

6.1. METODO DE FOURIER

6.1.1. SEPARACION DE VARIABLES PARA LA ECUACION DE ONDA HOMOGENEA.

Consideramos la solución de la ecuación de onda (ref. [7] y ref. [14])

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (6.1)$$

la cual satisface las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (6.2)$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = a(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.3)$$

$$u_t(x, 0) = b(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.4)$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones dadas.

Para una solución de la forma

$$X(x)T(t)$$

la ec. (6.1) queda en la forma:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (6.5)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una función de x solamente, y el lado derecho es una función de t únicamente. La ec. (6.5) puede ser cierta a lo largo del dominio requerido solamente si ambos lados tienen el mismo valor constante, el cual nosotros denotaremos por $-\lambda$. Este da el par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda X, \quad (6.6)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda c^2 T. \quad (6.7)$$

6.1.2. LAS SOLUCIONES NORMALES

Las funciones normales son productos de funciones $X(x)T(t)$, las cuales satisfacen la ec. (6.1) y las condiciones de frontera ec. (6.2). En cualquier solución normal la función $X(x)$, llamada un *modo normal*, debe además satisfacer la ec. (6.6) y las condiciones

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (6.8)$$

Tres posibles casos ahora aparecen, es decir λ positiva, negativa, y cero. Sin embargo, cuando $\lambda \leq 0$, la única solución para la ec. (6.6), que satisface (6.8) es $X(x) = 0$. En el caso en que λ es positiva, se puede hacer $\lambda = k^2$, con lo que la ec. (6.6) da

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx. \quad (6.9)$$

Debido a la condición $X(0) = 0$, $A = 0$, y así $X(x) = B \sin kx$. La condición $X(L) = 0$ ahora restringe a k a ser una solución de

$$\sin kL = 0.$$

Por lo tanto k puede tomar cualquiera de los valores k_n , donde

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

De la ec. (6.7) tenemos

$$T(t) = C \cos kct + D \sin kct,$$

donde C y D son constantes arbitrarias. Por lo tanto, en este problema cada solución normal tiene la forma

$$\sin k_n x (C \cos k_n ct + D \sin k_n ct). \quad (6.11)$$

Las funciones $X_n(x) = \sin k_n x$ son los modos normales y las cantidades $\omega_n = k_n c$ son las frecuencias normales de oscilación.

6.1.3. SUPERPOSICIÓN DE SOLUCIONES NORMALES

Tanto la ecuación de onda (6.1) como las condiciones de frontera (6.2) son lineales y homogéneas. Por consiguiente cualquier combinación lineal de las soluciones normales, expresadas por la ec. (6.11), con coeficientes constantes, es una solución de la ec. (6.1) satisfaciendo la ec. (6.2). Las combinaciones lineales más generales son las series infinitas

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (C_n \cos k_n ct + D_n \sin k_n ct). \quad (6.12)$$

Asumiendo que la serie es convergente y diferenciable término a término, se encuentran de las condiciones iniciales, ec. (6.3) y ec. (6.4), que

$$a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (6.13)$$

y

$$b(x) = \frac{\pi c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.14)$$

Reconociendo esas expresiones como las expansiones en series de Fourier en el intervalo $(0, L)$. Los coeficientes son dados por la siguiente ecuación

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

y se obtienen

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L a(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (6.15)$$

y

$$D_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L b(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (6.16)$$

Finalmente, sustituyendo C_n y D_n en la ec. (6.12), se llega a

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \frac{2}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \int_0^L a(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \frac{2}{n\pi c} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \int_0^L b(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \end{aligned} \quad (6.17)$$

6.1.4. SOLUCIONES NORMALES DE LA ECUACIÓN DE ONDA HOMOGÉNEA GENERALIZADA

Los mismos modos normales pueden aplicarse a las ecuaciones diferenciales más generales. Se considera la ecuación

$$u_{tt} + \lambda u_t + \beta^2 u = c^2 u_{xx} \quad \text{sujeta a } u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

donde λ y β son constantes.

Las ecuaciones para $X(x)$ y $T(t)$ son $X'' = -k^2 X$ y

$$T'' + \lambda T' + (\beta^2 + k^2 c^2) T = 0. \quad (6.18)$$

Por lo tanto, los modos normales son otra vez $X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$, como en la ec. (6.11). Las soluciones normales, sin embargo, son modificadas porque $T(t)$ ahora tiene que ser una solución de la ec. (6.18).

6.1.5. SOLUCIONES NORMALES DE LA ECUACIÓN DE ONDA HOMOGÉNEA CON OTRAS CONDICIONES DE FRONTERA

i) Extremos libres: Si las condiciones (6.2) son reemplazadas por

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,$$

los modos normales son las funciones

$$\cos k_n x, \text{ donde } k_n = \frac{n\pi}{L}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

y la solución de la ec. (6.1) es expandida en la serie

$$u(x, t) = C_0 + D_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos k_n x (C_n \cos \omega_n t + D_n \text{sen } \omega_n t).$$

Las funciones iniciales $a(x)$ y $b(x)$ son entonces expandidas en series cosenos.

ii) Un extremo fijo y el otro extremo libre: Las condiciones son

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0.$$

Los modos normales son funciones de la forma $\text{sen } kx$, donde $\cos kL = 0$, dando

$$k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

iii) Extremos con resorte: Condiciones del tipo $\alpha u + \beta u_x = 0$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$) también nos da los modos normales de la forma de la ec. (6.9), pero las cantidades k_n ya no son múltiplos enteros de una constante, y las expansiones de las series de Fourier ordinarias no pueden ser usadas.

6.1.6. ECUACIÓN DE ONDA NO HOMOGÉNEA

EXPANSIÓN EN LOS MODOS NORMALES DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

Se considera la ecuación

$$u_{tt} + \lambda u_t - c^2 u_{xx} = p(x, t), \quad \text{sujeta a } 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (6.19)$$

Esta corresponde al problema de una cuerda sujeta a un amortiguamiento lineal de constante λ y una densidad de fuerza externa $p(x, t)$. Suponiendo que se requiere una solución que satisfaga las condiciones de extremos fijos ó libres y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = a(x), \quad u_t(x, 0) = b(x).$$

Sean las funciones $X_n(x)$ los modos normales de la correspondiente ecuación homogénea

$$u_{tt} + \lambda u_t - c^2 u_{xx} = 0. \quad (6.20)$$

Entonces $X_n''(x) = -k_n^2 X_n(x)$, donde los valores de k_n son determinados por las condiciones de frontera.

Suponiendo que la solución requerida puede ser expandida en la serie infinita de modos normales

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) X_n(x). \quad (6.21)$$

Se ha visto que, para condiciones de frontera de extremos fijos ó libres, esta es una serie de Fourier con coeficientes $S_n(t)$, y así la expansión es valida si la solución $u(x, t)$ existe. Sea valida la expresión

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) X_n(x).$$

Entonces la ec. (6.19) se reduce a

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) [S_n''(t) + \lambda S_n'(t) + k_n^2 c^2 S_n(t) - P_n(t)] = 0.$$

Los coeficientes de Fourier de una función idénticamente cero deben cancelarse. Por consiguiente

$$S_n''(t) + \lambda S_n'(t) + k_n^2 c^2 S_n(t) = P_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

Esas ecuaciones diferenciales ordinarias son facilmente resueltas. Solamente nos queda encontrar los valores iniciales de $S_n(0)$ y $S_n'(0)$ que permitan satisfacer las condiciones iniciales para $u(x, t)$. Para hacer esto se expanden ambos $a(x)$ y $b(x)$ en series de Fourier en modos normales $X_n(x)$, así que

$$u(x, 0) = a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \quad (6.23)$$

$$u_t(x, 0) = b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n X_n(x). \quad (6.24)$$

Ahora, usando la expansión (6.21) se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) [S_n(0) - \alpha_n] = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) [S_n'(0) - \beta_n] = 0.$$

Nuevamente los coeficientes de Fourier deben desaparecer, y se observa que las condiciones iniciales para $u(x, t)$ son satisfechas cuando las ecs. (6.22) son resueltas sujetas a los valores iniciales

$$S_n(0) = \alpha_n \text{ y } S_n'(0) = \beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

7. REFERENCIAS

- [1]. I. V. Saveliev, *Curso de Física General*, Mir, Moscú, v. 1, Capítulo VII
- [2]. B. M. Yavorski, A. A. Pinski, *Fundamentos de Física II*, Ed. Mir Moscú, 1983.
- [3]. A. B. Pipard, *The Physics of Vibration*, Cambridge University Press, 1989.
- [4]. Marcelo Alonso, Edward J. Finn, *Física vol. II, Campos y ondas*, EE.UU., Fondo Educativo Interamericano, S. A. Capítulo XVIII, 1970.
- [5]. A. Portis, *Laboratory Physics: Berkeley Physics Laboratory*, Chap. 2, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1975.
- [6]. F. Crawford, *Waves: Berkeley Physics Course*, vol. III, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1984.
- [7]. G. R. Baldock, T. Bridgeman, *The Mathematical Theory of Wave Motion*, John Wiley & Sons, 1981.
- [8]. A. Hirose, K. E. Lonngren, *Introduction to Wave Phenomena*, J. Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1985.
- [9]. P. M. Morse, and H. Feshbach, *Methods of Mathematical Physics*, Parts I and II, McGraw Hill Book Company, 1953.
- [10]. E. V. Kurmyshev, *Oscillations of a Current Carrying Stretched String in a Magnetic Field*, Informe Técnico, CIF96-2, 18pp.
- [11]. V. G. Rekach, *Problemas de la Teoría de la Elasticidad*, Capítulo II, Mir, Moscú, 1978.
- [12]. A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Ed., Dover Publications, Inc., N. Y., 643 pp.
- [13]. L. S. Pontriagin, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Nauka, Moscú, 1965.
- [14]. Philippe Dennerly, Andre Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Ed. Harpper & Row, New York, 1967.
- [15]. George Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, third edition, Ed. Academic Press, Inc, San Diego, 1985.
- [16]. S. P. Strelkov, *Mechanics Part three, Oscillations and Wave*, Ed. Mir publishers, Moscow, 1978.
- [17]. L. Landau, A. Ajiezer, *Curso de Física General*, Ed. Mir Moscú 1973, pp. 99-115.