

15/190531

# Puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna

José Carlos Ramírez Villegas

Una tesis presentada para obtener el título de  
Licenciado en Física



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**

División de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física  
Universidad de Sonora  
Hermosillo, Sonora  
Diciembre de 2018

# Puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna

José Carlos Ramírez Villegas

Tesis presentada para el título de Licenciado en Física  
Diciembre de 2018

## Resumen

En este trabajo presentamos el desarrollo del problema de los tres cuerpos restringido, que consiste en tener dos cuerpos de masa grande en reposo y un tercer cuerpo de masa despreciable, para el cual estudiamos sus movimientos debido a la interacción gravitacional. En particular analizamos el sistema Tierra-Luna, aunque este modelo se puede emplear para explicar un gran número de sistemas. Para el análisis, consideramos el sistema desde un marco de referencia no inercial y construimos una *fuerza efectiva*, la cual contiene el término de fuerza gravitacional y dos términos que aparecen como una contribución debida al sistema de referencia no inercial: la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis. Esta fuerza efectiva la podemos denotar como el gradiente de un potencial efectivo, mediante el cual obtenemos los puntos de Lagrange que denotamos  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  y  $L_5$ . Al analizar el movimiento del tercer cuerpo cuando sufre una perturbación en la posición de cada uno de estos puntos podemos asegurar que las órbitas alrededor de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  son inestables, mientras que alrededor de  $L_4$  y  $L_5$  las órbitas son estables.

# Declaración

Este escrito es resultado de un ejercicio de revisión, investigación, resolución y síntesis llevado a cabo en el grupo de Física Fundamental de la Universidad de Sonora. Aunque algunos aspectos del trabajo pudieran haber sido ya presentados en congresos o publicaciones independientes, ninguna parte de este trabajo, en su forma actual, ha sido presentada para la obtención de algún grado en otra institución o con fines no académicos. El trabajo, incluida la redacción del texto, es producto exclusivo de los esfuerzos del autor, excepto cuando se señale explícitamente en el texto alguna cita.

©; 2018 por José Carlos Ramírez Villegas.

“Este documento se libera al público por su autor bajo una licencia *creative commons* Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-SA 4.0). Se puede reproducir en todo o en parte, redistribuir y adaptar por cualquier medio. Lo anterior está condicionado a que cualquiera de sus derivados deberán liberarse bajo las mismas condiciones y ha que se haga referencia al original (una versión completa de la licencia se puede encontrar en: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>) ”

# Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi director de Tesis el profesor Calcaneo por ayudarme a terminar este trabajo y dedicarme el tiempo para resolver las dudas que surgieron a lo largo del proceso de realizar la tesis, al profesor Galaviz por ayudarme con el capítulo 3 de la tesis y hacerme las correcciones sobre este trabajo, a los profesores Dupret y Brenda por sus correcciones y el tiempo que le dedicaron a este trabajo. A lo largo de la Carrera de física conocí a muchas personas fue muy divertido el tiempo que pase con ustedes Angela, Mario, Reyna, Cesar, Altair, Potter, Susana, Fernando, Angie, Maria José, Pedroza, Tsuki, Yakxin, Rolis, Campa, Ali, Diana, Raul, Bil, los Juanito, Joel, Angel, Sarahi, Carmen, Rulo, Paulina y Dinora. Tambien me gustaria agradecerle a Lupita (bibliotecaria) y a Lupita(secretaria) por ayudarme a lo largo de mi carrera. Durante la carrera conocí a muchos profesores, aprendí mucho de ellos, ya sea cosas académicas como cosas de la vida, pero recordare a los profesores: Eduardo Telleachea, Silvia Ibarra y Urrea, Gudelia, Chopan, Sergio, Calcaneo, Laura, Rosas, Antonio Jauregui, Angelina Uribe, Rocio, Patricio, Horacio y Armenta. Aunque tambien conocí a otras personas que no formaron parte de la licenciatura, tambien pase momentos divertidos como: Galaviz, Dupret, Jose Arvizu, Oscar, Bianca Villalpando, Brian, Samuel Garcia, Silvia, hicieron de mi estadia en Hermosillo algo muy agradable y tambien a mis dos amigos Ivan Moroyoqui, Emir Nunñez y Gustavo Robles a pesar de no pasar tanto tiempo con ellos siempre que voy a Obregon nos divertimos y puedo contar con ellos.

# Índice general

Resumen	III
Declaración	IV
Agradecimientos	v
Introducción	1
<b>1. Problema de los tres cuerpos restringido</b>	<b>3</b>
1.1. Campo central . . . . .	3
1.1.1. Ecuación de movimiento de Lagrange en un campo central y fuerza efectiva . . . . .	3
1.1.2. Leyes de Kepler . . . . .	8
1.2. Marco de referencia no inercial . . . . .	9
1.2.1. Sistema de coordenadas que rota . . . . .	9
1.2.2. Fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis . . . . .	11
<b>2. Potencial efectivo y puntos de Lagrange</b>	<b>13</b>
2.1. Construcción del potencial efectivo . . . . .	13
2.2. Puntos de Lagrange . . . . .	22
<b>3. Estabilidad de los puntos de Lagrange</b>	<b>27</b>
3.1. Máximos, mínimos y puntos silla . . . . .	27
3.2. La vecindad de los puntos de Lagrange . . . . .	29
3.3. Resultados . . . . .	40
3.3.1. Puntos $L_1$ , $L_2$ y $L_3$ . . . . .	40

<b>Índice general</b>	<b>vii</b>
3.3.2. Puntos $L4$ y $L5$ . . . . .	45
<b>Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

# Índice de figuras

1.1. Situación geométrica de vectores y coordenadas para el trabajo . . . . .	4
1.2. Potencial efectivo en el problema de campo central . . . . .	7
1.3. Marco de referencia que rota con respecto a otro fijo. . . . .	9
2.1. Diagrama del problema de los tres cuerpos . . . . .	14
2.2. Curvas de nivel para $\Phi_{eff}$ . . . . .	21
2.3. Puntos de Lagrange . . . . .	26
3.1. Gráficas de las funciones $\xi$ y $\eta$ en el punto $L1$ , primera prueba . . . . .	41
3.2. Gráficas de las funciones $\xi$ y $\eta$ en el punto $L1$ , segunda prueba . . . . .	42
3.3. Gráficas de las funciones $\xi$ y $\eta$ en el punto $L2$ , primera prueba . . . . .	43
3.4. Gráficas de las funciones $\xi$ y $\eta$ en el punto $L2$ , segunda prueba . . . . .	43
3.5. Gráficas de las funciones $\xi$ y $\eta$ en el punto $L3$ , primera prueba . . . . .	44
3.6. Gráficas de las funciones $\xi$ y $\eta$ en el punto $L3$ , segunda prueba . . . . .	44
3.7. Gráficas de $\xi$ y $\eta$ en el punto $L4$ , primera prueba . . . . .	46
3.8. Gráficas de $\xi$ y $\eta$ en el punto $L4$ , segunda prueba . . . . .	47
3.9. Gráficas de $\xi$ y $\eta$ en el punto $L5$ , primera prueba . . . . .	48
3.10. Gráficas de $\xi$ y $\eta$ en el punto $L5$ , segunda prueba . . . . .	48

# Índice de tablas

2.1. Raíces para el caso $Y = 0$ . . . . .	23
3.1. Criterio de las segundas derivadas de los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna . . . . .	28
3.2. Raíces de la ecuación característica . . . . .	34

# Introducción

Si consideramos un sistema de tres o más partículas puntuales masivas moviéndose bajo la influencia de fuerzas gravitacionales mutuas, es posible, en principio, calcular sus posiciones y velocidades en cualquier tiempo, si conocemos todas las masas involucradas; siempre y cuando conozcamos para todas ellas sus posiciones y velocidades en algún momento dado. Este problema fue formulado desde la época de Isaac Newton y se le llama *el problema de  $N$ -cuerpos*. Sin embargo, la interacción gravitacional siempre se modela como el efecto entre dos masas, por lo que la construcción de la interacción para un sistema de más de dos objetos necesariamente involucra la suma de interacciones entre cada par de ellos. Para resolver este tipo de problemas será necesario aplicar alguna aproximación o bien un método numérico, incluso para un sistema en el que interactúan solamente tres objetos.

Dada a la complejidad que tiene el problema de tres cuerpos, en su época el matemático franco-italiano Joseph Louis Lagrange lo estudió haciendo las siguientes aproximaciones:

- Que la masa de dos de los cuerpos es mucho mayor que la del tercero.
- Que podemos considerar un sistema de referencia en el cual las masas más grandes están en reposo relativo entre ellas y solamente observamos el movimiento de la tercera (mucho más ligera).
- Que la masa de la tercera partícula es suficientemente ligera tal que no perturba a los otros dos.

Como podemos ver, incluso cuando nos limitamos al caso particular  $n=3$ , llamado *el problema de los tres cuerpos* se mantiene el alto grado de complejidad; a

---

diferencia del problema de dos cuerpos. Debido a la forma que tienen las ecuaciones que gobiernan el movimiento no se puede obtener de manera analítica su solución, solamente es posible una descripción ya sea con alguna aproximación [Wang, 1991] o bien mediante métodos numéricos.

Sin embargo, siguiendo las aproximaciones de Lagrange, podemos estudiar un caso especial del problema, llamado comúnmente *el problema de los tres cuerpos restringido*. Resulta que, sin importar estas simplificaciones, el modelo es válido para un gran número de sistemas, como el sistema Tierra-Luna, mismo que se desarrollará en este trabajo.

Debido a la longitud y complejidad de algunas de las expresiones algebraicas y para abreviar el tiempo de cálculo, todo el trabajo computacional utilizado a continuación, incluidas las gráficas y las manipulaciones algebraicas; fue hecho en el sistema computacional Mathematica [Wolfram Research Inc., 2017] y corroborado usando distintos algoritmos. En lo que respecta a la notación, escribimos cualquier vector  $\mathbf{V}$  (en negritas) y matriz  $\mathbb{M}$  (con doble raya), mientras que todos los demás símbolos se consideran escalares.

En el capítulo 1 abordamos el tema de marcos de referencia no inerciales, los cuales dan lugar a interacciones ficticias como la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga, necesarios para obtener la fuerza efectiva, que nos permite describir las interacciones con el tercer cuerpo. En el capítulo 2 exploramos la construcción del potencial efectivo, el cual da origen a puntos de equilibrio estables e inestables que, dadas estas aproximaciones, son mejor conocidos como *puntos de Lagrange*. Por último, en el capítulo 3 estudiamos pequeñas desviaciones en la posición del tercer cuerpo, en cualquiera de estos puntos para así conocer la estabilidad de trayectorias en su vecindad. El trabajo concluye con un resumen de los principales resultados obtenidos y una consecuencia muy interesante para el sistema Tierra-Luna.

# Capítulo 1

## Problema de los tres cuerpos restringido

En la Licenciatura en Física, particularmente en el curso de mecánica teórica, estudiamos los temas de campo central y sistema de referencia no inercial. En este capítulo revisaremos algunos de estos conceptos, partiendo del problema de dos cuerpos, que nos permitirán resolver el problema de tres cuerpos restringido.

### 1.1. Campo central

Se le llama campo central a la interacción entre dos partículas, cuando ésta depende solamente de la distancia entre ellas, en dirección radial. Hay varios ejemplos de este tipo de interacciones, pero uno de los primeros ejemplos estudiados fue la interacción gravitacional [Marion and Thorton, 1995], misma que usaremos para revisar la descripción del movimiento de dos cuerpos [Cornish, 1998]; lo cual nos permitirá estudiar nuestro problema.

#### 1.1.1. Ecuación de movimiento de Lagrange en un campo central y fuerza efectiva

Debido a que la interacción gravitacional depende solamente de la distancia radial entre los objetos, el problema de campo central tiene simetría esférica por

lo que conviene utilizar coordenadas esféricas:  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Esta dependencia solo en la coordenada radial nos permite asegurar que se conservan el momento angular,  $\mathbf{L}$  y su magnitud,  $L$ . Por esta razón conviene fijar el eje  $z$  de las coordenadas cartesianas tal que el vector de momento angular es paralelo a él. Por la misma razón, el movimiento se llevará a cabo en un plano, así que podemos también fijar la coordenada  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . La situación geométrica de estos vectores y coordenadas se ilustra en la figura 1.1, donde mostramos tanto al momento angular  $\mathbf{L}$  en el eje como al momento lineal en el plano de la órbita  $\mathbf{p}$ .

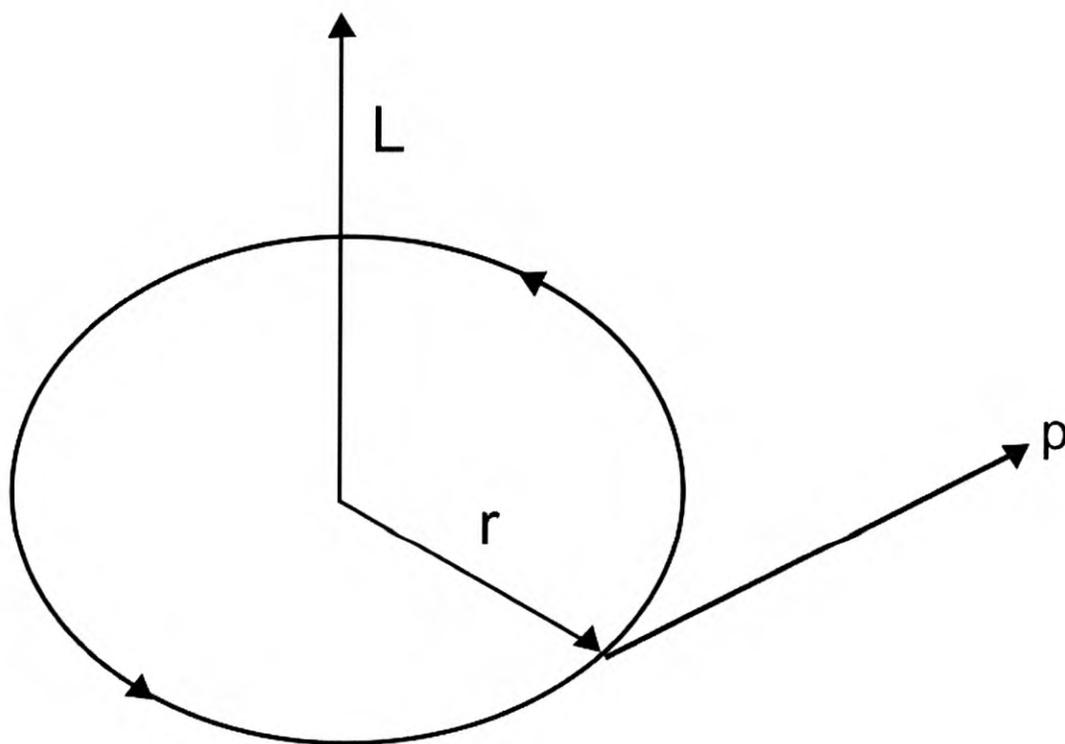


Figura 1.1: Situación geométrica de estos vectores y coordenadas usados en este trabajo.

La discusión anterior nos deja con las coordenadas generalizadas para describir el movimiento:  $r$ ,  $\phi$ . Esta descripción la hacemos mediante la siguiente función Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r), \quad (1.1.1)$$

en esta expresión reconocemos al primer término como la energía cinética de un cuerpo de masa  $m$ , y al segundo como el un potencial gravitacional dado por  $V(r)$ .

La ecuación de Lagrange que nos describe el comportamiento de la coordenada generalizada  $r$  es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0,$$

al introducir la forma específica de la Lagrangiana para este problema obtenemos:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{dV}{dr} = 0,$$

misma que se puede reescribir de la siguiente forma:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 + f(r). \quad (1.1.2)$$

El comportamiento de la segunda coordenada generalizada,  $\phi$ , se obtiene mediante:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

La Lagrangiana no contiene términos de  $\phi$ , por lo que podemos eliminar la expresión  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ , la coordenada  $\phi$  es cíclica y el momento angular se conserva. Este resultado nos lleva a una ecuación que se puede integrar una vez, como resultado queda una constante

$$mr^2\dot{\phi} = \text{constante} = L,$$

de donde obtenemos la ecuación para  $\dot{\phi}$ :

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}. \quad (1.1.3)$$

La pareja (1.1.2) y (1.1.3) representa las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa  $m$  en el campo gravitacional de otra de masa  $M$ , cuya información está contenida en el potencial  $V$ .

Sustituimos (1.1.3) en la ecuación para la coordenada de  $r$  (1.1.2) y multiplicamos por  $\dot{r}$  para obtener:

$$m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{mr^3} + \dot{r}\frac{dV}{dr} = 0,$$

o bien

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V \right) = 0.$$

Por lo que hemos encontrado una segunda constante de movimiento, que corresponde a la energía,  $E$ , y podemos expresar una ecuación simplificada para la coordenada  $r$ :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V = E \quad (1.1.4)$$

Ahora podemos volver a usar el resultado de (1.1.3) en (1.1.2):

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} + f(r) \quad (1.1.5)$$

y definir una *fuerza efectiva*

$$f_{eff}(r) = \frac{L^2}{mr^3} + f(r). \quad (1.1.6)$$

Con su respectiva energía potencial efectiva

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \quad (1.1.7)$$

por lo tanto las ecuaciones para la energía mecánica total, (1.1.4), y la aceleración radial, (1.1.5) son:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E \quad (1.1.8)$$

$$m\ddot{r} = f_{eff}(r). \quad (1.1.9)$$

Los valores de  $r$  que pueden ser admisibles tiene que cumplir

$$E - V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$$

Con este resultado y la gráfica de potencial efectivo como función de la posición, que mostramos en la figura 1.2, se puede hacer una descripción cualitativa del movimiento esperado en el problema del campo central:

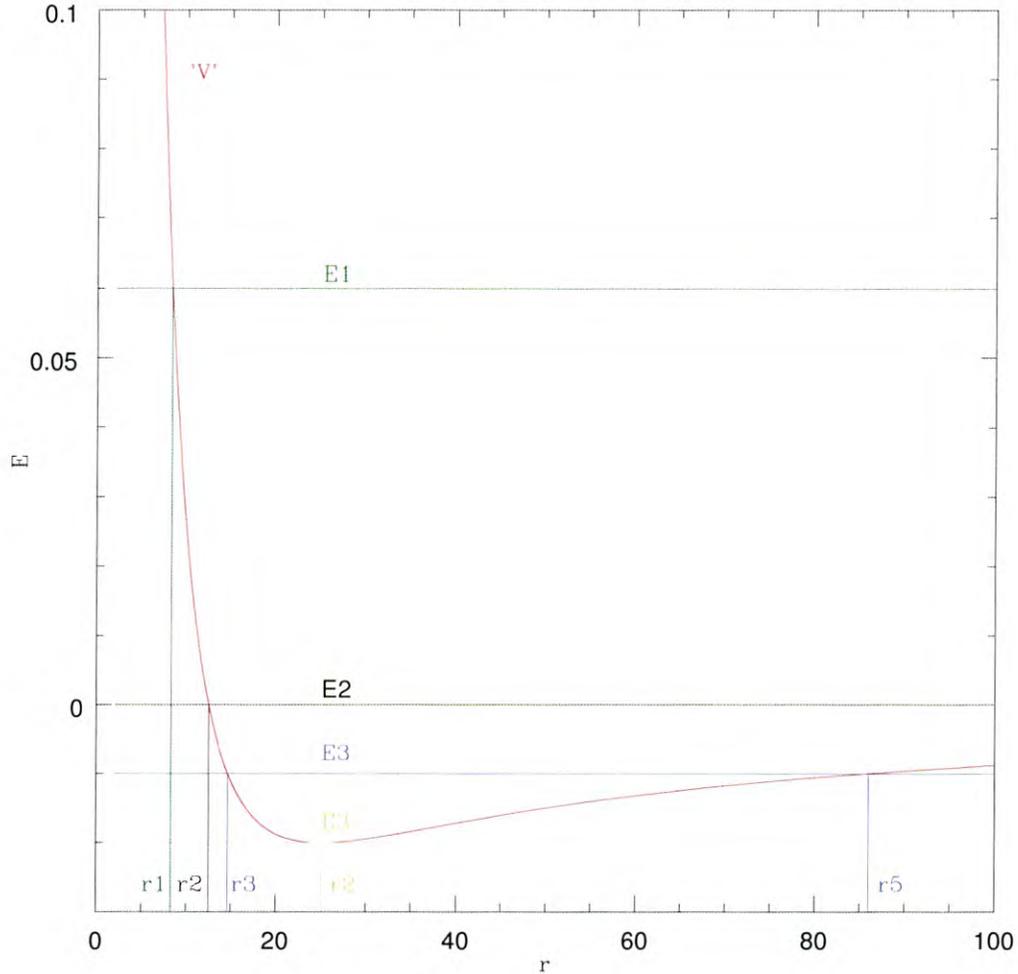


Figura 1.2: Órbitas esperadas en el problema de campo central, dado el potencial efectivo  $V(r)$

Para valores de energía no negativos, el movimiento de la partícula es ilimitado. Si la energía es mayor a cero,  $E_1$  en la gráfica, se trata de órbitas hiperbólicas con un punto de retorno,  $r_1$ . Para energía igual a cero,  $E_2$  en la gráfica, la órbita es parabólica con máximo acercamiento  $r_2$ . Si ahora las energías son negativas, todas las órbitas son ligadas. Para energías mayores que el mínimo pero menores a cero,  $E_3$  en la gráfica, el movimiento es acotado entre  $r_3 \leq r \leq r_5$ , y la órbita es elíptica. Si la energía corresponde al valor mínimo del potencial efectivo, como  $E_4$  en la gráfica, entonces la trayectoria de la partícula está limitada  $r_4$ , por lo tanto el movimiento de la partícula es circular.

### 1.1.2. Leyes de Kepler

Antes del desarrollo del formalismo que describe el movimiento en el campo gravitacional, el astrónomo Johannes Kepler, pudo describir el movimiento de los planetas del sistema solar, usando los datos de Tycho Brahe. Su descripción se resume en las tres leyes que llevan su nombre:

1. Así la trayectoria de un planeta alrededor del sol es una elipse con el Sol en uno de los focos.
2. El radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Si expresamos la masa del Sol como  $m_{\text{Sol}}$  y la masa del planeta,  $m_{\text{planeta}}$ ; el cuadrado del periodo de revolución de este último,  $T$ , alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica,  $a$ ,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_{\text{Sol}} + m_{\text{planeta}})}.$$

En particular, cuando se trata de una órbita circular de radio  $R$ , la relación entre el período y el radio orbital queda

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G(m_{\text{Sol}} + m_{\text{planeta}})}. \quad (1.1.10)$$

Podemos considerar a la expresión anterior como una relación entre las propiedades del sistema Sol-planeta que determinan el valor de la constante gravitacional,  $G$  (la cual utilizaremos más adelante).

## 1.2. Marco de referencia no inercial

### 1.2.1. Sistema de coordenadas que rota

Consideramos dos conjuntos de ejes coordinados, el primero montado en un sistema de referencia que rota, al cual llamaremos “rotando”, con respecto a otro, montado en un sistema de referencia que denominamos “fijo” y consideramos sistema de referencia inercial (SRI). En la figura 1.3 mostramos los ejes de ambos sistemas.

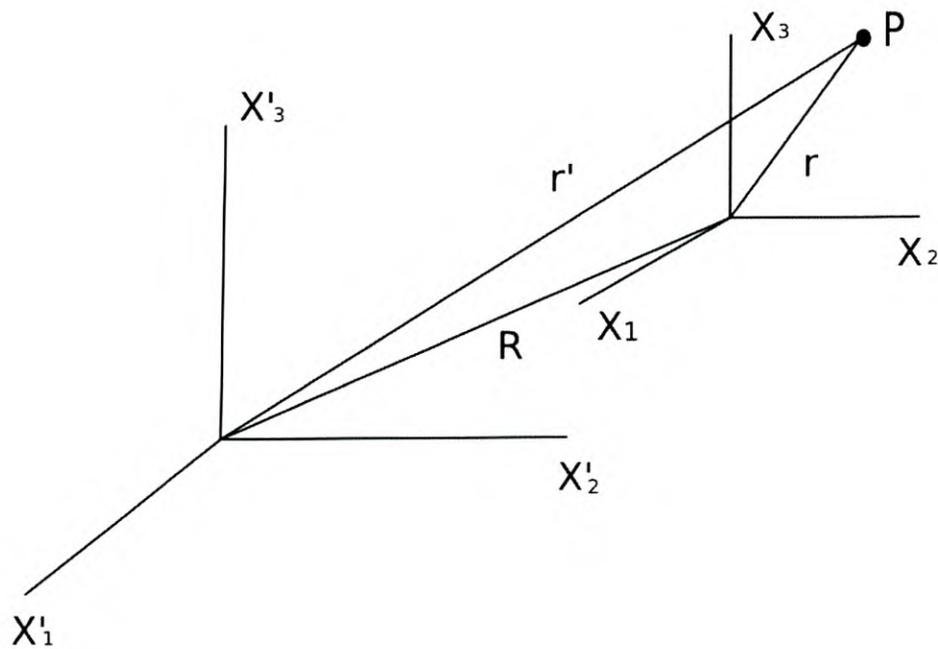


Figura 1.3: Distancia de un punto  $\mathbf{P}$  desde un marco de referencia que rota, sistema no primado, con respecto a otro fijo, sistema primado.

Usaremos  $x'_i$  como coordenadas para el SRI, mientras que para el sistema rotando las coordenadas serían  $x_i$ . En la figura denotamos un punto arbitrario,  $\mathbf{P}$ , que puede moverse libremente y los vectores de posición desde cada uno de los marcos de referencia. Si denotamos con  $\mathbf{r}'$  al radio vector de  $\mathbf{P}$  en el SRI,  $\mathbf{r}$  a su radio vector en el sistema rotando y  $\mathbf{R}$  al vector que ubica el origen del sistema rotando en el sistema fijo; la relación entre ellos es la siguiente:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (1.2.11)$$

Cuando el sistema rotando es sometido a una rotación infinitesimal de magnitud  $\delta\theta$ , el movimiento del punto  $\mathbf{P}$  con respecto a la coordenada  $x'_i$  es descrito mediante la siguiente expresión:

$$(d\mathbf{r})_{fijo} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}.$$

si consideramos el tiempo en que sucedió la rotación infinitesimal medido desde el sistema fijo,  $dt$ , podemos dividir entre este tiempo:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{fijo} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r}, \quad (1.2.12)$$

donde se puede expresar uno de los términos como la velocidad angular de rotación,  $\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$ , por lo tanto (1.2.13) queda:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{fijo} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Si  $\mathbf{P}$  estuviera fijo en el sistema  $x_i$ , la expresión anterior es suficiente para describir el movimiento, sin embargo el punto  $\mathbf{P}$  es libre de moverse respecto del sistema  $x_i$ . este movimiento puede ser agregado con la expresión  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  para obtener la velocidad buscada.

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rotando} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1.2.13)$$

La expresión anterior se puede utilizar para calcular cualquier coordenada generalizada  $\mathbf{Q}$ , por lo que podemos reescribir:

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{rotando} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (1.2.14)$$

si ahora consideramos que estamos situados en el sistema fijo y que su distancia está dada por (1.2.11), en un intervalo de tiempo tenemos:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{fijo}$$

lo cual nos permite obtener

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rotando} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Definiendo:

$$\mathbf{V}_f \equiv \dot{\mathbf{r}}'_f \equiv \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{fijo}$$

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}}_f \equiv \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{fijo}$$

$$\mathbf{V}_r \equiv \dot{\mathbf{r}}_r \equiv \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{rotando}$$

la ecuación anterior se puede escribir

$$\mathbf{V}_f = \mathbf{V} + \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1.2.15)$$

Cada término de esta ecuación se refiere al movimiento del punto  $\mathbf{P}$  y son, respectivamente:

$\mathbf{V}_f$  = Velocidad relativa a los ejes fijos.

$\mathbf{V}$  = Velocidad de traslación del sistema de referencia rotando desde el SRI.

$\mathbf{V}_r$  = Velocidad relativa a los ejes rotando.

$\boldsymbol{\Omega}$  = Velocidad angular de los ejes rotando.

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  = velocidad debido a la rotación del movimiento de los ejes.

### 1.2.2. Fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis

Dado que las leyes de Newton se cumplen en marcos de referencia inerciales, para los sistemas de referencia no inerciales se puede extender su uso, incorporando “fuerzas ficticias” o, más formalmente, *fuerzas no inerciales*.

Procederemos en este camino, partiendo de la ecuación de la *fuerza efectiva*, la cual se define como la suma de las fuerzas ficticias y las fuerzas que se experimentarían en un SRI:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m \left( \frac{d\mathbf{V}_f}{dt} \right)_{fijo} \quad (1.2.16)$$

El término  $\frac{d\mathbf{V}_f}{dt}_{fijo}$  se obtiene derivando (1.2.15)

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_f}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{fijo} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{fijo}.$$

Denotamos la expresión  $\ddot{\mathbf{R}}_f = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{fijo}$ . Mientras que el termino  $\left(\frac{d\mathbf{V}_r}{dt}\right)_{fijo}$  se puede obtener la expresión (1.2.14), entonces  $V_r$  queda:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_r}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\mathbf{V}_r}{dt}\right)_{rotando} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r,$$

o bien:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_r}{dt}\right)_{fijo} = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r.$$

Donde  $\mathbf{a}_r$  es la aceleración en el sistema de coordenadas rotando.

El término  $\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{fijo}$  se obtiene, una vez más, con ayuda de (1.2.14)

$$\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{fijo} = \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rotando} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

Con ayuda de estas expresiones, la fuerza en el sistema de referencia que rota queda:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m\ddot{\mathbf{R}}_f + m\mathbf{a}_r + m(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) + m(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) + 2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r).$$

Si ahora consideramos un observador en el sistema de coordenadas rotando, la fuerza efectiva sobre una partícula, de la ecuación (1.2.16), está dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}}_f - m(\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) - m(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) - 2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r). \quad (1.2.17)$$

El primer término,  $\mathbf{F}$ , es la suma de las fuerzas gravitacionales la partícula  $\mathbf{P}$ . El segundo,  $-m\ddot{\mathbf{R}}_f$ , es el término traslacional. El tercer término,  $-m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}$ , corresponde a la aceleración angular del sistema coordinado. Por último, la la cantidad  $-m(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))$ , es la fuerza centrífuga y al final se incluye la fuerza de Coriolis  $-2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r)$  [Marion and Thorton, 1995].

## Capítulo 2

# Potencial efectivo y puntos de Lagrange

Una vez resumidos los conceptos de la interacción gravitacional descritos desde sistemas de referencia que rotan, en este capítulo se precisará la expresión del potencial efectivo y los puntos de Lagrange para el problema de tres cuerpos restringido, para el caso particular del sistema Tierra-Luna; donde para el tercer cuerpo consideramos una sonda o nave espacial cuya masa es despreciable comparada con la de la Tierra y la Luna.

### 2.1. Construcción del potencial efectivo

En la Figura 2.1 ilustramos el sistema Tierra-Luna con la partícula de masa  $m$  en un marco de referencia no inercial, donde hemos adoptado un marco co-rotacional en el cual las posiciones y velocidades se miden desde el centro de masas (CM) del sistema Tierra-Luna.

En el capítulo 1 se obtuvo la expresión de la fuerza efectiva para un observador en el sistema de coordenadas rotando, donde se tiene un término de traslación y de aceleración angular, en el nuevo marco de referencia se eliminan la expresión de traslación debido a que ahora la partícula tiene como origen el CM, mientras que la aceleración angular es cero debido a que la velocidad angular es constante, por lo

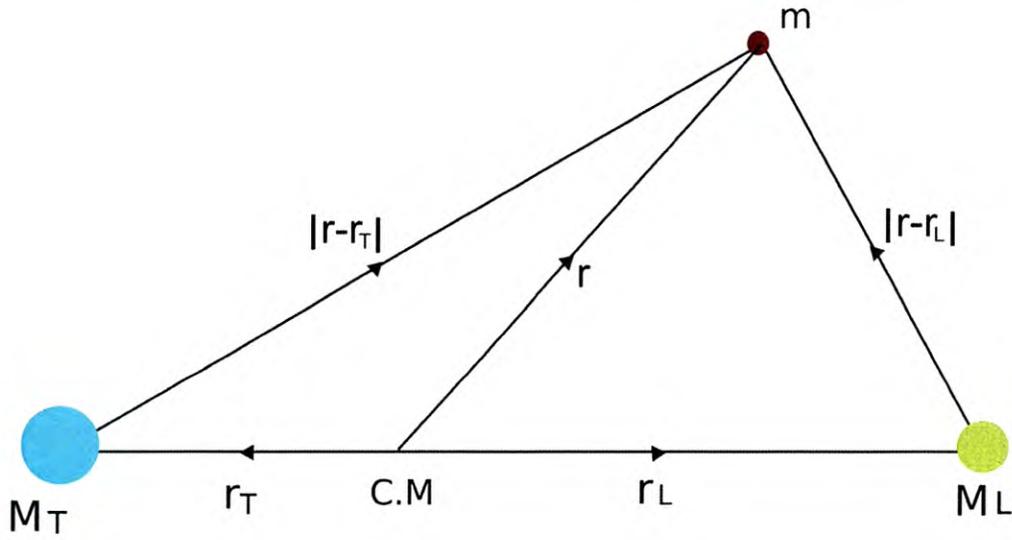


Figura 2.1: Diagrama del problema de los tres cuerpos restringido indicando las posiciones desde el centro de masa.

tanto la ecuación de la fuerza efectiva (1.2.17) queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F}_{\text{TL}} - 2m(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.1)$$

aquí el primer término de la fuerza efectiva es la suma de la interacción gravitacional Luna-masa y la interacción Tierra-masa. En ambos casos se trata de la interacción de dos cuerpos, por lo que este término se escribe:

$$\mathbf{F}_{\text{TL}} = -\frac{GM_T m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T)}{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|)^{3/2}} - \frac{GM_L m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L)}{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_L|)^{3/2}} \quad (2.1.2)$$

donde  $M_T$ ,  $M_L$  y  $m$ , corresponden a las masas de Tierra, Luna y el tercer cuerpo, respectivamente;  $\mathbf{r}$ , es el vector posición del tercer cuerpo,  $\mathbf{r}_T$ , el vector posición de Tierra y  $\mathbf{r}_L$ , el vector posición de Luna; todos medidos desde CM.  $G$  corresponde a la constante gravitacional universal, misma que en el sistema internacional tiene un valor  $G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{Kg}^2}$ .

El segundo término,  $-2m(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}})$ , es la fuerza de Coriolis y el tercero,  $-m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ , es la fuerza centrífuga, ambos son no inerciales y provienen de la elección que hemos hecho para el marco de referencia. De (2.1.1) se puede encontrar directamente la aceleración del cuerpo:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{TL}}}{m} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.1.3)$$

Como ya dijimos, la aceleración en (2.1.3) describe correctamente el movimiento del tercer cuerpo en el marco de referencia donde el sistema Tierra-Luna no rota. Si queremos hacer un análisis mediante el formalismo de la Mecánica Analítica, podemos también considerar que la velocidad de este cuerpo,  $\dot{\mathbf{x}}$ , se verá corregida por los términos no inerciales:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

entonces la Lagrangiana por unidad de masa queda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \phi(r) \quad (2.1.4)$$

donde el término  $\phi(r)$  es el potencial gravitacional por unidad de masa generado por el sistema Tierra-Luna, mismo que genera la interacción expresada en (2.1.2) mediante  $\mathbf{F}_{\text{TL}} = \nabla\phi(r)$ .

Conocida la función Lagrangiana podemos obtener el momento generalizado, de la siguiente manera :

$$p_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.1.5)$$

Una vez obtenidas la Lagrangiana y el momento, podremos construir la función Hamiltoniana del sistema:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{J}} = \mathbf{p} \cdot (\dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{2}p^2 + \phi(r),$$

podemos simplificar el término  $\mathbf{p} \cdot (-\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$  usando la siguiente identidad del producto punto con el producto cruz:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (2.1.6)$$

para dejar una forma compacta de  $H_{\mathcal{J}}$ :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}P^2 + \phi(r) - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \quad (2.1.7)$$

Ya que el momento angular es  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , en la ecuación anterior identificamos esta variable en el marco de referencia inercial, mientras los términos  $\frac{1}{2}P^2 + \phi(r)$  es la

Hamiltoniana,  $\mathcal{H}$ , en el mismo marco de referencia. Por lo tanto podemos describir el movimiento usando la siguiente función Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_J = \mathcal{H} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}$$

Ya que  $\phi(r)$  es constante en el marco rotando y no contiene velocidades generalizadas explícitas, además, como  $H_J$  no contienen el tiempo explícitamente, podemos decir que su derivada a lo largo de cualquier órbita es  $\frac{dH_J}{dt} = \frac{\partial H_J}{\partial t}$ . Además, como  $\frac{\partial H_J}{\partial t} = 0$ , entonces  $H_J = E_J = \text{constante}$ . Por lo tanto podemos identificar a  $H_J$  como una integral de movimiento, denominada la integral de Jacobi que podemos hacer corresponder con la energía total del tercer cuerpo. Con este resultado reescribimos la ecuación (2.1.7) de la siguiente forma:

$$E_J = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + \phi(r) - (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

la cual simplificamos para obtener:

$$E_J = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \phi - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$$

o bien:

$$E_J = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \phi_{eff}(r).$$

Donde hemos definido un nuevo potencial efectivo:

$$\phi_{eff}(r) = \phi(r) - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$$

mismo que está en términos de el potencial gravitacional (primer término de la derecha) y del potencial centrífugo (segundo término). Este potencial se puede simplificar empleando la siguiente identidad

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

para escribir:

$$\phi_{eff}(r) = \phi(r) - \frac{1}{2}[\Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2]. \quad (2.1.8)$$

Buscamos incorporar esta información directamente a la ecuación de movimiento para el tercer cuerpo, para ello se pueden construir las ecuaciones canónicas de Hamilton mediante la expresión (2.1.7), las cuales nos quedan:

$$\dot{P} = -\frac{\partial H_J}{\partial r} = \nabla\phi(r) - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}) \quad (2.1.9)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P} = \mathbf{P} - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.1.10)$$

Derivemos con respecto al tiempo esta segunda expresión para obtener una nueva forma de la aceleración:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}} - \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

podemos simplificar la expresión anterior si sustituimos (2.1.9) y utilizamos la identidad

$$\nabla[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})] = \nabla[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

así, la aceleración nos queda:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} - (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}})$$

Como vemos, en la ecuación podemos eliminar  $\mathbf{P}$  dado a que  $\mathbf{P} = \dot{\mathbf{x}}$  y nos queda:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \nabla\phi - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

Usamos la identidad del doble producto vectorial en la expresión  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.1.11)$$

para reescribir la aceleración como:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) + \Omega^2 \mathbf{r}, \quad (2.1.12)$$

(2.1.12) tiene la expresión  $-2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}})$ , que corresponde a la fuerza de Coriolis y  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$  es la fuerza centrífuga. Dado que queremos la aceleración en términos del potencial efectivo, podemos tomar el gradiente de la ecuación (2.1.8)

$$\nabla\phi_{eff} = \nabla\phi - \Omega^2 \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}),$$

y así simplificar (2.1.12), sustituyendo  $\nabla\phi$  de la expresión del gradiente del potencial efectivo, para escribir:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi_{eff} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (2.1.13)$$

Si comparamos (2.1.3) con (2.1.13):

$$-\nabla\phi_{eff} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{\mathbf{F}_{\mathbf{T}\mathbf{L}}}{m} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

El término de Coriolis desaparece y el gradiente del potencial efectivo queda en términos de la fuerza de interacción gravitacional del sistema Tierra-Luna y la fuerza centrífuga, sustituyendo  $\mathbf{F}_{\mathbf{T}\mathbf{L}}$  y usando (2.1.11) para el término de la fuerza centrífuga, nos queda:

$$\nabla\phi_{eff} = G\frac{M_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_T)^{3/2}} + G\frac{M_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L)^{3/2}} + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) - \Omega^2\mathbf{r},$$

Como el movimiento de la partícula se encuentra restringido al plano XY y su velocidad angular es constante, se tienen las siguientes coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ \boldsymbol{\Omega} &= \Omega\hat{k}. \end{aligned}$$

Al usar estas coordenadas el término  $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})$  desaparecerá.

Mientras que las expresiones  $\mathbf{r}_T$  y  $\mathbf{r}_L$  pueden, según la la Figura 2.1, puede escribirse en este mismo sistema cartesiano como

$$\mathbf{r}_T = -r_T\hat{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_L = r_L\hat{i}.$$

Si consideramos movimiento circular de la Tierra y la Luna alrededor del CM, podemos escribir la distancia Tierra-Luna como

$$R = r_T + r_L,$$

pero recordemos que en el CM hemos colocado el origen, por lo que

$$-m_T\mathbf{r}_T + m_L\mathbf{r}_L = 0.$$

Como los vectores  $\mathbf{r}_T$  y  $\mathbf{r}_L$  están ambos en el eje x (de la Figura 2.1), la expresión anterior nos permite encontrar una relación entre sus magnitudes:

$$r_T = \frac{m_L}{m_T}r_L.$$

Con esta relación podemos encontrar una relación entre  $r_L$  y la distancia Tierra-Luna,  $R$ :

$$R = \frac{m_T + m_L}{m_T} r_L \quad \text{o bien} \quad r_L = \frac{m_T}{m_T + m_L} R \quad (2.1.14)$$

y de aquí una relación entre  $r_T$  y la distancia Tierra-Luna:

$$r_T = \frac{m_L}{m_T + m_L} R \quad (2.1.15)$$

Con estas relaciones entre las distancias, podemos escribir los vectores de posición de la Tierra y la Luna como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_T &= -\beta R \hat{i} \\ \mathbf{r}_L &= \alpha R \hat{i}, \end{aligned}$$

donde hemos definido:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m_T}{m_T + m_L} \\ \beta &= \frac{m_L}{m_T + m_L}. \end{aligned}$$

En particular, para el sistema Tierra-Luna las razones de masa son:  $\alpha = 0.98785$  y  $\beta = 0.01215$ .

Con los elementos obtenidos se reescribe  $\nabla\phi_{eff}$  de la siguiente manera:

$$\nabla\phi_{eff} = -\Omega^2(x\hat{i} + y\hat{j}) + G \frac{m_T[(x + \beta R)\hat{i} + y\hat{j}]}{((x + \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} + G \frac{M_L[(x - \alpha R)\hat{i} + y\hat{j}]}{((x - \alpha R)^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Para eliminar de esta expresión la constante gravitacional, y quedarnos en términos de las propiedades del sistema ( $m_T$ ,  $m_L$  y  $\Omega$ ) podemos usar la tercera ley de Kepler, considerando para la distancia del semieje mayor a la distancia,  $R$ , y que la velocidad angular esta dada por  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ , lo cual nos provee de una relación deseada entre las propiedades del sistema:

$$\Omega^2 R^3 = G(M_T + M_L).$$

Con esta última relación podemos reescribir el gradiente del potencial efectivo,  $\nabla\phi_{eff}$ :

$$\nabla\phi_{eff} = \Omega^2 \left( -(x\hat{i} + y\hat{j}) + \frac{\alpha R^3[(x + \beta R)\hat{i} + y\hat{j}]}{((x + \beta R)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{\beta R^3[(x - \alpha R)\hat{i} + y\hat{j}]}{(x - \alpha R)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

factorizamos  $R$  del gradiente del potencial efectivo y podemos definir las siguientes variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{R} \quad y \quad Y = \frac{y}{R}.$$

Así, el potencial efectivo se puede escribir como:

$$\nabla\phi_{eff} = \Omega^2 R \left( -(X\hat{i} + Y\hat{j}) + \frac{\alpha[(X + \beta)\hat{i} + Y\hat{j}]}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta[(X - \alpha)\hat{i} + Y\hat{j}]}{(X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}} \right).$$

Conviene también dividir entre la velocidad angular y la distancia Tierra-Luna,  $\nabla\Phi_{eff} = \frac{\nabla\phi_{eff}}{\Omega^2 R}$ , para escribir la forma adimensional del el gradiente potencial efectivo:

$$\nabla\Phi_{eff} = -(X\hat{i} + Y\hat{j}) + \frac{\alpha[(X + \beta)\hat{i} + Y\hat{j}]}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta[(X - \alpha)\hat{i} + Y\hat{j}]}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}}$$

En esta expresión podemos identificar una componente paralela al vector  $\hat{i}$  y otra al vector  $\hat{j}$ ; en cada una de ellas usamos la siguiente integral para obtener el potencial:

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Al integrar en cada una de las direcciones obtenemos expresiones complementarias para el potencial efectivo:

$$\Phi_{eff}(x, y)_i = -\frac{1}{2}X^2 - \frac{\alpha}{\sqrt{(X + \beta)^2 + Y^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{(X - \alpha)^2 + Y^2}} + f(Y)$$

$$\Phi_{eff}(x, y)_j = -\frac{1}{2}Y^2 - \frac{\alpha}{\sqrt{(X + \beta)^2 + Y^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{(X - \alpha)^2 + Y^2}} + g(X),$$

las cuales incorporamos en una sola expresión para el potencial completo:

$$\Phi_{eff}(x, y) = -\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{(X + \beta)^2 + Y^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{(X - \alpha)^2 + Y^2}}. \quad (2.1.16)$$

Graficamos las curvas de nivel para este potencial en la Figura 2.2.

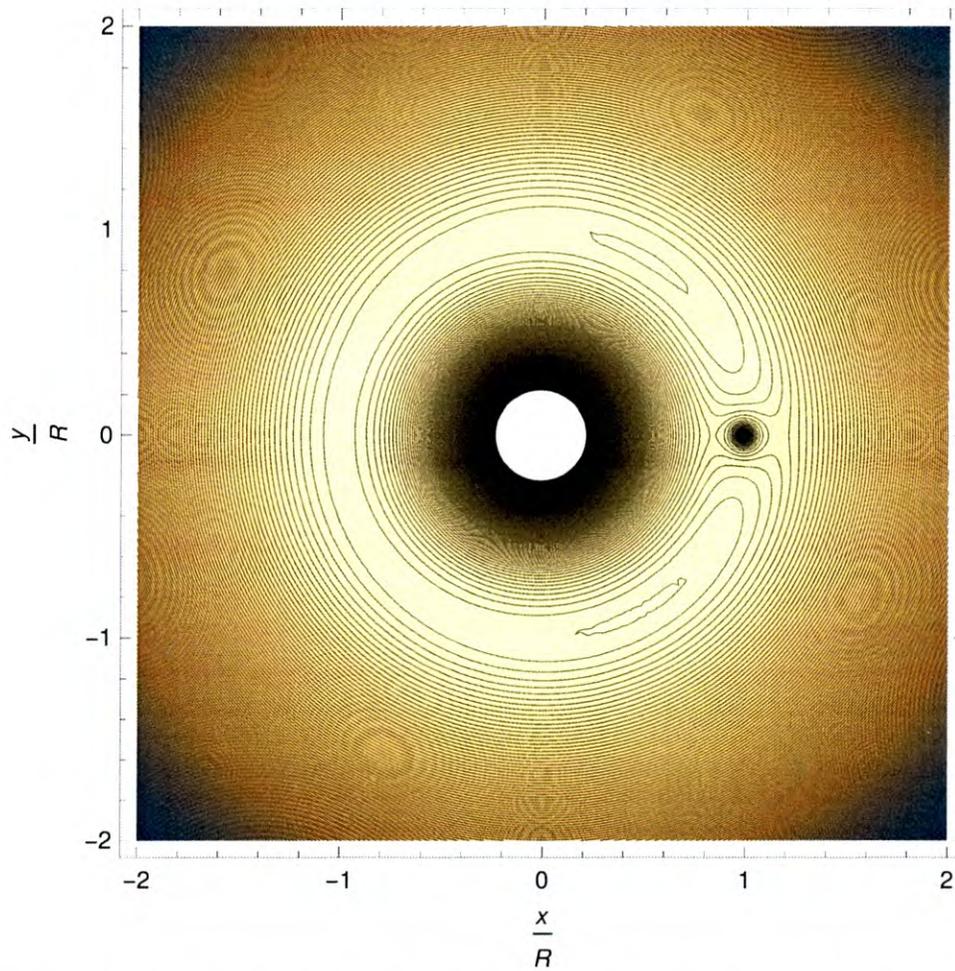


Figura 2.2: Curvas de nivel para el potencial efectivo del sistema Tierra-Luna

La gráfica de las curvas de nivel nos muestra los valores que tiene el potencial efectivo. En el centro de la gráfica (círculo blanco) se localiza la Tierra, mientras que en el círculo más pequeño (negro) se localiza la Luna. Podemos ver claramente que el eje  $x$  representa un eje de simetría para el potencial. La propia gráfica nos impulsa a encontrar puntos críticos en el potencial, tanto en el eje de simetría como alrededor del valor  $x = .5$ . Así como en el caso para el problema de campo central, Figura 1.2, este potencial nos permite describir, al menos de forma cualitativa, los movimientos esperados para el tercer cuerpo.

## 2.2. Puntos de Lagrange

De la figura 2.2, podemos asegurar que el potencial efectivo tendrá puntos críticos (o estacionarios). En particular para el problema de tres cuerpos restringido, estos puntos se denominan puntos de liberación o puntos de Lagrange, los cuales son puntos de equilibrio donde la fuerza gravitacional que ejercen los tres cuerpos están en equilibrio con la fuerza centrífuga. Nos interesa conocer donde se sitúan, ya que alrededor de ellos puede darse lugar movimiento interesante. [Carroll and Ostlie, 2007]

Los puntos de Lagrange se pueden calcular al obtener los puntos críticos del potencial efectivo. Recordando la definición de un punto critico [Larson and Edwards, 2010]:

“Sea  $f$  una región abierta  $R$  que contiene  $(x_o, y_o)$ . El punto  $(x_o, y_o)$  es un punto critico de  $f$  si se satisface una de la siguientes condiciones:

- $f_x(x_o, y_o) = 0$  y  $f_y(x_o, y_o) = 0$
- $f_x(x_o, y_o)$  o  $f_y(x_o, y_o)$  no existe ”

A los puntos críticos también se le conoce como puntos estacionarios.

Ya que el gradiente del potencial efectivo tiene los elementos:

$$\nabla\Phi_{eff} = \left( \frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial y}, 0 \right)$$

Por lo tanto para obtener los puntos de Lagrange nos queda resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que existen dos expresiones a resolver para los puntos críticos, una en la dirección  $\hat{i}$  y otra en  $\hat{j}$ :

$$-X + \frac{\alpha(X + \beta)}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta(X - \alpha)}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}} = 0 \quad (2.2.17)$$

$$-Y + \frac{\alpha Y}{(X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta Y}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}} = 0 \quad (2.2.18)$$

Dada la simetría que presenta el potencial efectivo, existen dos familias de puntos de Lagrange; una con  $Y = 0$  y otra en la que  $X \neq 0$  y  $Y \neq 0$ .

Empecemos por la primera de estas familias. Como estamos en el caso  $Y = 0$ , sobrevive solo la expresión (2.2.17) en la cual realizamos el cambio de variable  $X = (u + \alpha)$ , por lo tanto nos queda:

$$-(u + \alpha) + \frac{\alpha(u + \alpha + \beta)}{((u + \beta + \alpha)^2)^{3/2}} + \frac{\beta u}{(u^2)^{3/2}} = 0,$$

Podemos simplificar la expresión anterior sumando la razón de masa  $\alpha + \beta = 1$  y nos queda:

$$-(u + \alpha) + \frac{\alpha(u + 1)}{((u + 1)^2)^{3/2}} + \frac{\beta u}{(u^2)^{3/2}} = 0,$$

los términos en el denominador se puede expresar mediante la función signo

$$S_0 = \frac{u}{(\sqrt{u})^2} \quad \text{y} \quad S_1 = \frac{(u + 1)}{(\sqrt{u + 1})^2},$$

y la condición para los puntos críticos de la primera familia queda:

$$-(u + \alpha)(u + 1)^2 u^2 + \alpha S_1^3 u^2 + \beta S_0^3 (u + 1) = 0. \quad (2.2.19)$$

Si agrupamos los valores posibles de  $S_0$  y  $S_1$  en parejas,  $(S_0, S_1)$  y ponemos cuidado en su forma específica dada renglones arriba, encontramos que son permitidos los siguientes casos:  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$ . Procedemos a resolver las correspondientes ecuaciones de quinto grado y obtenemos los resultados mostrados en la tabla 2.1

Caso	raíz $u_1$	raíz $u_2$	raíz $u_3$	raíz $u_4$	raíz $u_5$
(1,1)	-1.49325	-1.49325	-0.0803844	-0.0803844	0.159413
	-0.861304i	0.861304i	-0.138519i	0.138519i	
(-1,-1)	-1.99088	-0.5000076	-0.5000076	0.00159007	0.00159007
		-0.858939i	0.858939i	-0.0785849i	0.0785849i
(-1,1)	-1.4946	-1.4946	-0.159337	0.0803463	0.0803463
	-0.863671i	0.863671i		-0.138332i	0.138332i

Tabla 2.1: Raíces posibles para obtener los puntos críticos de la familia 1 con  $Y = 0$ .

En cada caso, las únicas raíces que se tomarían en cuenta son aquellas que contiene un término real, ya que  $u$  debe representar una distancia única. De esta manera, nos quedamos con  $u_1$ , para el caso  $(S_0, S_1) = (-1, -1)$ ;  $u_3$ , para  $(S_0, S_1) = (-1, 1)$  y  $u_5$ , para  $(S_0, S_1) = (1, 1)$ . Sustituyendo estos valores en el cambio de variable,  $X = u + \alpha$ , la posición de cada uno de los puntos de Lagrange de la familia 1 son:

$$L1 = (-1.00303, 0)$$

$$L2 = (1.14726, 0)$$

$$L3 = (0.82851, 0)$$

Ahora para la familia 2 con  $X \neq 0$  y  $Y \neq 0$ , partimos de (2.2.17) y (2.2.18) :

$$-X + \frac{\alpha(X + \beta)}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta(X - \alpha)}{((X - \alpha) + Y^2)^{3/2}} = 0,$$

$$-1 + \frac{\alpha}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta}{((X - \alpha) + Y^2)^{3/2}} = 0,$$

realizando los siguientes cambios de variable:

$$W = X + \beta \quad \text{y} \quad Z = X - \alpha.$$

(2.2.17) y (2.2.18) quedan de la siguiente forma:

$$-X + \frac{\alpha W}{(W^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta Z}{(Z^2 + Y^2)^{3/2}} = 0, \quad (2.2.20)$$

$$-1 + \frac{\alpha}{(W^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\beta}{(Z + Y^2)^{3/2}} = 0, \quad (2.2.21)$$

Multiplicando la segunda ecuación por  $W$  y restamos la primera, nos queda la siguiente expresión:

$$-X + W + \frac{\beta(Z - W)}{(Z^2 + Y^2)^{3/2}} = 0,$$

desarrollando el álgebra, nos lleva a una expresión para  $Y$

$$Y = \sqrt{(-\alpha - \beta)^{2/3} - Z^2}. \quad (2.2.22)$$

El valor de  $X$  se puede obtener si multiplicamos por  $Z$  en (2.2.21) y restando con (2.2.20)

$$-X + Z + \frac{\alpha(W - Z)}{(W^2 + Y^2)^{3/2}} = 0$$

reduciendo el término queda la expresión

$$(\beta + \alpha)^{2/3} = W^2 + Y^2$$

Elevando al cuadrado (2.2.22) y sustituyendo en la ecuación anterior

$$(\beta + \alpha)^{2/3} = W^2 + (-\alpha - \beta)^{2/3} - Z^2$$

Sustituyendo en la expresión los cambios de de las variables  $W$  y  $Z$ , nos queda en término de  $X$ :

$$X = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2(\beta + \alpha)}. \quad (2.2.23)$$

Sustituyendo el valor de  $X$ , (2.2.22) queda de la siguiente forma :

$$Y = \pm \sqrt{(-\alpha - \beta)^{2/3} - \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2(\beta + \alpha)} - \alpha\right)^2}. \quad (2.2.24)$$

Al introducir los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  en (2.2.23) y (2.2.24) nos quedan los puntos de Lagrange de la segunda familia en la siguiente posición:

$$L4 = (0.48785, 0.866025)$$

$$L5 = (0.48785, -0.866025).$$

En la Figura 2.3 hemos sobrepuesto los valores obtenidos de  $L1$ ,  $L2$ ,  $L3$ ,  $L4$  y  $L5$  en las curvas de nivel del potencial efectivo.

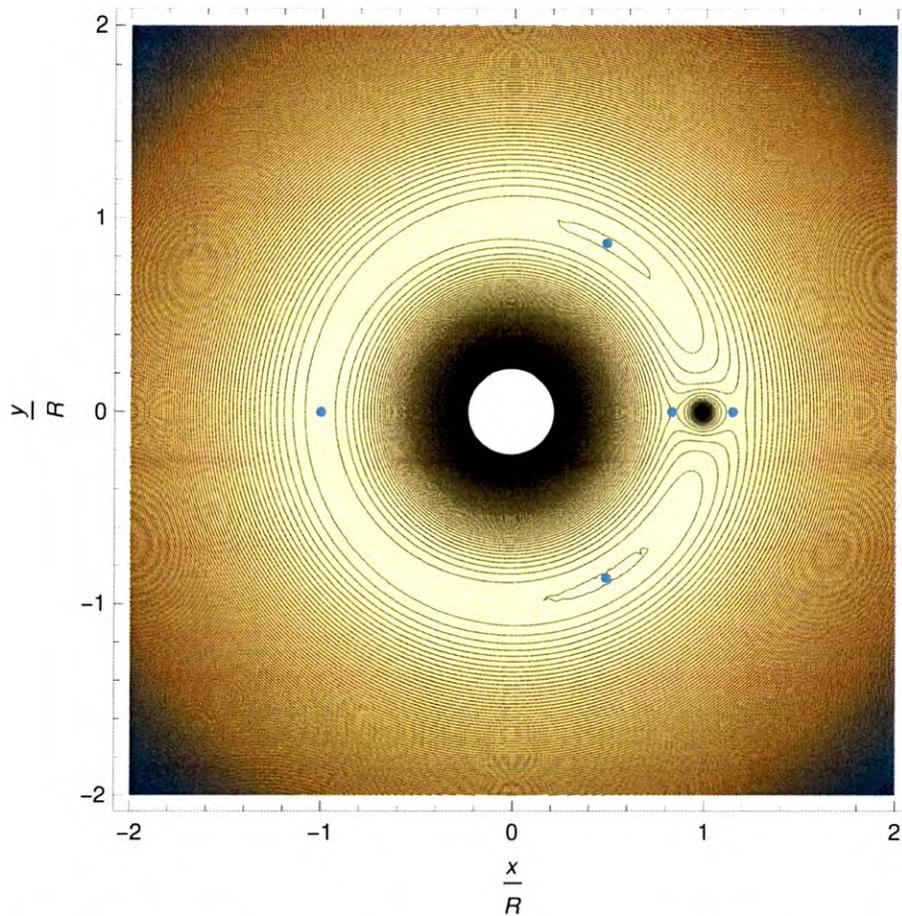


Figura 2.3: Posición de los puntos de Lagrange en la gráfica del potencial efectivo.

Con estos resultados, podemos adaptar la interpretación que hicimos para el caso de una partícula en el campo central de otra, Figura 1.2. En este caso, los puntos de Lagrange señalan regiones espaciales donde podemos anticipar el tipo de órbitas posibles. De lo que aprendimos para el caso de dos cuerpos, esperamos que, alrededor de los mínimos en el potencial existan órbitas ligadas, mientras que alrededor de los máximos o puntos silla las órbitas sean abiertas. Por esta razón es importante clasificar los 5 puntos encontrados para poder asegurar como será el movimiento en la vecindad de cada uno de ellos.

# Capítulo 3

## Estabilidad de los puntos de Lagrange

En este capítulo se analizará la estabilidad de los puntos de Lagrange para el sistema formado por la Tierra, la Luna y un tercer cuerpo de masa pequeña, comparada con los anteriores. Para ello usaremos el criterio de las segundas derivadas, lo cual, en principio, nos debería permitir verificar si son estables o no. Encontraremos que será necesario un análisis mayor de los movimientos posibles alrededor de los puntos de Lagrange para verificar la estabilidad de  $L_4$  y  $L_5$ .

### 3.1. Máximos, mínimos y puntos silla

“Sea  $f$  una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto  $(a,b)$  para el cual

$$f_x(a, b) = 0 \text{ y } f_y(a, b) = 0$$

para buscar los extremos relativos de  $f$ , considérese la cantidad

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- Si  $d > 0$  y  $f_{xx} > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(a,b)$ .
- Si  $d > 0$  y  $f_{xx} < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(a,b)$ .

- Si  $d < 0$ , entonces  $(a, b, f(a, b))$  es un punto silla.
- Si  $d = 0$  el criterio no lleva a ninguna conclusión.” [Larson and Edwards, 2010]

Para poder aplicar el criterio de la segunda derivada, derivamos de nuevo las expresiones (2.2.17) y (2.2.18):

$$\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial X^2} = -1 + \frac{\beta}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\alpha}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} - \frac{3\alpha(X + \beta)^2}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{5/2}} - \frac{3\beta(X - \alpha)^2}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial Y^2} = -1 + \frac{\beta}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{3/2}} + \frac{\alpha}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{3/2}} - \frac{3\alpha Y^2}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{5/2}} - \frac{3\beta Y^2}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{5/2}},$$

Mientras que su derivada mixta parcial es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial X \partial Y} = \frac{-3\beta Y(X - \alpha)}{((X - \alpha)^2 + Y^2)^{5/2}} - \frac{-3\alpha Y(X + \beta)}{((X + \beta)^2 + Y^2)^{5/2}}$$

Para simplificar la notación de estas expresiones, cambiaremos los símbolos de derivada por subíndices de la siguiente forma:  $\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial X^2} = \Phi_{xx}(a, b)$  y  $\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial Y^2} = \Phi_{yy}(a, b)$ . En la tabla 3.1 hemos resumido los resultados de sustituir los valores particulares de las coordenadas de cada punto de Lagrange en las diferentes expresiones para el criterio de las segundas derivadas.

Punto de Lagrange	$\Phi_{xx}(a, b)$	$\Phi_{yy}(a, b)$	$\Phi_{xy}(a, b)$	d
L1	-3.03384	0.0169195	0	-0.051331
L2	-8.26666	2.63333	0	-21.7688
L3	-10.3327	3.66636	0	-37.8834
L4	-0.750001	-2.25	-1.26747	0.0810171
L5	-0.750001	-2.25	-1.26747	0.0810171

Tabla 3.1: Criterio de las segundas derivadas de los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna

Los resultados de la tabla 3.1 permiten las siguientes conclusiones:

- El valor de  $d$  obtenido en los puntos  $L1$ ,  $L2$  y  $L3$  es negativo, por lo que todos ellos son puntos silla del potencial y en principio, corresponden a puntos inestables.
- Para los puntos  $L4$  y  $L5$  el valor de  $d$  es positivo y  $\Phi_{xx}(a, b)$  es negativo por lo tanto son máximos, en principio también corresponden a puntos inestables del potencial.

Así, estos criterios nos llevarían a asegurar que para este potencial no podemos encontrar puntos estables.

### 3.2. Movimiento de una partícula en la vecindad de los puntos de Lagrange

A pesar de que el criterio usado no nos permite encontrar puntos de equilibrio estables, en la literatura podemos encontrar un gran número de referencias a que los puntos  $L4$  y  $L5$  son estables (ver, por ejemplo, el libro de dinámica de galaxias [Binney and Tremaine, 2008]). Por otra parte, para el caso Sol-Tierra, en el cual podríamos repetir un ejercicio muy similar, también se encuentran puntos, a pesar de ser máximos del potencial efectivo, son estables; de hecho, existe al menos un proyecto internacional en el cual se planea colocar un instrumento científico en uno de ellos, aprovechando la estabilidad de las órbitas alrededor de este punto [Danzmann, 2018].

Por la razón anterior, buscamos reconsiderar la estabilidad de los puntos de Lagrange, para ello analizamos una pequeña perturbación en la vecindad de cada uno de ellos.

Empecemos por considerar un pequeño desplazamiento en la ubicación del tercer cuerpo alrededor de los puntos de liberación. Describimos el desplazamiento desde el punto de Lagrange particular,  $\mathbf{P}_L = (x_L, y_L)$ , a lo largo de cada uno de los ejes

de movimiento mediante las siguientes nuevas variables:

$$\xi = x - x_L,$$

$$\eta = y - y_L.$$

Partiremos ahora de la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi_{eff} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}),$$

en esta ocasión, desarrollamos el potencial efectivo  $\Phi_{eff}$ , en series de potencias alrededor de  $(x_L, y_L)$ ; asumiendo que podemos considerar que el movimiento puede considerarse como una pequeña perturbación alrededor de este punto:

$$\begin{aligned} \Phi_{eff}(x, y) = \Phi_{eff}(x_L, y_L) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x^2} \right)_{P_L} (x - x_L)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial y^2} \right)_{P_L} (y - y_L)^2 + \\ \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x \partial y} \right)_{P_L} (x - x_L)(y - y_L) + \dots \end{aligned}$$

Por tratarse de un punto de equilibrio, vamos a considerar que las perturbaciones  $(\xi, \eta)$  son pequeñas. La primera consideración nos permite asegurar que las derivadas a primer orden se anulan, la segunda consideración implica que podemos quedarnos a segundo orden en las derivadas. Tomando el gradiente del potencial efectivo bajo esta suposiciones encontramos:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi_{eff}(x, y) = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x^2} \right)_{P_L} (x - x_L)\hat{i} + \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial y^2} \right)_{P_L} (y - y_L)\hat{j} + \\ \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x \partial y} \right)_{P_L} (x - x_L)\hat{j} + \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x \partial y} \right)_{P_L} (y - y_L)\hat{i}, \end{aligned}$$

y, para simplificar la notación, vamos a definir:

$$\Phi_{xx} = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x^2} \right)_{P_L}, \quad \Phi_{yy} = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial y^2} \right)_{P_L} \quad y \quad \Phi_{xy} = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial x \partial y} \right)_{P_L}$$

Desde el capítulo 2 hemos utilizado coordenadas cartesianas, ahí consideramos que los movimientos están restringidos al plano  $xy$ , mientras que el momento angular es perpendicular a ambas coordenadas,  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{k}$ , así que el segundo término en la aceleración se puede escribir como  $-2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = 2\Omega\dot{y}\hat{i} - 2\Omega\dot{x}\hat{j}$ . Con estos elementos podemos reescribir  $\ddot{\mathbf{r}}$

$$\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = -\Phi_{xx}(x - x_L)\hat{i} - \Phi_{yy}(y - y_L)\hat{j} - \Phi_{xy}(y - y_L)\hat{i} - \Phi_{xy}(x - x_L)\hat{j} + 2\Omega\dot{y}\hat{i} - 2\Omega\dot{x}\hat{j},$$

Expresando la ecuación anterior en términos de  $\xi$  y  $\eta$

$$\ddot{\xi}\hat{i} + \ddot{\eta}\hat{j} = -(\Phi_{xx}\xi - \Phi_{xy}\eta + 2\Omega\dot{\eta})\hat{i} + (-\Phi_{yy}\eta - \Phi_{xy}\xi - 2\Omega\dot{\eta})\hat{j} \quad (3.2.1)$$

Esta aceleración contiene de manera explícita la magnitud de la velocidad angular, misma que, en las unidades que hemos usado hasta ahora se mide  $\Omega[=]\frac{1}{Tiempo}$ . Recordando que las expresiones se simplifican cuando eliminamos las unidades, cambiaremos la unidad de tiempo de la siguiente manera:

$$\tilde{t} = \Omega t.$$

Aprovechamos el momento para señalar que, dada la velocidad angular promedio de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra,  $V_o = 1.022\text{kms}^{-1}$ , la distancia promedio Tierra-Luna,  $R = 3.844 \times 10^5\text{km}$  y su relación con la velocidad angular,  $V_o = R\Omega$ , la unidad de tiempo en segundos es:  $\frac{1}{\Omega} = 4.231 \times 10^{-7}\text{s}$ .

Así, en términos de variables adimensionales, las aceleraciones para la perturbación en cada uno de los ejes (3.2.1) queda:

$$\ddot{\xi} + \Phi_{xx}\xi = -\Phi_{xy}\eta + 2\dot{\eta}, \quad (3.2.2)$$

$$\ddot{\eta} + \Phi_{yy}\eta = -\Phi_{xy}\xi - 2\dot{\xi}. \quad (3.2.3)$$

El sistema de ecuaciones (3.2.2), (3.2.3) nos permite describir completamente la perturbación del punto de equilibrio. Notemos que hemos separado el movimiento en las direcciones  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , sin embargo las ecuaciones no son independientes, en ambos casos del lado derecho tenemos dependencia en una de las variables mientras que en el izquierdo de la complementaria. No obstante, este par de ecuaciones diferenciales, es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden y homogéneo, la manera más sencilla de resolverlo es transformar el sistema de segundo orden a uno de primer orden; logramos lo anterior mediante los siguiente cambios de variable:

$$\begin{aligned} X_1 &= \xi & X_3 &= \eta \\ X_2 &= \dot{\xi} & X_4 &= \dot{\eta}. \end{aligned}$$

Para el procedimiento que estamos a punto de realizar nos conviene la notación más compacta posible, por ello ahora vamos a simplificar una vez más y definir

$\Phi_{xx} = a$ ,  $\Phi_{yy} = b$  y  $\Phi_{xy} = c$ . Así, considerando el cambio de variable y las definiciones realizadas, transformamos el sistema en (3.2.2), (3.2.3) por el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -aX_1 - cX_3 + 2X_4 \\ \dot{X}_3 &= X_4 \\ \dot{X}_4 &= -bX_3 - cX_1 - 2X_2.\end{aligned}$$

En el sistema anterior reconocemos la denominada *forma normal de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden*, el cual se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_2 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}$$

Cuando  $f_i(t) = 0$  se le considera al sistema lineal como homogéneo, mientras que si  $f_i(t) \neq 0$ , el sistema lineal es no homogéneo. Se puede cambiar de la forma normal a una forma matricial definiendo el siguiente vector [Zill, 2009]:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix},$$

Así el sistema de ecuaciones lineales tiene la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X} \tag{3.2.4}$$

Donde *la matriz de coeficientes*,  $\mathbf{M}$ , contiene la información específica al sistema, en este caso:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c & -2 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver el sistema empezamos por calcular los eigenvalores de la matriz  $\mathbb{M}$ , entonces:

$$|\lambda\mathbb{I} - \mathbb{M}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -2 & b & \lambda \end{vmatrix},$$

después de obtener la determinante y simplificar queda la siguiente ecuación característica para la matriz  $\mathbb{M}$ :

$$\lambda^4 + (4 + a + b)\lambda^2 + ab - c^2 = 0,$$

obtenemos las raíces de este polinomio mediante el cambio de variable  $\sigma = \lambda^2$ , por lo que el polinomio a resolver es:

$$\sigma^2 + (4 + a + b)\sigma + ab - c^2,$$

y sus raíces son:

$$\sigma_{\pm} = \frac{-(4 + a + b) \pm \sqrt{(4 + a + b)^2 - 4ab}}{2},$$

por lo tanto los eigenvalores de la matriz de coeficientes son:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-(4 + a + b) \pm \sqrt{(4 + a + b)^2 - 4ab}}{2}}.$$

En la tabla 3.2 mostramos los resultados de sustituir los valores de las segundas derivadas del potencial efectivo evaluadas en los puntos de Lagrange. Con ellos obtenemos las raíces de la ecuación característica específicos para nuestro problema. En la tabla podemos leer directamente los resultados obtenidos. En los puntos  $L1, L2$  y  $L3$  se tienen dos raíces reales y dos puramente imaginarias, mientras que las raíces de los puntos  $L4$  y  $L5$  son puramente imaginarias. En lo que sigue, para obtener las soluciones, denotamos  $\alpha_i$  para raíces reales y  $\beta_i$  para raíces puramente imaginarias.

Punto de Lagrange	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
L1	0.222939	1.01626i	-0.222939	-1.01626i
L2	1.97989i	-2.35655	-1.97989	2.35655
L3	2.22812i	-2.7624	-2.22812i	2.7624
L4	0.298213i	0.954499i	-0.298213i	-0.954499i
L5	0.298213i	0.954499i	-0.298213i	0.954499i

Tabla 3.2: Raíces de la ecuación característica para la matriz de coeficientes,  $\mathbb{M}$ .

En (3.2.4), la solución a la ecuación diferencial matricial sería la matriz exponencial, esta definida de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbb{M}t}$$

Las soluciones se pueden escribir usando el el siguiente teorema de la matriz exponencial: [Edward, 2008]

Teorema: Soluciones por matriz exponencial:

Si  $\mathbb{M}$  es una matriz de  $n \times n$ , entonces la solución del problema de valores iniciales

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{M}\mathbf{X} \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (3.2.5)$$

esta dada por

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbb{M}t}\mathbf{X}_0 \quad (3.2.6)$$

Los elementos de la matriz exponencial  $e^{\mathbb{M}t}$  son solución de EDO

$$[D^4 + (4 + a + B)D^2 + ab - c^2]\varphi(t) = 0$$

Con esto:

$$\varphi(t) = C_1^*e^{\lambda_1 t} + C_2^*e^{\lambda_2 t} + C_3^*e^{\lambda_3 t} + C_4^*e^{\lambda_4 t}$$

Como vemos, este teorema nos permite obtener las soluciones alrededor de todos los puntos de Lagrange. Empezamos para  $L1$ ,  $L2$  y  $L3$ . La matriz de la solución tiene la siguiente forma:

$$e^{\mathbb{M}t} = A\cos(\beta_1 t) + Be^{-\alpha_1 t} + C\sin(\beta_1 t) + De^{\alpha_1 t} \quad (3.2.7)$$

por lo que las soluciones se pueden escribir:

$$\varphi(t) = C_1 \cos(\beta_1 t) + C_2 e^{-\alpha_1 t} + C_3 \text{Sen}(\beta_1 t) + C_4 e^{\alpha_1 t} \quad (3.2.8)$$

(notemos aquí el uso de  $\varphi$  para denotar cualquier solución genérica y no confundirla con alguna coordenada en el sistema de estudio).

Las constantes se obtendrán partiendo de la derivada de  $e^{Mt}$  y aplicando el teorema de soluciones por matriz exponencial.

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = Ae^{At}$$

La primera derivada

$$Me^{Mt} = -\beta_1 A \text{Sen}(\beta_1 t) - \alpha_1 B e^{-\alpha_1 t} + \beta_1 C \text{Cos}(\beta_1 t) + \alpha_1 D e^{\alpha_1 t}$$

La segunda derivada

$$M^2 e^{Mt} = -\beta_1^2 A \text{Cos}(\beta_1 t) + \alpha_1^2 B e^{-\alpha_1 t} - \beta_1^2 C \text{Sen}(\beta_1 t) + \alpha_1^2 D e^{\alpha_1 t}$$

La tercera derivada

$$M^3 e^{Mt} = \beta_1^3 A \text{Sen}(\beta_1 t) - \alpha_1^3 B e^{-\alpha_1 t} - \beta_1^3 C \text{Cos}(\beta_1 t) + \alpha_1^3 D e^{\alpha_1 t}$$

Por lo tanto, haciendo  $t = 0$ , las relaciones entre matrices nos quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} I &= A + B + D \\ M &= -\alpha_1 B + \beta_1 C + \alpha D \\ M^2 &= -\beta_1^2 A + \alpha_1^2 B + \alpha_1^2 D \\ M^3 &= -\alpha_1^3 B - \beta_1^3 C + \alpha_1^3 D \end{aligned}$$

Este sistema se puede invertir, los resultados de las matrices son los siguientes:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha_1^2 I - M^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \\ B &= \frac{\alpha_1 \beta_1^2 I - \beta_1 M + \alpha_1 M^2 - M^3}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \\ C &= \frac{\alpha_1^2 M - M^3}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \\ D &= \frac{\alpha_1 \beta_1^2 I + \beta_1^2 M + \alpha_1 M^2 + M^3}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \end{aligned}$$

Donde el valor de las matrices  $\mathbb{M}^2$  y  $\mathbb{M}^3$  provienen directamente de la matriz original del sistema  $\mathbb{M}$ :

$$\mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} -a & 0 & -c & 2 \\ -2c & -a-4 & -2b & -c \\ -c & -2 & -b & 0 \\ -2a & -c & 2c & -4-b \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

$$\mathbb{M}^3 = \begin{pmatrix} 2c & -a-4 & -2b & -c \\ a^2+4a+c^2 & 0 & c(a+4)+cb & -2a-8-2b \\ 2a & -c & c^2 & 4b+b^2 \\ ac+c(4+b) & -2a+8+2b & c^2+4b+b^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.10)$$

Resolviendo las matrices constante  $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$ , con la consideración de  $c = 0$ ; éstas quedan:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + a & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \alpha_1^2 + a + 4 & 2b & 0 \\ 0 & 2 & \alpha_1^2 + b & 0 \\ -2a & 0 & 0 & \alpha_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 - \alpha_1a & -\beta_1^2 + a + 4 & 2b & 2\alpha_1 \\ \beta_1^2 - a^2 - 4a & -\alpha_1(a+4) + \alpha_1\beta_1 & -2\alpha_1b & 2\beta_1^2 + 2a + 8 + 2b \\ -2a & -2\alpha_1 & -\alpha_1b + \alpha_1b + \alpha_1\beta_1 & \beta_1^2 + 4 + b \\ 2\alpha_1a - b & 2\beta_1^2 - 2a - 8 - 2b & \beta_1^2b + 4b - b^2 & -\alpha_1(4+b) + \alpha_1\beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \frac{1}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \begin{pmatrix} \alpha_1^2a & a + 4 & +2b & 2\alpha_1 \\ -2\alpha_1^2 - a^2 - 4a & -\alpha_1^2(a+4) & -2\alpha_1^2b & +2a + 8 + 2b \\ -2a & -2\alpha_1^2 & -\alpha_1^2b & 4 + b \\ -2\alpha_1^2a & -2a - 8 - 2b & -4b - b^2 & -\alpha_1^2(4+b) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D} = \frac{1}{\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_1a & \beta_1^2 - a - 4 & -2b & 2\alpha_1 \\ -\beta_1^2a + a^2 + 4a & \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_1(a+4) & -2\alpha_1b & -2\beta_1^2 - 2a - 8 - 2b \\ +2a & -2\alpha_1 & \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_1b & \beta_1^2 - 4 - b \\ -\alpha_1a & -2\beta_1^2 + 2a + 8 + 2b & -\beta_1^2b + 4b + b^2 & \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_1(4+b) \end{pmatrix}$$

Estos resultados permiten escribir las perturbaciones de los puntos de Lagrange  $L1$ ,  $L2$  y  $L3$  en cada eje,  $\xi(t)$  y  $\eta(t)$ :

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \left[ \frac{\alpha_1^2 + a}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{\alpha_1 \beta_1^2 - \alpha_1 a}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{-\alpha_1^2 a}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{\alpha_1 \beta_1^2 - \alpha_1 a}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \xi_0 + \\ & \left[ \frac{-\beta_1^2 + a + 4}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{a + 4}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{\beta_1^2 - a - 4}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \dot{\xi}_0 + \\ & \left[ \frac{c}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{2b}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{2b}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{-2b}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \eta_0 + \\ & \left[ \frac{-2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{2\alpha_1^2}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \dot{\eta}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \left[ \frac{c}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{-\alpha_1 c - 2a}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{-\alpha_1^2 c - 2a}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{-\alpha_1 c + 2a}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \xi_0 + \\ & \left[ \frac{2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{-2\alpha_1 + c}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{-2\alpha_1^2 + c}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{-2\alpha_1 - c}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \dot{\xi}_0 + \\ & \left[ \frac{c}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{-\alpha_1 c + 2b}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{-\alpha_1^2 c + 2b}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \eta_0 + \\ & \left[ \frac{-2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{2\alpha_1 + c}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{2\alpha_1^2 + c}{\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{2\alpha_1 - c}{2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} e^{\alpha_1 t} \right] \dot{\eta}_0 \end{aligned}$$

Notemos que estas soluciones quedan completamente especificadas por los valores iniciales en  $\xi$  y  $\eta$  y sus derivadas con respecto al tiempo.

Para  $L4$  y  $L5$  las raíces que se obtuvieron fueron puramente complejas con valores distintos, ahora las denotamos como  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , la solución tiene la forma:

$$\varphi(t) = C_1 \text{Cos}(\beta_1 t) + C_2 \text{Cos}(\beta_2 t) + C_3 \text{sen}(\beta_1 t) + C_4 \text{sen}(\beta_2 t),$$

por lo que ahora la forma de la matriz exponencial proviene de la siguiente ecuación:

$$e^{\mathbb{M}t} = \mathbb{A} \cos(\beta_1 t) + \mathbb{B} \cos(\beta_2 t) + \mathbb{C} \text{sen}(\beta_1 t) + \mathbb{D} \text{sen}(\beta_2 t).$$

De nuevo aplicaremos el teorema de las soluciones de la matriz exponencial para obtener los valores de  $\xi(t)$  y  $\eta(t)$  en los puntos  $L4$  y  $L5$ .

De nuevo, derivamos hasta obtener un sistema de ecuaciones que nos permita obtener las constantes matriciales:

$$\begin{aligned}
 e^{Mt} &= A\cos(\beta_1 t) + B\cos(\beta_2 t) + C\sen(\beta_1 t) + D\sen(\beta_2 t) \\
 Me^{Mt} &= -A\beta_1\sen(\beta_1 t) - B\beta_2\sen(\beta_2 t) + C\beta_1\cos(\beta_1 t) + D\beta_2\cos(\beta_2 t) \\
 M^2e^{Mt} &= -A\beta_1^2\cos(\beta_1 t) - B\beta_2^2\cos(\beta_2 t) - C\beta_1^2\sen(\beta_1 t) - D\beta_2^2\sen(\beta_2 t) \\
 M^3e^{Mt} &= A\beta_1^3\sen(\beta_1 t) + B\beta_2^3\sen(\beta_2 t) - C\beta_1^3\cos(\beta_1 t) - D\beta_2^3\cos(\beta_2 t)
 \end{aligned}$$

De nuevo podemos aplicar las condiciones iniciales, esto es fijar  $t = 0$ , y ahora las relaciones matriciales quedan de forma más sencilla:

$$\begin{aligned}
 I &= A + B \\
 M &= C\beta_1 + D\beta_2 \\
 M^2 &= -\beta_1^2 A - \beta_2^2 B \\
 M^3 &= -\beta_1^3 C - \beta_2^3 D
 \end{aligned}$$

de donde podemos encontrar las matrices constantes:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{-\beta_2^2 I - M^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \\
 B &= \frac{\beta_1^2 I + M^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \\
 C &= \frac{\beta_2^2 M - M^3}{\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2)} \\
 D &= \frac{\beta_1^2 M + M^3}{\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2)}
 \end{aligned}$$

con (3.2.9) y (3.2.10) estas matrices quedan de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\beta_2^2 + a}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & 0 & \frac{c}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & -\frac{2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \\ \frac{2c}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & \frac{-\beta_2^2 + a + 4}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & \frac{2b}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & \frac{c}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \\ \frac{c}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & \frac{2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & \frac{-\beta_2 + b}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & 0 \\ -\frac{2a}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & \frac{c}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & -\frac{2c}{\beta_1^2 - \beta_2^2} & \frac{-\beta_2^2 + 4 + b}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2+a}{\beta_1^2-\beta_2^2} & 0 & \frac{-c}{\beta_1^2-\beta_2^2} & -\frac{2}{\beta_1^2-\beta_2^2} \\ \frac{-2c}{\beta_1^2-\beta_2^2} & \frac{\beta_1^2-a-4}{\beta_1^2-\beta_2^2} & -\frac{2b}{\beta_1^2-\beta_2^2} & -\frac{c}{\beta_1^2-\beta_2^2} \\ -\frac{c}{\beta_1^2-\beta_2^2} & \frac{2}{\beta_1^2-\beta_2^2} & \frac{\beta_1^2-b}{\beta_1^2-\beta_2^2} & 0 \\ \frac{2a}{\beta_1^2-\beta_2^2} & -\frac{c}{\beta_1^2-\beta_2^2} & \frac{2c}{\beta_1^2-\beta_2^2} & \frac{\beta_1^2-4-b}{\beta_1^2-\beta_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{2c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{-\beta_2^2+a+4}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{2b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \\ \frac{(\beta_2^2-4)a-a^2-c^2}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & 0 & \frac{(\beta_2^2-a-4-b)c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{-2\beta_2^2+2a+8+2b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \\ -\frac{2a}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & -\frac{2c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{-\beta_2+4+b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \\ \frac{\beta_2^2-a-4-b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{2\beta_2^2-2a-8-2b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & \frac{(\beta_2^2-4)b-c^2-b^2}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{2c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{-\beta_1^2+a+4}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{2b}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \\ \frac{(\beta_2^2-4)a-a^2-c^2}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & 0 & \frac{(\beta_2^2-a-4-b)c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{-2\beta_1^2+2a+8+2b}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \\ -\frac{2a}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & -\frac{2c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{-\beta_1+4+b}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \\ \frac{(\beta_2^2-a-4-b)c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{2\beta_1^2-2a-8-2b}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & \frac{(\beta_2^2-4)b-c^2-b^2}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} & 0 \end{pmatrix}$$

Estos resultados nos permiten escribir las perturbaciones desde los puntos de Lagrange  $L4$  y  $L5$  en términos de sus condiciones iniciales como sigue:

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \left[ \left( \frac{-\beta_2^2+a}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{\beta_1^2-a}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_2 t) + \frac{2c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{2c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \xi_0 + \\ & \left[ \left( \frac{-\beta_2^2+a+4}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{-\beta_1^2+a+4}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \dot{\xi}_0 + \\ & \left[ \left( \frac{c}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_1 t) - \frac{c}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_2 t) + \frac{2b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{2b}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \eta_0 + \\ & \left[ \left( \frac{-2}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{2}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_2 t) + \frac{c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \dot{\eta}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \left[ \left( \frac{c}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_1 t) - \frac{c}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_2 t) - \frac{2a}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) - \frac{2a}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \xi_0 \\ & + \left[ \left( \frac{2}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_1 t) - \frac{2}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_2 t) + \frac{c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \dot{\xi}_0 + \\ & \left[ \left( \frac{-\beta_2^2+b}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_1 t) + \frac{\beta_1^2-b}{\beta_1^2-\beta_2^2} \cos(\beta_2 t) - \frac{2c}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) - \frac{2c}{\beta_2(\beta_2^2-\beta_1^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \eta_0 + \\ & \left[ \left( \frac{-\beta_2+4+b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_1 t) + \frac{-\beta_2+4+b}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)} \text{sen}(\beta_2 t) \right) \right] \dot{\eta}_0 \end{aligned}$$

Habiendo obtenido las expresiones  $\xi(t)$  y  $\eta(t)$  para los cinco puntos de Lagrange, podemos conocer el movimiento del tercer cuerpo en la vecindad de cada uno de ellos. En lo que sigue mostramos este comportamiento para una selección de condiciones iniciales y así poder determinar la estabilidad de cada uno de los puntos.

### 3.3. Resultados

Con base en las expresiones de las funciones  $\xi$  y  $\eta$ , nos permite conocer el comportamiento de las órbitas del tercer cuerpo en cualquiera de los puntos de Lagrange, evaluando los valores de las constantes y graficando su comportamiento se puede hacer el siguiente análisis

#### 3.3.1. Puntos $L1$ , $L2$ y $L3$

Para el Punto  $L1$  escogemos una pequeña desviación del punto, es decir, con la condición inicial  $\xi_0 = 0.001$ . Las gráficas de  $\xi(t)$  y  $\eta(t)$  se muestran en la figura 3.1.

Considerando de nuevo el punto  $L1$ , probamos ahora con condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.001$  y  $\eta_0 = 0.001$ . Mostramos los resultados en la figura 3.2

En ambos casos podemos ver como una pequeña desviación del punto de equilibrio nos lleva a desviaciones cada vez mas grandes, de hecho; dadas las unidades de tiempo, podemos observar que la escala en la que escapa el tercer cuerpo de la vecindad este punto es del orden de los microsegundos. En esta situación la aproximación que hicimos de pequeñas desviaciones se vuelve inválida, sin embargo es suficiente para corroborar que el punto efectivamente es inestable.

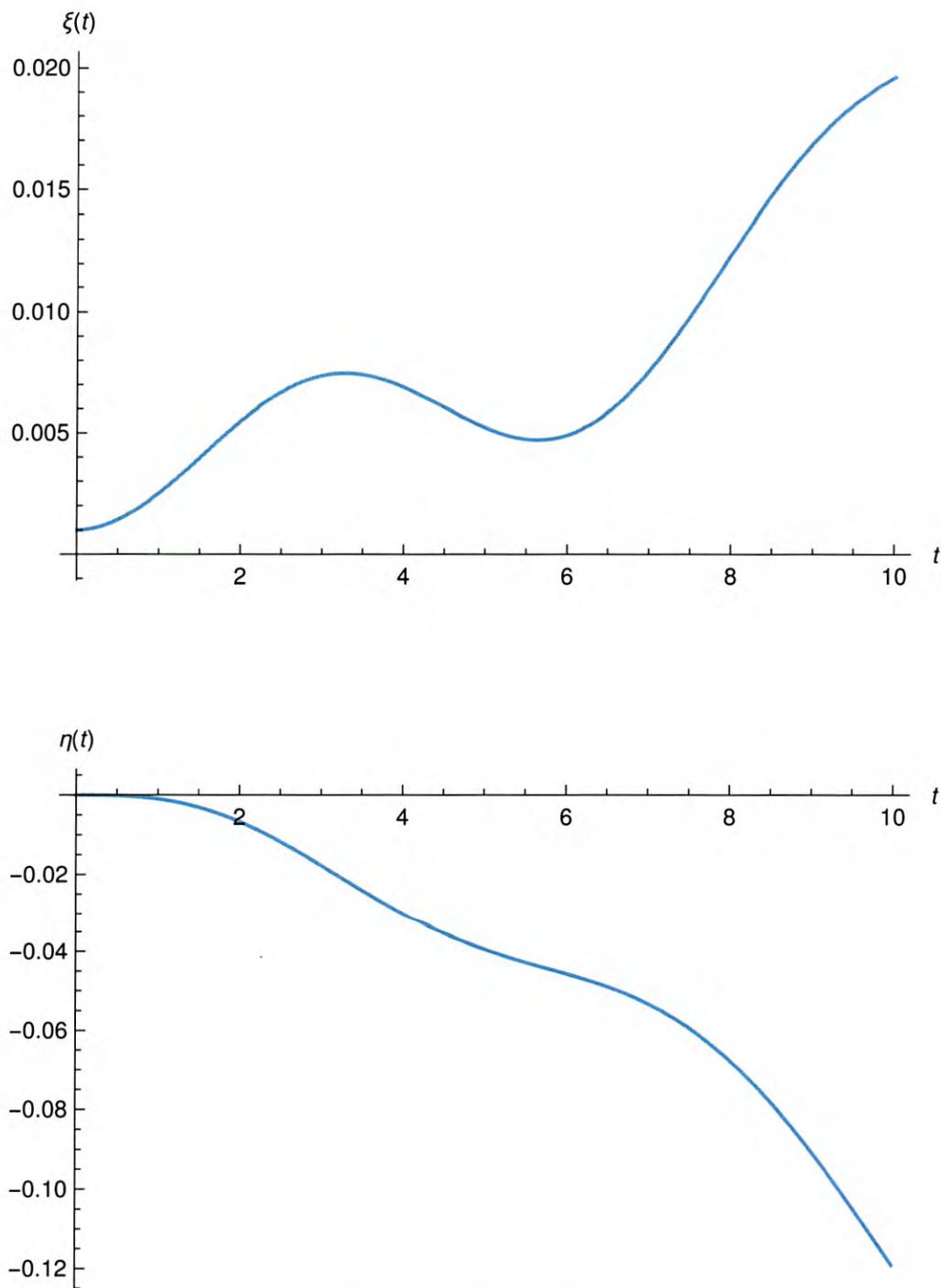


Figura 3.1: Gráficas de las funciones  $\xi$ , parte superior, y  $\eta$ , parte inferior, como funciones del tiempo. En ambos casos se fijó una pequeña desviación del punto  $L1$ , es decir, condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.001$ ,  $\eta_0 = \dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

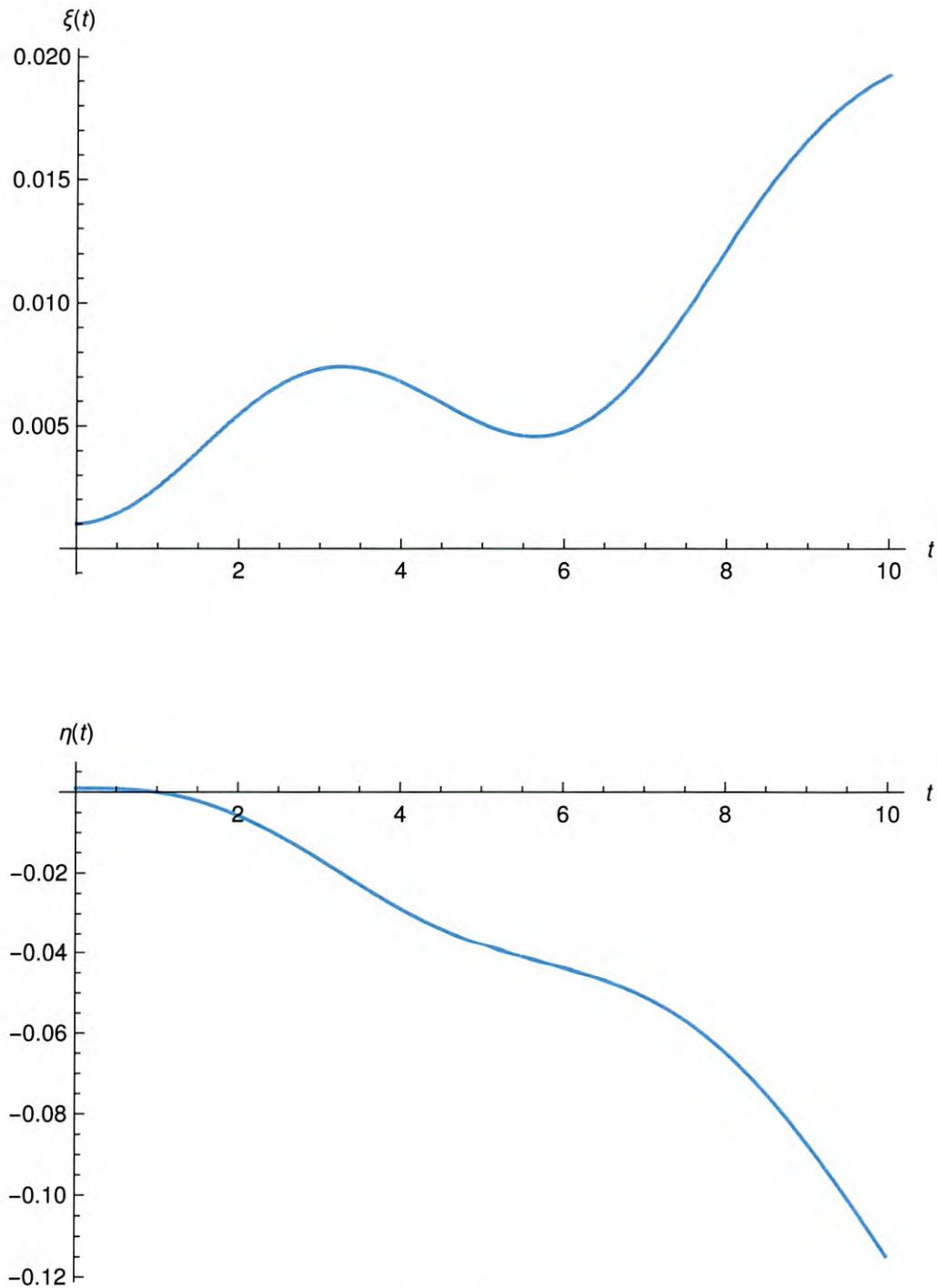


Figura 3.2: Gráficas de las funciones  $\xi$ , parte superior, y  $\eta$ , parte inferior, como funciones del tiempo. En ambos casos se fijó una pequeña desviación del punto  $L1$  en ambas direcciones del plano, es decir, condiciones iniciales  $\xi_0 = \eta_0 = 0.001$ ,  $\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

Con esta experiencia, repetimos el ejercicio para condiciones alrededor del punto  $L2$ , los resultados se muestran en las figuras 3.3 y 3.4. Después de estos y otros experimentos numéricos volvemos a verificar la inestabilidad de este punto.

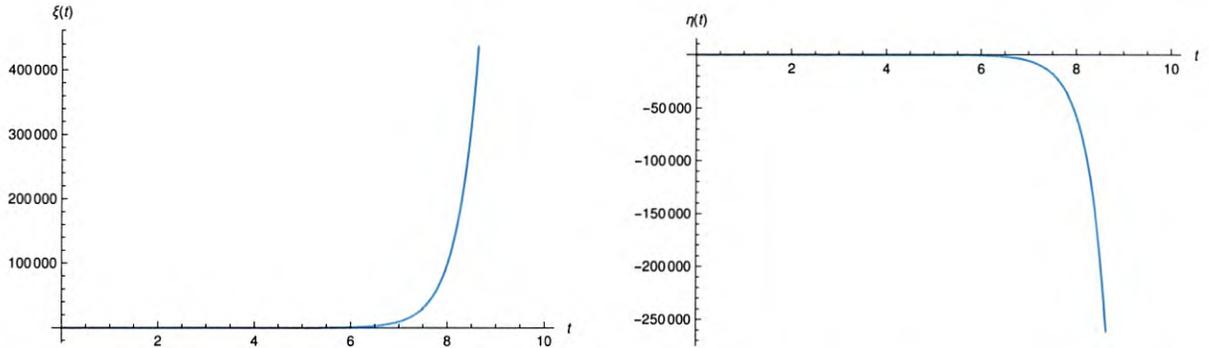


Figura 3.3: Gráficas de las funciones  $\xi$ , izquierda, y  $\eta$ , derecha, como funciones del tiempo. En ambos casos se fijó una pequeña desviación del punto  $L2$ , es decir, condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.001$ ,  $\eta_0 = \dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

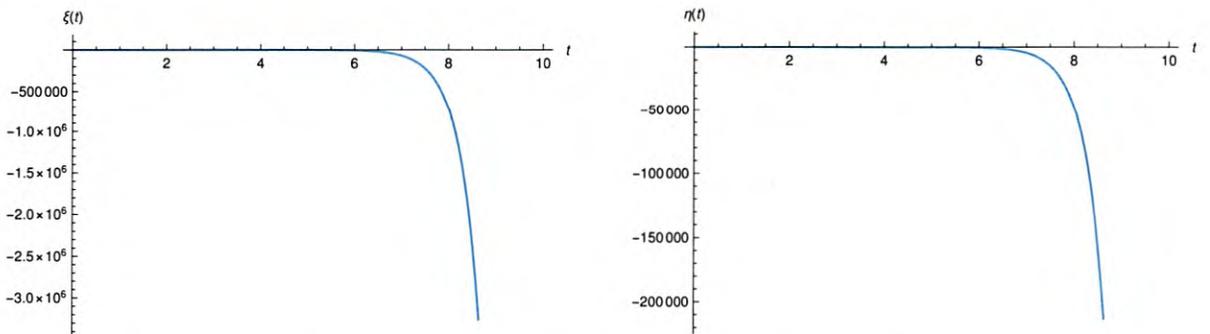


Figura 3.4: Gráficas de las funciones  $\xi$ , izquierda, y  $\eta$ , derecha, como funciones del tiempo. En ambos casos se fijó una pequeña desviación del punto  $L2$  en ambas direcciones del plano, es decir, condiciones iniciales  $\xi_0 = \eta_0 = 0.001$ ,  $\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

Para completar el estudio repetimos el ejercicio en una vecindad del punto  $L3$ , obteniendo los resultados que se muestran en las figuras 3.5 y 3.6 para las condiciones iniciales indicadas.

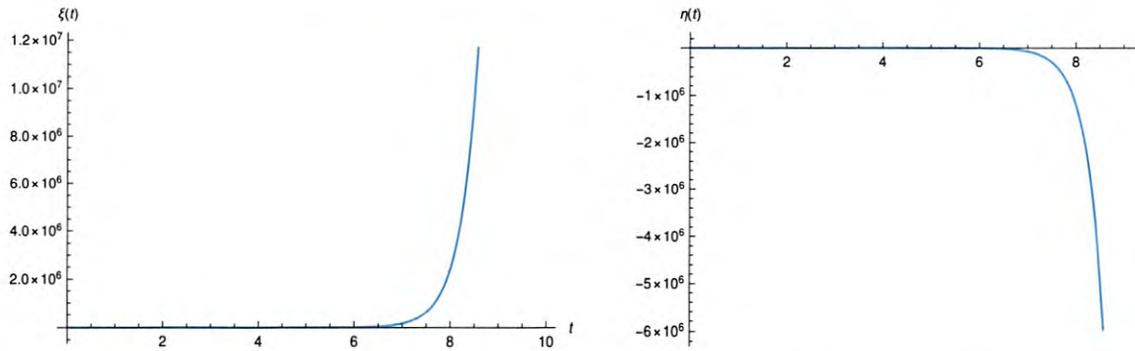


Figura 3.5: Gráficas de las funciones  $\xi$ , izquierda, y  $\eta$ , derecha, como funciones del tiempo. En ambos casos se fijó una pequeña desviación del punto  $L3$ , es decir, condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.001$ ,  $\eta_0 = \dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

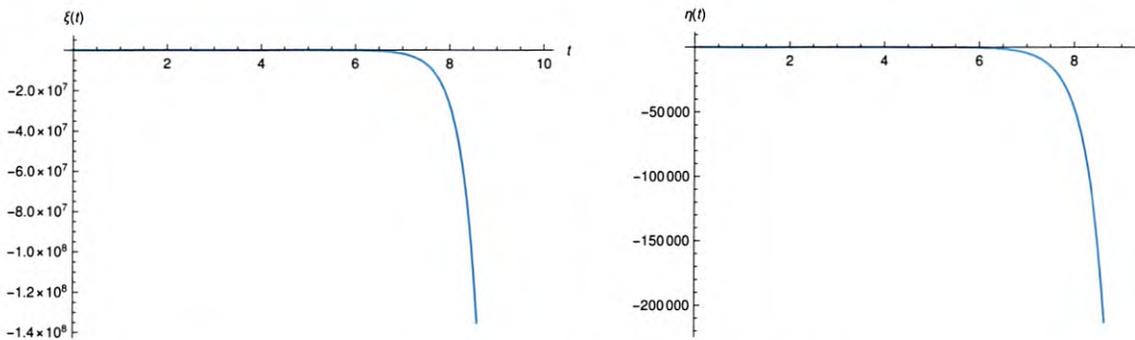


Figura 3.6: Gráficas de las funciones  $\xi$ , izquierda, y  $\eta$ , derecha, como funciones del tiempo. En ambos casos se fijó una pequeña desviación del punto  $L3$  en ambas direcciones del plano, es decir, condiciones iniciales  $\xi_0 = \eta_0 = 0.001$ ,  $\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

Notemos que para  $L2$  y  $L3$ , en una escala de tiempo del orden de los microsegundos, el tercer cuerpo se ha alejado de su separación inicial en mas de 7 órdenes de magnitud, una situación más extrema que para  $L1$ .

Con estos resultados podemos confiar en el criterio que usamos en el capítulo 2: Al ser puntos silla del potencial efectivo,  $L1$ ,  $L2$  y  $L3$  son puntos inestables y a su alrededor inmediato no existen órbitas ligadas. Cabe destacar que este resultado no elimina la posibilidad de órbitas ligadas *entre* estos puntos [The Artemis mission, 2010], pero no consideramos esos casos para este trabajo.

### 3.3.2. Puntos $L4$ y $L5$

Notemos que en el caso de estos puntos de Lagrange las soluciones para las desviaciones pequeñas resultaron idénticas, por lo tanto el análisis que hacemos es válido en ambos puntos. Empecemos con  $L4$  y una separación espacial pequeña a lo largo de una de las condiciones, esto es, la condición inicial  $\xi_0 = 0.001$ . En la gráfica 3.7 mostramos los resultados obtenidos.

Como le hemos venido haciendo, ahora probamos desviar la partícula en cada una de las direcciones del plano de movimiento imponiendo las condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.001$  y  $\eta_0 = 0.001$ . Mostramos los resultados en la figura 3.8

Por último, en un afán de exhaustividad, repetimos el ejercicio anterior para  $L5$ , usando las mismas condiciones. Graficamos los resultados en las figuras 3.9 y 3.10.

Como podemos ver, si colocamos el tercer cuerpo en una vecindad de  $L4$  o  $L5$ , resulta un movimiento periódico. En las figuras hemos graficado hasta un tiempo suficientemente largo como para notar la periodicidad tanto en  $\xi$  como en  $\eta$ . Para ambos casos podemos observar un período en el movimiento de aproximadamente  $4 \times 10^{-5}$ s, además podemos notar que la amplitud para  $\xi$  no supera 15 veces el desplazamiento inicial, mientras que para  $\eta$  la amplitud siempre es menor a 10 veces el desplazamiento inicial. Con estos resultados podemos asegurar que su movimiento estará acotado alrededor de cualquiera de estos puntos de equilibrio. Por lo tanto; a pesar de que en ellos existe un máximo del potencial, estos puntos son lugares alrededor de los cuales existen órbitas ligadas.

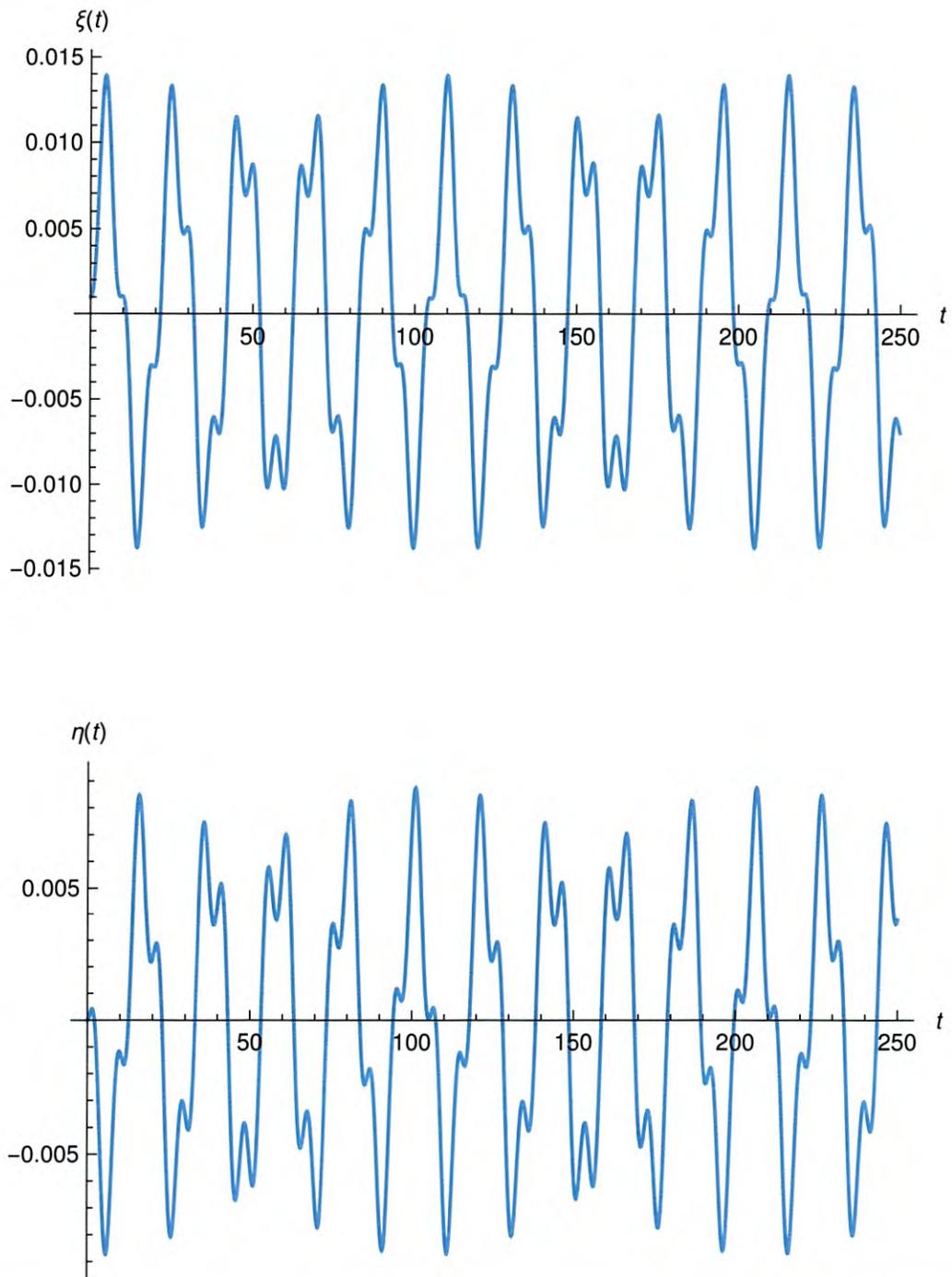


Figura 3.7: Gráficas de  $\xi(t)$ , parte superior, y  $\eta(t)$ , parte inferior. En ambos casos se fijó una pequeña desviación del punto  $L4$ , adoptando condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.001$ ,  $\eta_0 = \dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

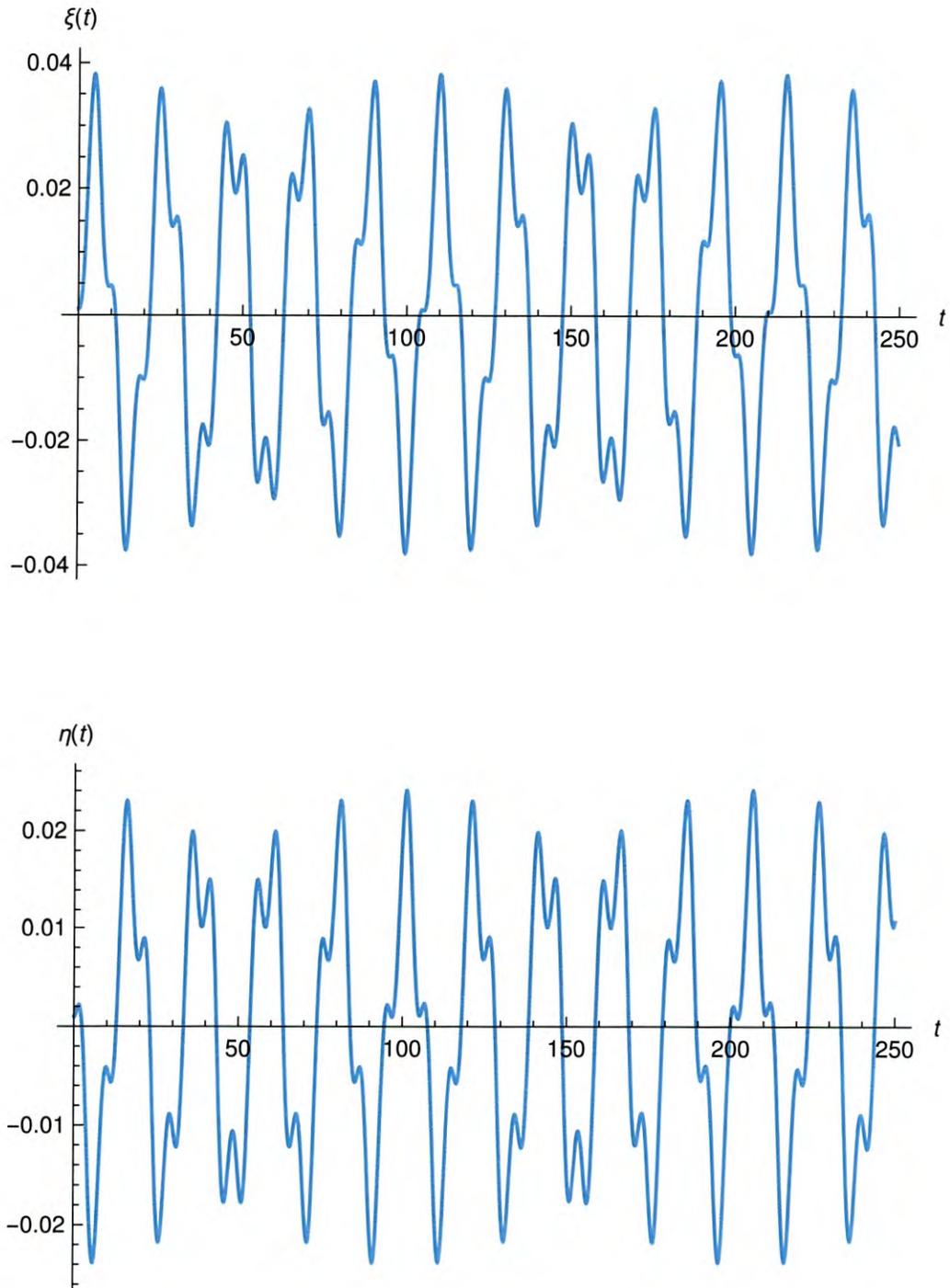


Figura 3.8: Gráficas de  $\xi(t)$ , parte superior, y  $\eta(t)$ , parte inferior. En ambos casos se fijaron una pequeñas desviación del punto  $L4$  en ambas direcciones del movimiento, usando condiciones iniciales  $\xi_0 = \eta_0 = 0.001$  y  $\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

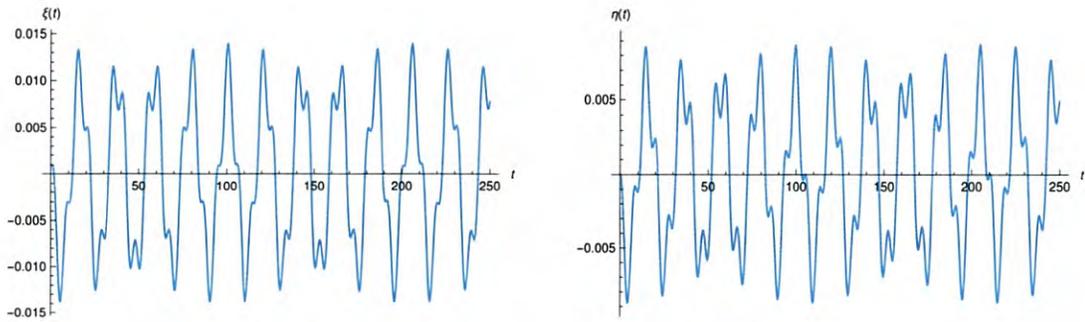


Figura 3.9: Gráficas de  $\xi(t)$ , derecha, y  $\eta(t)$ , izquierda. En ambos casos se adoptaron condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.001$ ,  $\eta_0 = \dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

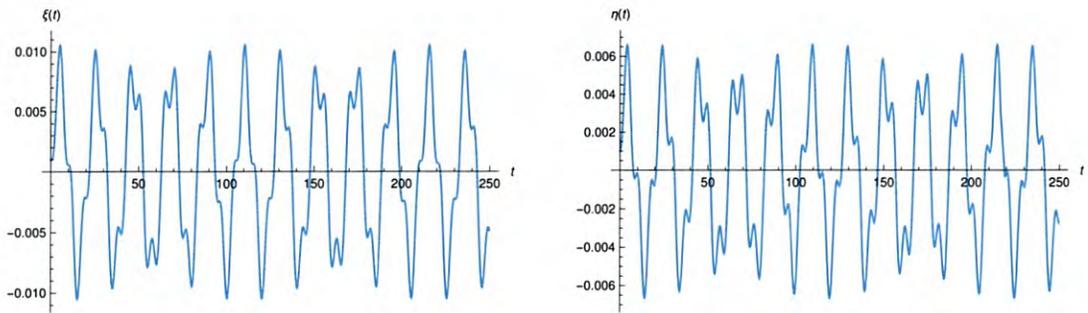


Figura 3.10: Gráficas de  $\xi(t)$ , derecha, y  $\eta(t)$ , izquierda. En ambos casos se adoptaron condiciones iniciales  $\xi_0 = \eta_0 = 0.001$  y  $\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ .

# Conclusiones

En este trabajo estudiamos el problema de tres cuerpos restringido y los puntos Lagrangianos del sistema Tierra-Luna. Al adoptar un sistema de referencia no inercial pudimos construir la fuerza efectiva que actúa sobre el tercer cuerpo y con ella desarrollamos el potencial efectivo para el sistema:

$$\Phi_{eff}(x, y) = -\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{(X + \beta)^2 + Y^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{(X - \alpha)^2 + Y^2}}.$$

La ventaja de construir este potencial es que podemos estudiar sus puntos críticos, o puntos de liberación, de los cuales se obtuvieron cinco para el problema específico de nuestro interés. Sus coordenadas, en unidades tales que la distancia entre la Tierra y la Luna es 1, son las siguientes:

$$L1 = (-1.00303, 0)$$

$$L2 = (1.14726, 0)$$

$$L3 = (0.82851, 0)$$

$$L4 = (0.48785, 0.86602)$$

$$L5 = (0.48785, -0.86602)$$

medidos todos desde el centro de masa entre la Tierra y la Luna, mismo que corresponde prácticamente al centro de la tierra.

Al aplicar el criterio de las segundas derivadas vimos que los puntos de Lagrange  $L1, L2$  y  $L3$  corresponden a puntos silla del potencial, mientras que  $L4$  y  $L5$  son máximos. En una primera lectura esto correspondería a que ninguno de los puntos de liberación son estables por lo que no existe la posibilidad de órbitas cerradas

a su alrededor. No obstante, en la literatura aparece que los puntos  $L4$  y  $L5$  si corresponden a puntos de equilibrio estable.

Por esta razón, procedimos a realizar un estudio en la vecindad de los puntos de Lagrange para conocer el movimiento esperado al considerar pequeños desplazamientos de los puntos de equilibrio, para ello se definieron nuevas variables que miden la separación del tercer cuerpo de cada uno de los puntos de equilibrio con coordenadas  $(x_L, y_L)$ :

$$\xi = x - x_L,$$

$$\eta = y - y_L.$$

Cuando consideramos estas variables en la ecuación de movimiento llegamos al siguiente sistema de ecuaciones que describe la perturbación del punto de equilibrio

$$\ddot{\xi} + \Phi_{xx}\xi = -\Phi_{xy}\eta + 2\dot{\eta}$$

$$\ddot{\eta} + \Phi_{yy}\eta = -\Phi_{xy}\xi - 2\dot{\xi},$$

resolvimos este par de ecuaciones transformándolo de un sistema de segundo orden a uno de primer orden y encontramos las soluciones para pequeños desplazamientos en cada eje de coordenadas.

Con estos resultados pudimos verificar que en los puntos de Lagrange  $L1$ ,  $L2$  y  $L3$  todas las órbitas presentarán grandes desviaciones de los puntos de liberación, por lo si un cuerpo no es colocado justo en alguna de sus coordenadas espaciales y en completo reposo (o bien si es perturbado de este estado por algún agente externo, como el viento solar) entonces se aleja de ahí para ya no regresar.

En cambio, cuando calculamos el desplazamiento desde una vecindad de  $L4$  o  $L5$ , pudimos encontrar soluciones oscilatorias en todos los casos (ver, por ejemplo, las figuras 3.7, 3.8, 3.9 o 3.10). Este comportamiento nos asegura que, aunque mientras el tercer cuerpo sea ligeramente perturbado de cualquiera de estos puntos, continuará moviéndose en una región cercana a cada uno de ellos indefinidamente.

Este resultado es el más impactante del presente trabajo, ya que el análisis del potencial efectivo nos indica que todos los puntos deben ser inestables, sin embargo hemos podido demostrar la estabilidad de dos de ellos ( $L4$  y  $L5$ ). Lo anterior se

debe a que la fuerza de Coriolis (misma que no está presente en el potencial efectivo) provee un mecanismo de restauración para el movimiento del tercer cuerpo, logrando que se mantenga en órbita aún en un máximo del potencial efectivo.

Lo anterior tiene además una corroboración astronómica directa. En el punto L5 fue observada una nube de polvo en el año de 1961, llamada Kordylewski dust cloud (KDC), en esa época se suponía que no debiera existir debido a la interacción gravitacional del Sol o a la presencia de vientos solares que afectarían su estabilidad, sin embargo; en el mes de noviembre de este año fue confirmada la existencia del KDC en el punto L5 [Sliz-Balogh et al., 2019], por lo que podemos afirmar que el mecanismo simple analizado en este trabajo es suficiente para explicar un fenómeno físico observado. Después de todo, las grandes aproximaciones necesarias para poder atacar un problema tan complejo resultan ser suficientes para describir fenómenos reales.

# Bibliografía

- [Binney and Tremaine, 2008] Binney, J. and Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2<sup>nd</sup> edition. ISBN: 978-0-691-13027-9.
- [Carroll and Ostlie, 2007] Carroll, B. W. and Ostlie, D. A. (2007). *An introduction to modern astrophysics and cosmology*. Pearson, Addison-Wesley, 2<sup>nd</sup> edition. ISBN: 0-8053-0402-9.
- [Cornish, 1998] Cornish, N. J. (1998). The lagrange points. *WMAP Education and Outreach*. <https://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf>.
- [Danzmann, 2018] Danzmann, K. (2018). eLISA Science Team. <https://www.elisascience.org>. Accedido: 2018-11-08.
- [Edward, 2008] Edward, Henry C y Penney, D. E. (2008). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Education Inc. 4<sup>a</sup> edición. ISBN: 978-970-26-1285-8.
- [Larson and Edwards, 2010] Larson, R. and Edwards, B. H. (2010). *Calculo 2 de varias variables*. Brooks/Cole. 9<sup>a</sup> edición. ISBN: 978-970-110-7134-2.
- [Marion and Thorton, 1995] Marion, J. B. and Thorton, S. T. (1995). *Classical Dynamics of particles and systems*. Harcourt Brace & Company, 4<sup>nd</sup> edition. ISBN: 0-03-097302-3.
- [Sliz-Balogh et al., 2019] Sliz-Balogh, J., Barta, A., and Horvath, G. (2019). Celestial mechanics and polarization optics of the Kordylewski dust cloud in the Earth-Moon Lagrange point L5 - Part II. Imaging polarimetric observation: new

- evidence for the existence of Kordylewski dust cloud. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 482:762–770.
- [The Artemis mission, 2010] The Artemis mission (2010). Artemis L1 L2 Orbiter mission. [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/themis/news/artemis-orbit.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/themis/news/artemis-orbit.html). Accedido: 2018-12-15.
- [Wang, 1991] Wang, Q.-D. (1991). The global solution of the n-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 50:73–88.
- [Wolfram Research Inc., 2017] Wolfram Research Inc. (2017). Mathematica, Version 11.2. Champaign, IL, 2017.
- [Zill, 2009] Zill, D. G. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones del modelo*. Brooks & Cole/Cengage Learning, 9ª edición. ISBN: 970-830-055-1.