



# **UNIVERSIDAD DE SONORA**

**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

**DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA**

**Propiedades ópticas de cristales fotónicos unidimensionales  
con componente metálica**

**TESIS**

Para obtener el grado de:

**Maestra en Ciencias (Física)**

Presenta

**Carolina Valenzuela Córdova**

Director de tesis

**Raúl García Llamas**

Hermosillo, Sonora.

Marzo de 2021

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos  
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



---

Este trabajo está dedicado a mi familia, a José Alberto† y a mi tío Rey†, a quien siempre recordaré con mucho cariño.

---



Mis agradecimientos:

- A mis padres por su apoyo incondicional y por preguntarme a diario por este trabajo.
- A mi hermana por hacerme ver todo más positivo.
- A mis sobrinas por alegrarme todos los días.
- A Jesús por siempre estar al pendiente.
- A Leonardo por su compañía y apoyo.
- A mi familia y amigos por creer siempre de más en mí.
- Al Dr. Raúl García Llamas por su asesoría y paciencia.
- A mis profesores, que me inspiraron a continuar con mis estudios y siempre estuvieron al pendiente de mí.
- A César por su ayuda en momentos desesperados.
- A los que ya no están pero estuvieron siempre.
- Al Departamento de Investigación en Física por los recursos para llevar a cabo el programa de Maestría en Ciencias (Física).
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por los apoyos económicos recibidos.

## RESUMEN

En esta tesis, se estudian las propiedades ópticas de una multicapa rodeada por dos medios semi-infinitos dieléctricos. Si el sistema está compuesto por  $n_c$  capas y constituido por solo dos materiales no absorbentes alternados, este se considera un cristal fotónico en una dimensión. Si una de esas capas es absorbente, como un metal, surge la siguiente pregunta: ¿se puede considerar al sistema como un cristal fotónico?

Se demostrará, que para que la multicapa se comporte como un cristal fotónico, se deben satisfacer al menos dos condiciones: El número de capas  $n_c$  debe ser muy grande y el espesor del metal debe ser mucho menor que su profundidad de piel.

Partiendo de las Leyes de Maxwell, se obtienen las ecuaciones de onda para  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ . Se escriben los campos eléctrico y magnético como soluciones a estas para cada uno de los medios, y se considera que la muestra es iluminada a incidencia oblicua. Se procede a resolver el problema aplicando las condiciones en la frontera de cada interfaz entre dos materiales, de tal manera que, mediante el método recursivo, se obtienen las amplitudes de reflexión y transmisión.

Se obtuvieron resultados haciendo uso de cálculo numérico, con la elaboración de un programa de cómputo en el lenguaje Fortran, basado en el método mencionado anteriormente. Se variaron los parámetros de interés (número de capas, grosores, etc), para observar los efectos que estos cambios producen en el sistema, así como para también obtener bandas prohibidas o PBG (Photonic Band Gap) por sus siglas en inglés.

Entre los resultados más importantes, se observó que cuando se tiene una estructura dieléctrico-metálica, los comportamientos de la reflexión y transmisión resultan ser diferentes a los obtenidos para un medio homogéneo compuesto por un metal. Al variar el grosor de la componente metálica (específicamente plata), se nota una fuerte dependencia de la reflexión y la transmisión con este parámetro, además el sistema se vuelve altamente reflectante a partir de  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , hasta el infrarojo.

De acuerdo con el criterio, basado en la diferencia  $R_{n+2} - R_n < \Delta R$ , (donde  $R_n$  es la reflexión para un sistema conformado por  $n$  capas, y donde la diferencia de datos para

sistemas con distinto número de capas está dado por  $\Delta R = 0.2$ ), se obtuvo que el sistema se comporta como cristal fotónico cuando se tiene  $n_c > 40$  para  $Ag$  y  $SiO_2$ . Aunque este resultado es general, el número exacto de capas depende del índice de refracción del material dieléctrico y del metal usado. El parámetro  $\Delta R$  puede decrecer si se requiere lograr mayor precisión en los resultados. Se encontró que si se disminuye  $\Delta R$ , también es necesario disminuir el espesor de la capa metálica y aumentar el número de capas en el cristal fotónico.

Por último, también se obtuvo una expresión aproximada para calcular el grosor de la capa del dieléctrico, de tal manera que la banda prohibida se pudiera centrar en cierta longitud de onda  $\lambda_c$ .

## ABSTRACT

In the present thesis, the optical properties of a multilayer system surrounded by two dielectric semi-infinite media are studied. If such system is compounded by  $n_c$  layers and constituted by only two alternated non absorbent materials, it can be considered as a 1D photonic crystal. When one of those layers presents absorption, as for the case of metals, there is room for the next question: is it possible to consider that the system is indeed a photonic crystal? It will be shown that, in order for the multilayer to act like a photonic crystal, two conditions must be satisfied: the number  $n_c$  of layers must be very large, and the thickness of the metal must be less than its skin depth.

From the electrodynamics laws or the Maxwell's laws, wave equations for  $\vec{E}$  and  $\vec{H}$  can be obtained. For each different medium, the electric and magnetic fields are written as solutions for these, and it is considered that the sample is illuminated at oblique incidence. The problem is solved by applying boundary conditions at every interface between two materials and finding the reflection and transmission amplitudes through a recursive method. From these, Fresnel coefficients for reflection and transmission are found.

Based on the recursive method, a Fortran computerized algorithm was elaborated to obtain results for this specific problem. Parameters such as the number of layers and thicknesses were varied to observe the effects due to these changes in the system, as well as to obtain photonic band gaps (PBG).

Among the most relevant results, it was observed that both reflection and transmission act different when having a dielectric-metallic structure, as compared to the results obtained for a homogeneous semi-infinite medium compounded by a metal. A strong dependency between the thickness of the metallic component (specifically silver) and the reflection and transmission is noticed when varying this parameter. Moreover, the system shows a high reflection in  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

According to a criteria, based on the difference  $R_{n+2} - R_n < \Delta R$ , (where  $R_n$  is the reflection for a system built up by  $n$  layers with  $\Delta R = 0.2$  from data comparison between systems with different amounts of layers), it was demonstrated that the system is a photonic crystal when  $n_c > 40$  for  $Ag$  and  $SiO_2$ . Despite this result is general, the

exact amount of layers depends on the refractive indexes of both; the dielectric and metallic materials taken into consideration. The  $\Delta R$  parameter may decrease if major precision in the results is required. It was found that, if  $\Delta R$  decreases, it is also necessary to diminish the thickness of the metallic layer, as well as increase the number of layers in the photonic crystal.

Finally, an approximated expression to calculate the thickness of the dielectric layer was obtained, so it was possible to center the PBG in a certain wavelength  $\lambda_c$ .

## ÍNDICE

|   |    |
|---|----|
| Capítulo 1: Introducción .....  | 11 |
| Capítulo 2: Teoría .....  | 16 |
| 1.0 Polarización s .....  | 19 |
| 2.0 Polarización p.....   | 30 |
| 3.0 Grosor de la capa de un dieléctrico<br>en un cristal fotónico con componentes dieléctricas..... | 38 |
| 4.0 Grosor de la capa de un dieléctrico<br>en un cristal fotónico con componente metálica.....      | 39 |
| Capítulo 3: Resultados numéricos.....   | 42 |
| 5.0 Sistema de una superficie metálica de plata .....   | 44 |
| 6.0 Capa metálica de plata con distintos grosores .....   | 47 |
| 7.0 Capa dieléctrica de SiO <sub>2</sub> con distintos grosores .....                               | 49 |
| 8.0 Sistema multicapas formado de 3 capas alternadas vacío-plata.....                               | 52 |
| 9.0 Implementación del criterio para lograr el cristal fotónico .....                               | 55 |
| 10.0 Cristal fotónico con componente metálica.....  | 59 |
| 11.0 Cristal fotónico dieléctrico.....  | 63 |
| Capítulo 4: Conclusiones .....  | 65 |
| Apéndices .....   | 67 |
| Bibliografía .....  | 97 |

## LISTA DE APÉNDICES

|  |    |
|--|----|
| Apéndice A: Deducción de la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell       |    |
| .....  | 67 |
| Apéndice B: Deducción de la ley de conservación de la carga de las ecuaciones de Maxwell |    |
| .....  | 71 |
| Apéndice C: Vector de Poynting   |    |
| .....  | 72 |
| Apéndice D: Frecuencia de plasma   |    |
| .....  | 77 |
| Apéndice E: Cálculo de coeficiente de reflexión para una superficie                      |    |
| .....  | 80 |
| Apéndice F: Cálculo de los coeficientes de reflexión                                     |    |
| y transmisión para una película.....   | 85 |
| Apéndice G: Condición de máximos y mínimos para 3 medios                                 |    |
| .....  | 91 |
| Apéndice H: El efecto piel clásico   |    |
| .....  | 95 |

## LISTA DE FIGURAS

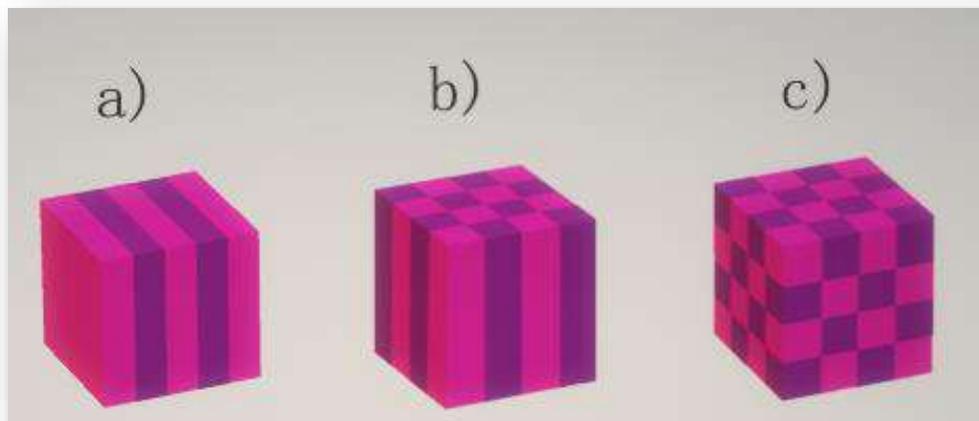
|   |    |
|---|----|
| 1. Clasificación de cristales fotónicos de acuerdo a su dimensionalidad. a) Unidimensionales (1D) $\epsilon(x)$ y $\mu(x)$ , b) Bidimensionales (2D) $\epsilon(x,y)$ y $\mu(x,y)$ , c) Tridimensionales (3D) $\epsilon(x,y,z)$ y $\mu(x,y,z)$ ..... | 11 |
| 2. Onda incidente en polarización s que incide oblicuamente sobre el sistema .....  | 19 |
| 3. Onda incidente en polarización p que incide oblicuamente sobre el sistema. ....  | 30 |
| 4. Sistema multicapa con parte metálica. Las permitividades de los materiales dieléctricos están indicados por $\epsilon_1$ , $\epsilon_{Ag}$ y $\epsilon_3$ . Los grosores están indicados por $d_{Ag}$ y $d_3$ . ....                             | 43 |
| 5. Reflexión vs longitud de onda, en polarización s (roja) y p (azul) para una capa metálica de plata (Ag) con un ángulo de incidencia de $30^\circ$ .....  | 44 |
| 6. Parte real de la constante dieléctrica de la plata. $\epsilon_r$ vs $\lambda$ [8] .....  | 46 |
| 7. Espectros de reflexión y transmisión en polarización s y p (indicadas en la figura), para una capa de plata con grosores de a) 5nm, b) 10nm,c) 15nm y d) 25nm .....  | 48 |
| 8. Espectros de reflexión y transmisión en polarización s y p (indicadas en la figura),para una capa de SiO <sub>2</sub> con grosores de a) 92nm, b) 112nm,c) 142nm y d) 172nm, .....   | 50 |
| 9. Reflexión y transmisión en polarización p y s (indicados en la figura),para un sistema de 3 capas y 5 medios con un ángulo de incidencia de $30^\circ$ .....   | 53 |
| 10. Diferencia de resultados numéricos entre la reflexión en polarización s de un sistema de 10 capas y uno de 12 .....   | 56 |
| 11. Diferencia de resultados numéricos entre la reflexión en polarización s de un sistema de 44 capas y uno de 42 .....   | 57 |
| 12. Reflexión en polarización p y s (indicados en la figura) para un sistema de 42 y 44 capas, con un ángulo de incidencia de $30^\circ$ .....  | 58 |
| 13. Reflexión y transmisión en polarización p y s (indicados en la figura),para un sistema de 44 capas con un ángulo de incidencia de $30^\circ$ . ....   | 59 |

|  |    |
|--|----|
| 14. Reflexión y transmisión en polarización p y s (indicados en la figura), para un sistema de 40 capas con un ángulo de incidencia de $20^\circ$ . .....    | 61 |
| 15. Reflexión y transmisión en polarización (R) p y s (indicados en la figura), para un sistema de 36 capas con un ángulo de incidencia de $0^\circ$ . ..... | 63 |
| 16. Onda plana electromagnética .....  | 67 |

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

Un cristal fotónico (CF) es un metamaterial, o una estructura artificial, cuyo índice de refracción o constante dieléctrica varía periódicamente en el espacio [1]. Estas estructuras se clasifican de acuerdo con la cantidad de dimensiones en las que presentan periodicidad, como se muestra en la figura [1]:



*Figura 1. Clasificación de cristales fotónicos de acuerdo a su dimensionalidad. a) Unidimensionales (1D)  $\epsilon(x)$  y  $\mu(x)$ , b) Bidimensionales (2D)  $\epsilon(x,y)$  y  $\mu(x,y)$ , c) Tridimensionales (3D)  $\epsilon(x,y,z)$  y  $\mu(x,y,z)$ .*

Los cristales fotónicos no se encuentran en la naturaleza y son fabricados por el hombre. En la actualidad, muchas de sus propiedades ópticas y aplicaciones son conocidas. Los primeros resultados experimentales de cristales 3D aparecen a finales de los años ochenta y hay una explosión en la investigación en cristales 3D y 2D, sobre todo en los años noventa continuando hasta nuestros tiempos. Algunas de las propiedades de los cristales fotónicos ya eran conocidas, como la denominada brecha prohibida o band gap, en otro campo conocido como películas delgadas (optical interference coatings OIC por sus siglas en inglés o thin films coating). Los descubrimientos de este último campo de

investigación y desarrollo, datan de los años cuarenta. La brecha prohibida es una región específica de frecuencias para la cual la propagación de ondas electromagnéticas es prohibida.

Los cristales fotónicos pueden componerse de nano estructuras <sup>1</sup> periódicas, ya sea de materiales dieléctricos o metales y dieléctricos alternados. Se diseñan para afectar la propagación de ondas electromagnéticas (EM), de la misma manera que un potencial periódico en un semiconductor afecta el movimiento de los electrones, de tal forma que se observen regiones prohibidas de energía.[2]. Estas brechas de energía han sido obtenidas recientemente usando la ecuación de Dirac [3].

En un cristal fotónico, la modulación periódica de su índice de refracción provoca interferencia de los campos electromagnéticos que da origen a la aparición de bandas prohibidas fotónicas (PBGs), las cuales dependen de las propiedades geométricas y físicas de la estructura periódica, tales como el ancho relativo entre las capas alternantes, el contraste en su índice de refracción y el periodo.

Dentro de las PBGs, la propagación de ondas electromagnéticas es prohibida para un rango de frecuencias específico. Las estructuras que presentan PBGs, tienen diversas aplicaciones potenciales en optoelectrónica y comunicaciones ópticas para la creación de guías de onda, resonadores y convertidores ópticos no lineales [7,8].

En la referencia [5], se tiene uno de los antecedentes más antiguos para el inicio del estudio de estructuras periódicas. Se propone utilizar la manipulación de las propiedades del sistema para observar regiones prohibidas de propagación del campo irradiado sobre el mismo. También, se fabrican por primera vez los cristales fotónicos en más dimensiones, como una forma de evitar la emisión espontánea. En esencia, el autor considera que el uso de estructuras periódicas que prohíben ciertas frecuencias en el espectro electromagnético, pueden inhibir la emisión espontánea.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Cualquier estructura de una o más dimensiones, cuyas medidas se encuentran dentro del rango de escala  $\times 10^{-9}m$

<sup>2</sup> Cuando un átomo se excita y pasa a un nivel mayor de energía, (por ejemplo, por la absorción de un fotón), después de un tiempo, espontáneamente regresa a su estado base, o a un nivel intermedio, liberando

Este tipo de estructuras son las que en la actualidad se les conoce como cristales fotónicos, y es sabido que pueden prohibir la propagación de la luz sobre cierto rango de longitudes de onda. Este comportamiento es conocido como banda fotónica prohibida (PBG), que es análoga a las bandas electrónicas prohibidas en materiales semiconductores. Debido a la interacción entre las ondas transmitidas y reflejadas en cada capa a lo largo de la estructura periódica, resultan interferencias constructivas y destructivas, formando así lo que se conoce como PBG. También es posible introducir defectos en el sistema, los cuales localmente interrumpen la periodicidad y se obtienen modos dentro de la PBG. Estos modos se mantienen confinados en la región donde se encuentra el defecto [6]. También se hace una revisión de los aspectos involucrados en tres diferentes casos, para los que se observa emisión espontánea prohibida, debido a que representa una limitación de manera característica en cada uno de ellos, siendo estos: láseres semiconductores, transistores bipolares de heterounión y celdas solares [5].

En esta referencia [5] se concluye que la emisión espontánea prohibida debido a una PBG, puede representar un efecto significativo en el área de Estado Sólido, y puede ser utilizado posteriormente para el estudio de semiconductores, brindando así un antecedente sobre las primeras propuestas de relación entre la variación de las propiedades del sistema y las regiones prohibidas para la propagación de las ondas electromagnéticas con las que se tiene interacción.

En referencias más recientes como [6], se propone que un contraste suficientemente grande entre constantes dieléctricas en microestructuras de superceldas desordenadas, crea una ventana de frecuencias, dentro de la cual puede ocurrir la localización fuerte de fotones. El autor sugiere utilizar la localización de Anderson de fotones para ondas electromagnéticas propagándose en estructuras dieléctricas, siendo estos materiales el análogo fotónico de semiconductores amorfos.

Por otro lado, en la referencia [7], se consideran las propiedades ópticas de un medio heterogéneo no resonante, compuesto por nano esferas metálicas en un medio

---

la energía en forma de luz. El fotón puede corresponder a cualquier modo de propagación del medio que rodea al átomo. Este proceso se conoce como emisión espontánea.

transparente, las cuales no poseen propiedades resonantes. Se obtiene la absorción, el comportamiento de los índices de refracción y absorción en medios heterogéneos, y el de la constante dieléctrica de la plata en vidrio óptico. También se obtienen las condiciones bajo las cuales el medio heterogéneo no absorbe.

Los estudios experimentales de las propiedades ópticas de medios heterogéneos son de interés para considerar aplicaciones prácticas y para estudiar efectos fundamentales. A lo largo de las últimas décadas, se ha tenido registro de actividad significativa en el desarrollo de dispositivos fotónicos, capaces de guiar, confinar o controlar luz en escalas nanométricas.

En la referencia [9], se diseñan guías de onda utilizando cavidades acopladas. Demuestran teórica y experimentalmente que los fotones pueden propagarse a través de cavidades localizadas, las cuales actúan como defectos en la estructura. Observaron una alta transmisión de ondas electromagnéticas en las cavidades, incluso si se encuentran acomodadas a lo largo de un camino arbitrariamente trazado.

Posteriormente, en [10] se estudiaron PBGs en estructuras fotónicas 2D, y se encontró que si se hace una comparación entre un sistema infinito y uno finito, el tamaño de la PBG disminuye en un 40%, debido a las pérdidas de radiación. También es importante señalar algunas contribuciones a la fabricación y diseño de cristales fotónicos.

La importancia de estudiar los efectos derivados de las propiedades ópticas del material metálico, en cristales fotónicos unidimensionales, reside en comprender mejor la optimización del diseño de este tipo de sistemas multicapas para el uso específico que se le quiere dar, como por ejemplo un filtro en el infrarrojo, un espejo, fabricación de un componente óptico, etcétera.

Se ha recurrido al uso de tecnología basada en cristales fotónicos y sus PBGs, debido a que ofrece poca pérdida, a diferencia de los materiales que solo son reflectantes. Cuando se estudia una estructura periódica, es de particular interés obtener espectros de transmisión y reflexión, ya que es posible analizar los efectos sobre las propiedades ópticas del sistema. Estos espectros se obtienen a partir de calcular los coeficientes de Fresnel para la transmisión y reflexión del sistema periódico en cuestión. Estos

coeficientes relacionan las amplitudes de las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas en la interfaz de dos medios homogéneos. [11]

Las ecuaciones de Fresnel también pueden ser aplicadas en medios donde se considera absorción, como los metales, donde es necesario utilizar un índice de refracción complejo. Como la parte compleja está relacionada con la absorción, los coeficientes de transmisión y reflexión no son entonces números reales. [22]

Para este trabajo, en el capítulo 2, se obtuvieron los coeficientes de Fresnel para un sistema de  $n_c$  capas alternadas rodeado por dos medios dieléctricos semi-infinitos y un número de medios total  $n_m = n_c + 2$ .

Se escriben los campos eléctrico y magnético de tal forma que satisfagan la ecuación de onda electromagnética, derivada de las ecuaciones de Maxwell (ver apéndice). Estos campos se consideran a incidencia oblicua y con polarización lineal.

Se aplican las condiciones en la frontera entre cada medio y se obtiene un sistema de ecuaciones de  $n_{n_c+1} \times n_{n_c+1}$ , el cual puede resolverse como se procede detalladamente en el capítulo 2.

Una vez que se tienen expresiones que relacionan los grosores de las capas, los índices de refracción y la frecuencia, se pueden obtener los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión para el sistema considerado.

Estos coeficientes mantienen la misma forma si se cambia la polarización, pero ciertas cantidades se diferencian por un factor de  $\frac{1}{\mu}$  o  $\frac{1}{\epsilon}$ , según sea el caso. Con estas expresiones, se desarrolló un programa en FORTRAN para automatizar el cálculo de los coeficientes para el valor de frecuencia (o longitud de onda) correspondiente, y así obtener curvas para interpretar el comportamiento de las ondas electromagnéticas en interacción con el sistema periódico.

En el capítulo 3 se presentan los resultados numéricos para distintas configuraciones del sistema, variando el número de capas. Se considera que el cristal fotónico unidimensional solo está compuesto por dos medios, uno metálico de espesor  $d_2$  y otro dieléctrico de espesor  $d_3$ , así que el periodo del cristal fotónico es  $a_p = d_2 + d_3$ . Se incluyen las curvas

correspondientes a la transmisión y reflexión que se calcularon con el algoritmo mencionado anteriormente, y mediante un criterio propuesto (especificado en esa sección), se determinó el número de capas necesarias para obtener un comportamiento tipo cristal fotónico. Con este resultado, fue posible observar PBGs y hacer una interpretación física del comportamiento. También se realiza una comparación para un sistema compuesto por dos materiales dieléctricos, considerando el mismo ángulo de incidencia y el mismo número de capas. Esto con el fin de ilustrar los efectos debidos a la componente metálica del CF propuesto.

Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones y discusión a la que se llegó con los resultados de este trabajo.

# CAPÍTULO 2

## TEORÍA

En este capítulo, se calcularán teóricamente la reflexión y la transmisión de una onda plana electromagnética monocromática incidente de manera oblicua sobre un sistema multicapa, haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell (ver apéndice A). Los índices de refracción (las constantes dieléctricas, así como las permeabilidades magnéticas) y los grosores para cada capa en general son distintos. La geometría de este sistema se muestra en la figura 2. En el siguiente capítulo se establecerán condiciones generales para obtener propiedades ópticas de cristales fotónicos.

Se consideran dos polarizaciones para la onda incidente, de tal forma que la amplitud del campo eléctrico se encuentre alineado al plano de incidencia<sup>3</sup> o normal a este. En ambos casos, las orientaciones de los vectores de las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas son las mismas que las de la onda incidente. Entonces, cualquier onda con polarización arbitraria, se puede separar en dos componentes con estas orientaciones.

Una onda con el vector del campo eléctrico alineado al plano de incidencia, se dice que tiene polarización p o TM (transverse magnetic). Cuando el campo eléctrico es normal al plano de incidencia, se tiene polarización s o TE (transverse electric). Se denominan p y s del alemán *parallel* y *senkrecht* (paralelo y perpendicular)[7].

Los campos eléctrico y magnético que conforman la onda, se expresan de manera que satisfagan a la ecuación de onda, derivada de las Leyes de Maxwell (ver apéndice A). Se considera al vector de onda en una forma general que permita reducir el problema al caso de incidencia normal, cuando el ángulo de incidencia es igual a cero.

Al aplicar las condiciones de frontera tantas veces como interfaces se tienen en el problema en particular a tratar, se obtiene un sistema de ecuaciones, el cual se resuelve

---

<sup>3</sup> Es el plano que contiene el vector de propagación de la onda incidente, y el vector normal a la superficie.

con el método recursivo utilizado en este capítulo, siendo este el caso general de un sistema compuesto por  $n_c$  capas, donde  $n_c$  es un número entero positivo mayor que cero.

Es posible recurrir a la repetición del procedimiento para solucionar el sistema, debido a la similitud de las ecuaciones que se obtienen al aplicar condiciones en la frontera entre cada capa, resultando así conveniente para la generalización del problema.

Con este método, fue posible obtener expresiones generales de transmisión y reflexión, en términos de los grosores de las capas, el ángulo de incidencia,  $\varepsilon$  ó  $\mu$  según la polarización y la longitud de onda de la onda incidente.

## 1.0 Polarización s

En esta sección, se procede a deducir lo que se denomina el método de recurrencia, el cual permite calcular los coeficientes de reflexión y transmisión para un sistema compuesto de  $n_c$  capas. Se considera primero la polarización s (del alemán senkrecht), donde el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia [20]. Para esta polarización, se considera un sistema de  $n_c$  capas y un número total  $n_m = n_c + 2$  de medios, como se muestra en la figura 2. Se tendrá un número  $n_c + 1$  de fronteras, y  $\hat{k}$  es el vector unitario normal a las capas.

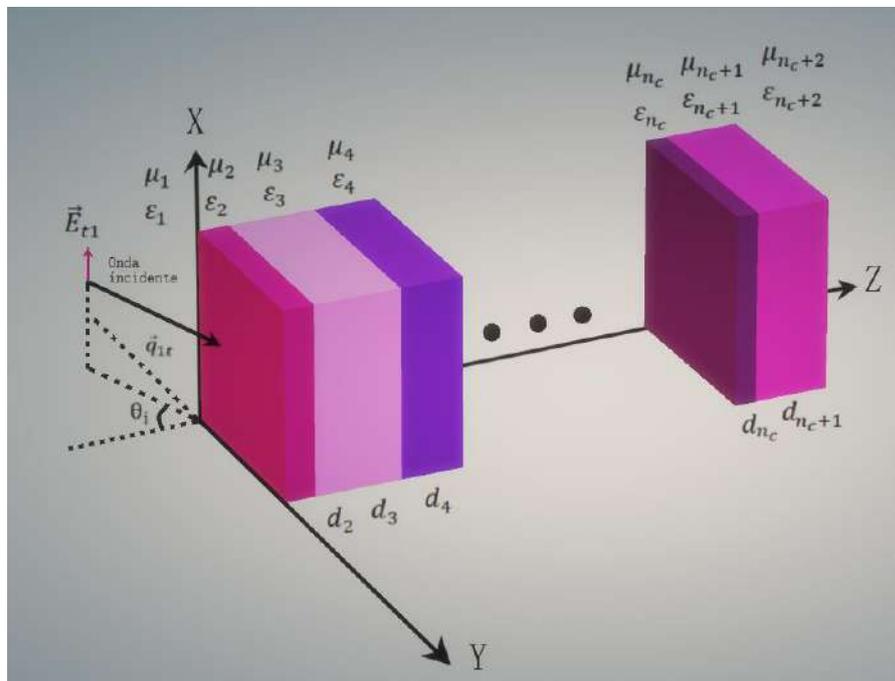


Figura 2. Onda plana monocromática electromagnética incidente en polarización s que incide oblicuamente sobre el sistema. La multicapa está conformada por  $n_c$  capas de materiales diferentes, y está rodeada por dos medios semi-infinitos. Los grosores de capa se indican con  $d_2, d_3, \dots, d_{n_c+1}$ , mientras que las permitividades se indican con  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n_c+1}, \epsilon_{n_c+2}$ , y las permeabilidades con  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n_c+1}, \mu_{n_c+2}$ .

De acuerdo con la forma en la que se expresan las ondas planas que satisfacen a la ecuación de onda (ver apéndice A), se tienen los campos eléctricos y magnéticos en cada medio:

$$\vec{E}_n = [E_{tn}e^{i(\vec{q}_{nt}\cdot\vec{r}-\omega t)} + E_{rn}e^{i(\vec{q}_{nr}\cdot\vec{r}-\omega t)}] \hat{i}$$

$$\vec{B}_n = \frac{1}{\mu_n} [q_{nz}(E_{tn}e^{i(\vec{q}_{nt}\cdot\vec{r}-\omega t)} - E_{rn}e^{i(\vec{q}_{nr}\cdot\vec{r}-\omega t)})\hat{j} - q_{ny}(E_{tn}e^{i(\vec{q}_{nt}\cdot\vec{r}-\omega t)} - E_{rn}e^{i(\vec{q}_{nr}\cdot\vec{r}-\omega t)})\hat{k}]$$

Donde

$$\vec{q}_{nt} = q_{ny}\hat{j} + q_{nz}\hat{k}$$

$$\vec{q}_{nr} = q_{ny}\hat{j} - q_{nz}\hat{k}$$

con  $q_n = |\vec{q}_{nt}| = |\vec{q}_{nr}| = \omega\sqrt{\mu_n\varepsilon_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, n_c, n_c + 1, n_c + 2$  y donde  $\mu_n$  y  $\varepsilon_n$  son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del medio correspondiente y  $E_{r(n_c+2)} = 0$ , mientras que  $E_{t1}$  corresponde a la amplitud de la onda incidente,  $q_{1y} = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\sin\theta_i$  y  $q_{nz} = \sqrt{\mu_n\varepsilon_n\omega^2 - q_{ny}^2}$ .

En este desarrollo, se consideran tanto a la permitividad eléctrica como a la permeabilidad magnética absolutas. Estas se definen como  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$  y  $\mu = \mu_0\mu_r$ , donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío,  $\varepsilon_r$  es la permitividad eléctrica relativa y  $\mu_r$  es la permeabilidad relativa. Las unidades de estas cantidades pertenecen al sistema MKS.

Dependiendo del sistema, se tendrán tantas fronteras como número de medios existan. Se analiza a continuación la forma que toman las ecuaciones de Maxwell en cada frontera, obteniendo así un sistema de ecuaciones de  $2(n_c + 1) \times 2(n_c + 1)$ , el cual es posible resolver con el método recursivo.

Existe otro método conocido como el método de matriz de transferencia el cual no es empleado en este trabajo.

La variación espacial y temporal de todos los campos debe ser igual en cada frontera, por lo que las fases deben satisfacer:

$$(\vec{q}_{1t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=0} = (\vec{q}_{2t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=0}$$

$$(\vec{q}_{2t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=d_2} = (\vec{q}_{3t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=d_2}$$

$$(\vec{q}_{3t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=d_2+d_3} = (\vec{q}_{4t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=d_2+d_3}$$

$$(\vec{q}_{(n_c+1)t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=d_2+\dots+d_{n_c}+d_{n_c+1}} = (\vec{q}_{(n_c+2)t} \cdot \mathcal{Y}\hat{j})_{z=d_2+\dots+d_{n_c}+d_{n_c+1}}$$

De este conjunto de igualdades se concluye que

$$q_{1y} = q_{2y} = \dots = q_{n_c y} = q_{(n_c+1)y} = q_{(n_c+2)y} = q_y$$

Esto nos lleva a la conocida ley de Snell ( $q_{1y} = q_{2y} \rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ ), donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción<sup>4</sup> del medio 1 y 2, respectivamente.

Ahora, aplicando las condiciones en la frontera en  $z = 0$  para la componente tangencial del campo eléctrico,

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1]_{z=0} \times \hat{k} = 0. \quad (1)$$

Sustituyendo los campos, se tiene la siguiente ecuación:

$$[(E_{t2} + E_{r2})\hat{i} - (E_{t1} + E_{r1})\hat{i}]_{z=0} \times \hat{k} = 0 \quad (2)$$

Realizando el producto cruz e igualando las componentes

$$E_{t2} + E_{r2} = E_{t1} + E_{r1} \quad (3)$$

Para la condición en la que se considera a la componente tangencial de  $\vec{H}$ , se tiene:

$$\left[ \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1 \right]_{z=0} \times \hat{k} = 0 \quad (4)$$

---

<sup>4</sup> Se conoce como índice de refracción a la razón existente entre las velocidades de propagación de una onda en el vacío y en otro medio. Se simboliza con la letra  $n$  y se trata de un valor adimensional, definido como  $n = \frac{c}{v}$ , donde  $n$  es el índice de refracción,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $v$  es la velocidad de la luz en el medio [19].

Sustituyendo los campos se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_2} [q_{2z}(E_{t2} - E_{r2})\hat{j} - q_{2y}(E_{t2} - E_{r2})\hat{k}] \times \hat{k} \\ & - \frac{1}{\mu_1} [q_{1z}(E_{t1} - E_{r1})\hat{j} - q_{1y}(E_{t1} - E_{r1})\hat{k}] \times \hat{k} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Realizando el producto e igualando las componentes:

$$\frac{q_{2z}}{\mu_2} E_{t2} - \frac{q_{2z}}{\mu_2} E_{r2} = \frac{q_{1z}}{\mu_1} E_{t1} - \frac{q_{1z}}{\mu_1} E_{r1}$$

Definiendo las siguientes cantidades:  $Z_i = \frac{q_{iz}}{\mu_i}$ ,  $C_i = Z_i + Z_{i+1}$ ,  $D_i = Z_i - Z_{i+1}$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, n_c + 1$  se puede reescribir la ecuación anterior como sigue:

$$Z_2 E_{t2} - Z_2 E_{r2} = Z_1 E_{t1} - Z_1 E_{r1} \quad (6)$$

De (3) y (6) se encuentran

$$+2Z_2 E_{t2} = C_1 E_{t1} - D_1 E_{r1} \quad (7)$$

$$-2Z_2 E_{r2} = D_1 E_{t1} - C_1 E_{r1} \quad (8)$$

Si se toman en cuenta las siguientes relaciones (como se verá más adelante, estas U y V serán los valores iniciales de la recurrencia)

$$V'_1 = D_1 \quad (9)$$

$$V_1 = C_1 \quad (10)$$

$$U'_1 = C_1 \quad (11)$$

$$U_1 = D_1 \quad (12)$$

Se pueden reescribir (7) y (8) como sigue:

$$+2Z_2 E_{t2} = U'_1 E_{t1} - V_1 E_{r1} \quad (13)$$

$$-2Z_2E_{r2} = U_1E_{t1} - V_1E_{r1} \quad (14)$$

Escribir (13) y (14) en esta forma resulta de utilidad para deducir más adelante la relación de recurrencia.

Ahora se procede a evaluar los campos en la frontera  $z = d_2$

$$[\vec{E}_3 - \vec{E}_2]_{z=d_2} \times \hat{k} = 0 \quad (15)$$

Sustituyendo los campos:

$$[(E_{t3}e^{i(\vec{q}_{t3} \cdot \vec{r})} + E_{r3}e^{i(\vec{q}_{r3} \cdot \vec{r})})\hat{i} - (E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2} \cdot \vec{r})} + E_{r2}e^{i(\vec{q}_{r2} \cdot \vec{r})})\hat{i}]_{z=d_2} \times \hat{k} = 0 \quad (16)$$

Realizando el producto e igualando las componentes

$$E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} + E_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} = E_{t2}e^{+iq_{2z}d_2} + E_{r2}e^{-iq_{2z}d_2} \quad (17)$$

Para la condición en la que se considera a la componente tangencial de  $\vec{H}$ , se tiene:

$$\left[ \frac{1}{\mu_3} \vec{B}_3 - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 \right]_{z=d_2} \times \hat{k} = 0 \quad (18)$$

Sustituyendo los campos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_3} [q_{3z}(E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} - E_{r3}e^{-iq_{3z}d_2})\hat{j} - q_{3y}(E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} - E_{r3}e^{-iq_{3z}d_2})\hat{k}] \times \hat{k} \quad (19) \\ & - \frac{1}{\mu_2} [q_{2z}(E_{t2}e^{+iq_{2z}d_2} - E_{r2}e^{-iq_{2z}d_2})\hat{j} - q_{2y}(E_{t2}e^{+iq_{2z}d_2} - E_{r2}e^{-iq_{2z}d_2})\hat{k}] \times \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

Realizando el producto cruz e igualando las componentes:

$$Z_3E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} - Z_3E_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} = Z_2E_{t2}e^{+iq_{2z}d_2} - Z_2E_{r2}e^{-iq_{2z}d_2} \quad (20)$$

De (17) y (20) se encuentran

$$+2Z_3E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} = C_2E_{t2}e^{+iq_{2z}d_2} - D_2E_{r2}e^{-iq_{2z}d_2} \quad (21)$$

$$-2Z_3 E_{r3} e^{-iq_{3z}d_2} = D_2 E_{t2} e^{+iq_{2z}d_2} - C_2 E_{r2} e^{-iq_{2z}d_2} \quad (22)$$

Se ha encontrado una relación entre los campos eléctricos en un medio (denotado por el subíndice 3) y los campos eléctricos en el medio adyacente (denotado por el subíndice 2).

Sustituyendo (13) y (14) en (21) y (22) se obtienen

$$\begin{aligned} (+2Z_2)(+2Z_3)E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} \\ = C_2[U_1'E_{t1} - V_1'E_{r1}]e^{+iq_{2z}d_2} + D_2[U_1E_{t1} - V_1E_{r1}]e^{-iq_{2z}d_2} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (-2Z_2)(+2Z_3)E_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} \\ = D_2[U_1'E_{t1} - V_1'E_{r1}]e^{+iq_{2z}d_2} + C_2[U_1E_{t1} - V_1E_{r1}]e^{-iq_{2z}d_2} \end{aligned} \quad (24)$$

Factorizando  $E_{t1}$  y  $E_{r1}$  en el lado derecho de las ecuaciones (23) y (24) se llega a

$$\begin{aligned} (+2Z_2)(+2Z_3)E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} \\ = [U_1'C_2e^{+iq_{2z}d_2} + U_1D_2e^{-iq_{2z}d_2}]E_{t1} \\ - [V_1'C_2e^{+iq_{2z}d_2} + V_1D_2e^{-iq_{2z}d_2}]E_{r1} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (-2Z_2)(+2Z_3)E_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} \\ = [U_1'D_2e^{+iq_{2z}d_2} + U_1C_2e^{-iq_{2z}d_2}]E_{t1} \\ - [V_1'D_2e^{+iq_{2z}d_2} + V_1C_2e^{-iq_{2z}d_2}]E_{r1} \end{aligned} \quad (26)$$

Definiendo

$$V_2 = V_1'D_2e^{+iq_{2z}d_2} + V_1C_2e^{-iq_{2z}d_2} \quad (27)$$

$$U_2 = U_1'D_2e^{+iq_{2z}d_2} + U_1C_2e^{-iq_{2z}d_2} \quad (28)$$

$$V'_2 = V_1'C_2e^{+iq_{2z}d_2} + V_1D_2e^{-iq_{2z}d_2} \quad (29)$$

$$U'_2 = U_1'C_2e^{+iq_{2z}d_2} + U_1D_2e^{-iq_{2z}d_2} \quad (30)$$

se pueden reescribir las ecuaciones (25) y (26) como sigue:

$$(+2Z_2)(+2Z_3)E_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} = U'_2E_{t1} - V'_2E_{r1} \quad (31)$$

$$(-2Z_2)(+2Z_3)E_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} = U_2E_{t1} - V_2E_{r1} \quad (32)$$

Se puede observar que las ecuaciones (31) y (32) tienen una forma similar a (13) y (14). Estas relacionan las amplitudes del campo reflejado y transmitido del medio 3 con el medio 1.

Se considera que la multicapa consta de 4 medios para ilustrar la recursividad del método. Esto con el fin de generalizarlo para un sistema de  $n_c$  capas. En este ejemplo  $n_c = 2$ .

Entonces, en la frontera  $z = d_2 + d_3$  se tiene:

$$[\vec{E}_4 - \vec{E}_3]_{z=d_2+d_3} \times \hat{k} = 0 \quad (33)$$

Sustituyendo los campos:

$$[E_{t4}e^{i(\vec{q}_{4t} \cdot \vec{r})}\hat{i} - (E_{t3}e^{i(\vec{q}_{3t} \cdot \vec{r})} + E_{r3}e^{i(\vec{q}_{3r} \cdot \vec{r})})\hat{i}]_{z=d_2+d_3} \times \hat{k} = 0 \quad (34)$$

Realizando el producto e igualando las componentes

$$E_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = E_{t3}e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} + E_{r3}e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \quad (35)$$

Para la condición en la que se considera a la componente tangencial de  $\vec{H}$ , se tiene:

$$\left[ \frac{1}{\mu_4} \vec{B}_4 - \frac{1}{\mu_3} \vec{B}_3 \right]_{z=d_2+d_3} \times \hat{k} = 0 \quad (36)$$

Sustituyendo los campos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_4} [q_{4z}(E_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)})\hat{j} - q_{4y}(E_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)})\hat{k}] \times \hat{k} \\ & - \frac{1}{\mu_3} [q_{3z}(E_{t3}e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - E_{r3}e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)})\hat{j} \\ & + q_{3y}(E_{t3}e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - E_{r3}e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)})\hat{k}] \times \hat{k} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Realizando el producto e igualando las componentes:

$$Z_4 E_{t4} e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = Z_3 E_{t3} e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - Z_3 E_{r3} e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \quad (38)$$

De (35) y (38) se encuentran

$$+2Z_4 E_{t4} e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = C_3 E_{t3} e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - D_3 E_{r3} e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \quad (39)$$

$$0 = D_3 E_{t3} e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - C_3 E_{r3} e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \quad (40)$$

Sustituyendo (31) y (32) en (39) y (40), se tiene:

$$\begin{aligned}
(2Z_2)(2Z_3)(2Z_4)E_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} \\
= [U'_2C_3e^{+iq_{3z}d_3} + U_2D_3e^{-iq_{3z}d_3}]E_{t1} \\
- [V'_2C_3e^{+iq_{3z}d_3} + V_2D_3e^{-iq_{3z}d_3}]E_{r1}
\end{aligned} \tag{41}$$

$$0 = [U'_2D_3e^{+iq_{3z}d_3} + U_2C_3e^{-iq_{3z}d_3}]E_{t1} - [V'_2D_3e^{+iq_{3z}d_3} + V_2C_3e^{-iq_{3z}d_3}]E_{r1} \tag{42}$$

Ahora, definiendo

$$V_3 = V'_2D_3e^{+iq_{3z}d_3} + V_2C_3e^{-iq_{3z}d_3} \tag{43}$$

$$U_3 = U'_2D_3e^{+iq_{3z}d_3} + U_2C_3e^{-iq_{3z}d_3} \tag{44}$$

$$V'_3 = V'_2C_3e^{+iq_{3z}d_3} + V_2D_3e^{-iq_{3z}d_3} \tag{45}$$

$$U'_3 = U'_2C_3e^{+iq_{3z}d_3} + U_2D_3e^{-iq_{3z}d_3} \tag{46}$$

se pueden reescribir las ecuaciones (41) y (42) como sigue:

$$(+2Z_2)(+2Z_3)(+2Z_4)E_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = U'_3E_{t1} - V'_3E_{r1} \tag{47}$$

$$0 = U_3E_{t1} - V_3E_{r1} \tag{48}$$

Las ecuaciones (13), (14), (31), (32), (47) y (48) muestran una gran similitud en su forma, y esto es precisamente lo que hace posible repetir el procedimiento para encontrar los coeficientes de transmisión y de reflexión en sistemas con diferente número de capas.

Por ejemplo, si se tiene el caso  $n_c = 1$ , de las ecuaciones (3) y (6), con  $E_{r2} = 0$ , se encuentra:

$$E_{t2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} E_{t1} = \frac{F_2}{C_1} E_{t1} = \frac{F_2}{V_1} E_{t1} \quad (49)$$

De igual manera para  $n_c = 2$ , de las ecuaciones (3) y (6) se obtiene una relación entre  $E_{t1}$ ,  $E_{t2}$  y  $E_{r2}$ . Reescribiendo  $E_{t2}$  y  $E_{r2}$  en términos de  $E_{t3}$  con las ecuaciones (17) y (20) se obtiene:

$$E_{t3} = \frac{(2Z_1)(2Z_2)}{V_2} e^{-iq_{3z}d_2} E_{t1} = \frac{F_3}{V_2} e^{-iq_{3z}d_2} E_{t1} \quad (50)$$

Finalmente, cuando se tiene  $n_c = 3$ , de la ecuación (48) inmediatamente se puede despejar  $E_{r1}$ :

$$E_{r1} = \frac{U_3}{V_3} E_{t1} \quad (51)$$

Sustituyendo  $E_{r1}$  dado por (51) en (47) y haciendo el álgebra correspondiente, se obtiene

$$E_{t4} = \frac{(2Z_2)(2Z_3)(2Z_4)}{V_3} e^{-iq_{4z}(d_2+d_3)} E_{t1} = \frac{F_4}{V_3} e^{-iq_{4z}(d_2+d_3)} E_{t1} \quad (52)$$

Al observar la similitud en las ecuaciones obtenidas durante este desarrollo, así como en las relaciones de las amplitudes transmitidas y reflejadas, la expresión (52) se puede generalizar de la siguiente manera para un sistema de  $n_c$  capas:

$$E_{t(n_c+2)} = (2Z_2)(2Z_3)(2Z_4) \dots (2Z_{n_c+2}) \frac{1}{V_{n_c+1}} e^{-iq_{(n_c+2)z}(d_2+d_3+\dots+d_{n_c+1})} E_{t1} \quad (53)$$

Llamando  $F_{n_c+2} = (2Z_2)(2Z_3)(2Z_4) \dots (2Z_{n_c+2})$  y definiendo el coeficiente de Fresnel, se tiene:

$$t_{n_c+2} = \frac{E_{t(n_c+2)}}{E_{t1}} = \frac{F_{n_c+2}}{V_{n_c+1}} e^{-iq_{(n_c+2)z}(d_2+d_3+\dots+d_{n_c+1})} \quad (54)$$

Esta es la ecuación que permite calcular los valores de transmisión al implementar un programa. Para calcular el coeficiente de transmisión, el algoritmo obtiene la norma al cuadrado de esta cantidad.

El coeficiente de transmisión para un sistema general de  $n_c$  capas se escribe entonces:

$$T_s = \frac{\mu_{(n_c+2)}}{\mu_1} \frac{q_{1z}}{q_{(n_c+2)z}} |t_{n_c+2}|^2 = \left| \frac{F_{n_c+2}}{V_{n_c+1}} e^{-iq_{(n_c+2)z}(d_2+d_3+\dots+d_{n_c+1})} \right|^2 \quad (55)$$

Con esta expresión, el programa obtiene los datos que se grafican y que resultan ser las curvas de transmisión. En caso de considerarse un sistema dispersivo, se tendría un valor de  $T_s$  para cada  $\lambda$  de acuerdo a los datos experimentales.

Por otro lado, el coeficiente de reflexión se puede generalizar para un sistema de  $n_c$  capas como sigue:

$$R_s = \left| \frac{U_{n_c+1}}{V_{n_c+1}} \right|^2 \quad (56)$$

Donde

$$V_{m+1} = V'_m D_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + V_m C_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

$$U_{m+1} = U'_m D_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + U_m C_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

$$V'_{m+1} = V'_m C_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + V_m D_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

$$U'_{m+1} = U'_m C_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + U_m D_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

Con  $m = 1, 2, \dots, n_c + 1$ , y además, se cumplen las condiciones iniciales (9-12).

La expresión (55) es el coeficiente de transmisión para el sistema. Este relaciona las amplitudes del campo eléctrico incidente y transmitido, como función de los grosores de las capas, el ángulo de incidencia y la polarización.

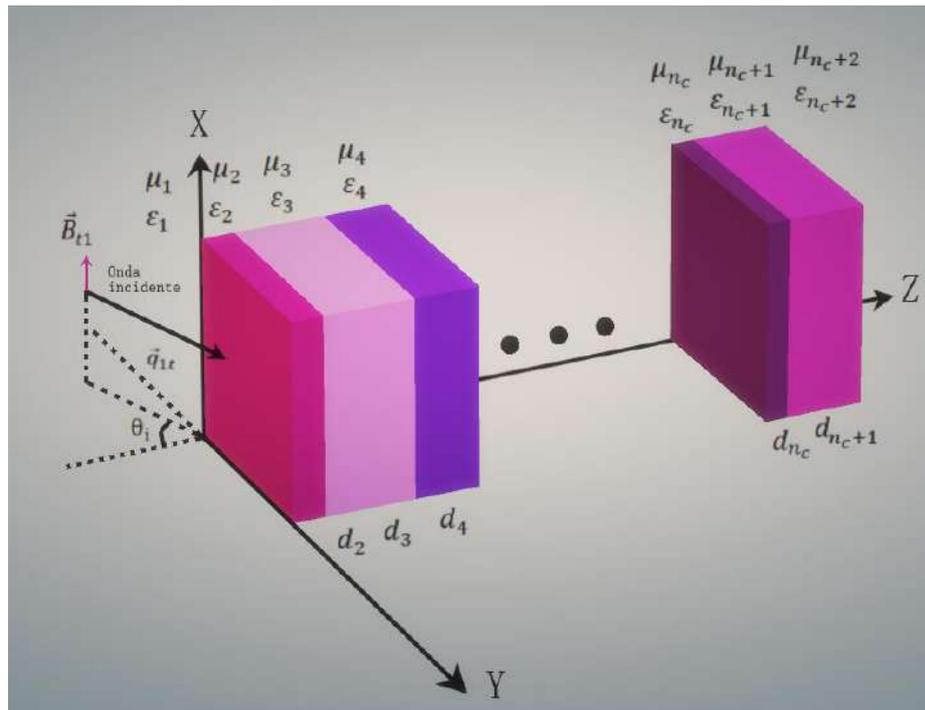
Por otro lado, la ecuación (56) es el coeficiente de reflexión. Este relaciona las amplitudes del campo eléctrico incidente y reflejado, como función de los grosores de las capas, el ángulo de incidencia y la polarización.

Esta expresión ilustra la dependencia de los grosores de las capas en los argumentos de las exponenciales. Debido a este término, se tienen máximos y mínimos como consecuencia de los efectos de interferencia constructiva y destructiva del coeficiente de reflexión.

## 2.0 Polarización P

Se considera un sistema de  $n_c$  capas y un número  $n_m = n_c + 2$  de medios.

En este caso, la dirección del campo eléctrico será paralela al plano de incidencia. Para esta polarización, se considera a la onda incidente como sigue, de acuerdo con la figura (2):



*Figura 3. Onda plana monocromática electromagnética incidente en polarización p que incide oblicuamente sobre el sistema. La multicapa está conformada por  $n_c$  capas de materiales diferentes, y está rodeada por dos medios semi-infinitos. Los grosores de capa se indican con  $d_2, d_3, \dots, d_{n_c+1}$ , mientras que las permitividades se indican con  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n_c+1}, \epsilon_{n_c+2}$ , y las permeabilidades con  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n_c+1}, \mu_{n_c+2}$ .*

De acuerdo con la forma general de expresar las ondas planas que satisfacen a la ecuación de onda electromagnética (ver apéndice 1) se tiene:

$$\vec{E}_n = \frac{1}{\varepsilon_n \mu_n \omega} [q_{nz} (B_{tn} e^{i(\vec{q}_{nt} \cdot \vec{r} - \omega t)} - B_{nr} e^{i(\vec{q}_{nr} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \hat{j} - q_{ny} (B_{tn} e^{i(\vec{q}_{nt} \cdot \vec{r} - \omega t)} - B_{rn} e^{i(\vec{q}_{nr} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \hat{k}]$$

$$\vec{B}_n = [B_{tn} e^{i(\vec{q}_{nt} \cdot \vec{r} - \omega t)} + B_{rn} e^{i(\vec{q}_{nr} \cdot \vec{r} - \omega t)}] \hat{i}$$

Donde

$$\vec{q}_{nt} = q_{ny} \hat{j} + q_{nz} \hat{k}$$

$$\vec{q}_{nr} = q_{ny} \hat{j} - q_{nz} \hat{k}$$

Con  $n = 1, 2, 3, \dots, n_{c+2}$  y donde  $\mu_n$  y  $\varepsilon_n$  son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del medio correspondiente.

Debido a que el procedimiento es en esencia el mismo que se siguió en la sección anterior (Polarización S), se aprovechará la analogía para omitir pasos en este desarrollo.

Aplicando las condiciones en la frontera en  $z = 0$ , se obtiene la siguiente pareja de ecuaciones:

$$H_{t2} + H_{r2} = H_{t1} + H_{r1} \quad (57)$$

$$Z_2 H_{t2} - Z_2 H_{r2} = Z_1 H_{t1} - Z_1 H_{r1} \quad (58)$$

Donde  $Z_i = \frac{q_{iz}}{\varepsilon_i}$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, n_c + 1$ , y recordando que  $B = \mu H$ .

De (57) y (58) se encuentran

$$+2Z_2 H_{t2} = U'_1 H_{t1} - V'_1 H_{r1} \quad (59)$$

$$-2Z_2H_{r2} = U_1H_{t1} - V_1H_{r1} \quad (60)$$

Sabiendo que  $C_i = Z_i + Z_{i+1}$ ,  $D_i = Z_i - Z_{i+1}$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots$ , y se considera que se cumple:

$$V'_1 = D_1 \quad (61)$$

$$V_1 = C_1 \quad (62)$$

$$U'_1 = C_1 \quad (63)$$

$$U_1 = D_1 \quad (64)$$

Como se verá más adelante, estas  $U$  y  $V$  serán los valores iniciales de la recurrencia.

Continuando en la frontera en  $Z = d_2$ , se tienen

$$H_{t3}e^{i(q_{3z}d_2)} + H_{r3}e^{-i(q_{3z}d_2)} = H_{t2}e^{i(q_{2z}d_2)} + H_{r2}e^{-i(q_{2z}d_2)} \quad (65)$$

$$Z_3 H_{t3}e^{i(q_{3z}d_2)} - Z_3 H_{r3}e^{-i(q_{3z}d_2)} = Z_2 H_{t2}e^{i(q_{2z}d_2)} - Z_2 H_{r2}e^{-i(q_{2z}d_2)} \quad (66)$$

De (65) y (66) se encuentran

$$+2Z_3H_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} = C_2H_{t2}e^{+iq_{2z}d_2} - D_2H_{r2}e^{-iq_{2z}d_2} \quad (67)$$

$$-2Z_3H_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} = D_2H_{t2}e^{+iq_{2z}d_2} - C_2H_{r2}e^{-iq_{2z}d_2} \quad (68)$$

Sustituyendo (59) y (60) en (67) y (68) se obtienen

$$\begin{aligned}
(+2Z_2)(+2Z_3)H_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} \\
= [U_1' C_2 e^{+iq_{2z}d_2} + U_1 D_2 e^{-iq_{2z}d_2}] H_{t1} \\
- [V_1' C_2 e^{+iq_{2z}d_2} + V_1 D_2 e^{-iq_{2z}d_2}] H_{r1}
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
(-2Z_2)(+2Z_3)H_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} \\
= [U_1' D_2 e^{+iq_{2z}d_2} + U_1 C_2 e^{-iq_{2z}d_2}] H_{t1} \\
- [V_1' D_2 e^{+iq_{2z}d_2} + V_1 C_2 e^{-iq_{2z}d_2}] H_{r1}
\end{aligned} \tag{70}$$

Definiendo

$$V_2 = V_1' D_2 e^{+iq_{2z}d_2} + V_1 C_2 e^{-iq_{2z}d_2} \tag{71}$$

$$U_2 = U_1' D_2 e^{+iq_{2z}d_2} + U_1 C_2 e^{-iq_{2z}d_2} \tag{72}$$

$$V_2' = V_1' C_2 e^{+iq_{2z}d_2} + V_1 D_2 e^{-iq_{2z}d_2} \tag{73}$$

$$U_2' = U_1' C_2 e^{+iq_{2z}d_2} + U_1 D_2 e^{-iq_{2z}d_2} \tag{74}$$

se pueden reescribir las ecuaciones (69) y (70) como sigue:

$$(+2Z_2)(+2Z_3)H_{t3}e^{+iq_{3z}d_2} = U_2' H_{t1} - V_2' H_{r1} \tag{75}$$

$$(-2Z_2)(+2Z_3)H_{r3}e^{-iq_{3z}d_2} = U_2 H_{t1} - V_2 H_{r1} \tag{76}$$

Se puede observar que las ecuaciones (75) y (76) tienen una forma similar a (59) y (60). Estas relacionan las amplitudes del campo reflejado y transmitido del medio 3 con el medio 1.

Se considera que la multicapa consta de 4 medios para ilustrar la recursividad del método.

Esto con el fin de generalizarlo para un sistema de  $n_c$  capas. En este ejemplo  $n_c = 2$ .

Entonces, en la frontera  $z = d_2 + d_3$  se tienen:

$$H_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = H_{t3}e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} + H_{r3}e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \tag{77}$$

$$Z_4 H_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = Z_3 H_{t3}e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - Z_3 H_{r3}e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \tag{78}$$

De las ecuaciones (77) y (78) se encuentran

$$+2Z_4 H_{t4} e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = C_3 H_{t3} e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - D_3 H_{r3} e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \quad (79)$$

$$0 = D_3 H_{t3} e^{+iq_{3z}(d_2+d_3)} - C_3 H_{r3} e^{-iq_{3z}(d_2+d_3)} \quad (80)$$

Sustituyendo (75) y (76) en (79) y (80), se tiene:

$$\begin{aligned} (2Z_2)(2Z_3)(2Z_4)H_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} \\ = [U'_2 C_3 e^{+iq_{3z}d_3} + U_2 D_3 e^{-iq_{3z}d_3}]H_{t1} \\ - [V'_2 C_3 e^{+iq_{3z}d_3} + V_2 D_3 e^{-iq_{3z}d_3}]H_{r1} \end{aligned} \quad (81)$$

$$0 = [U'_2 D_3 e^{+iq_{3z}d_3} + U_2 C_3 e^{-iq_{3z}d_3}]H_{t1} - [V'_2 D_3 e^{+iq_{3z}d_3} + V_2 C_3 e^{-iq_{3z}d_3}]H_{r1} \quad (82)$$

Ahora, definiendo

$$V_3 = V'_2 D_3 e^{+iq_{3z}d_3} + V_2 C_3 e^{-iq_{3z}d_3} \quad (83)$$

$$U_3 = U'_2 D_3 e^{+iq_{3z}d_3} + U_2 C_3 e^{-iq_{3z}d_3} \quad (84)$$

$$V'_3 = V'_2 C_3 e^{+iq_{3z}d_3} + V_2 D_3 e^{-iq_{3z}d_3} \quad (85)$$

$$U'_3 = U'_2 C_3 e^{+iq_{3z}d_3} + U_2 D_3 e^{-iq_{3z}d_3} \quad (86)$$

se pueden reescribir las ecuaciones (81) y (82) como sigue:

$$(+2Z_2)(+2Z_3)(+2Z_4)H_{t4}e^{+iq_{4z}(d_2+d_3)} = U_3'H_{t1} - V_3'H_{r1} \quad (87)$$

$$0 = U_3H_{t1} - V_3H_{r1} \quad (88)$$

Las ecuaciones (59),(60),(75),(76),(87) y (88) muestran una gran similitud en su forma, y esto es precisamente lo que hace posible repetir el procedimiento para encontrar los coeficientes de transmisión y de reflexión en sistemas con diferente número de capas.

Por ejemplo, si se tiene el caso  $n_c = 1$ , de las ecuaciones (57) y (58), con  $H_{r2} = 0$ , se encuentra:

$$H_{t2} = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}H_{t1} = \frac{F_2}{C_1}H_{t1} = \frac{F_2}{V_1}H_{t1} \quad (89)$$

De igual manera para  $n_c = 2$ , de las ecuaciones (57) y (58) se obtiene una relación entre  $H_{t1}$ ,  $H_{t2}$  y  $H_{r2}$ . Reescribiendo  $H_{t2}$  y  $H_{r2}$  en términos de  $H_{t3}$  con las ecuaciones (65) y (66) se obtiene:

$$H_{t3} = \frac{(2Z_1)(2Z_2)}{V_2}e^{-iq_{3z}d_2}H_{t1} = \frac{F_3}{V_2}e^{-iq_{3z}d_2}H_{t1} \quad (90)$$

Finalmente, cuando se tiene  $n_c = 3$ , de la ecuación (88) inmediatamente se ve que:

$$H_{r1} = \frac{U_3}{V_3}H_{t1} \quad (91)$$

Sustituyendo  $E_{r1}$  dado por (88) en (87) y haciendo el álgebra correspondiente, se obtiene

$$H_{t4} = \frac{(2Z_2)(2Z_3)(2Z_4)}{V_3} e^{-iq_{4z}(d_2+d_3)} H_{t1} = \frac{F_4}{V_3} e^{-iq_{4z}(d_2+d_3)} H_{t1} \quad (92)$$

Al observar la similitud en las ecuaciones obtenidas durante este desarrollo, así como en las relaciones de las amplitudes transmitidas y reflejadas, la expresión (92) se puede generalizar de la siguiente manera para un sistema de  $n_c$  capas:

$$H_{t(n_c+2)} = (2Z_2)(2Z_3)(2Z_4) \dots (2Z_{n_c+2}) \frac{1}{V_{n_c+1}} e^{-iq_{(n_c+2)z}(d_2+d_3+\dots+d_{n_c+1})} H_{t1} \quad (93)$$

Llamando  $F_{n_c+2} = (2Z_2)(2Z_3)(2Z_4) \dots (2Z_{n_c+2})$  y definiendo el coeficiente de Fresnel, se tiene:

$$t_{n_c+2} = \frac{H_{t(n_c+2)}}{H_{t1}} = \frac{F_{n_c+2}}{V_{n_c+1}} e^{-iq_{(n_c+2)z}(d_2+d_3+\dots+d_{n_c+1})} \quad (94)$$

Esta es la ecuación que permite calcular los valores de transmisión al implementar un programa. Para calcular el coeficiente de transmisión, el algoritmo obtiene la norma al cuadrado de esta cantidad.

El coeficiente de transmisión en polarización p para un sistema general de  $n_c$  capas se escribe entonces:

$$T_p = \left| \frac{F_{n_c+2}}{V_{n_c+1}} e^{-iq_{(n_c+2)z}(d_2+d_3+\dots+d_{n_c+1})} \right|^2 \quad (95)$$

Con esta expresión, el programa obtiene los datos que se grafican y que resultan ser las curvas de transmisión. En caso de considerarse un sistema dispersivo, se tendría un valor de  $T_s$  para cada  $\lambda$  de acuerdo a los datos experimentales.

Por otro lado, el coeficiente de reflexión se puede generalizar para un sistema de  $n_c$  capas como sigue:

$$R_p = \left| \frac{U_{n_c+1}}{V_{n_c+1}} \right|^2 \quad (96)$$

Donde

$$V_{m+1} = V'_m D_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + V_m C_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

$$U_{m+1} = U'_m D_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + U_m C_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

$$V'_{m+1} = V'_m C_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + V_m D_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

$$U'_{m+1} = U'_m C_{m+1} e^{iq_{(m+1)z}(d_m)} + U_m D_{m+1} e^{-iq_{(m+1)z}(d_m)}$$

Con  $m = 1, 2, \dots, n_c + 1$ , y además, se cumplen las condiciones iniciales (61-64).

La expresión (96) es el coeficiente de reflexión considerando que la onda electromagnética se encuentra en polarización p. Este relaciona las amplitudes del campo eléctrico incidente y reflejado, como función de los grosores de las capas, el ángulo de incidencia y la polarización.

A los cocientes de las amplitudes se les conoce como coeficientes de Fresnel. A incidencia normal, las expresiones toman la misma forma, y por ende, se obtienen los mismos valores para los coeficientes de transmisión y reflexión en s y p.

Se puede observar que los coeficientes de reflexión (56) y (96) tienen la misma forma, a pesar de ser consideradas diferentes polarizaciones, difiriendo únicamente en los factores  $\frac{1}{\mu}$  y  $\frac{1}{\varepsilon}$  que acompañan a la expresión en cada caso.

Sin embargo, en el caso de incidencia oblicua, el coeficiente de transmisión en polarización p difiere a lo obtenido en polarización s. Esto se comprueba en el capítulo de resultados numéricos, y también puede leerse con más detalle en el apéndice (2).

En este capítulo se ilustró el procedimiento que se sigue con el método recursivo para sistemas conformados por un número indefinido de capas. Se resolvió el problema para un sistema considerando  $n_m$  medios, de tal forma que se obtuvieron expresiones generales para el cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión. Con estos se pueden obtener resultados numéricos, como los que se mostrarán en el siguiente capítulo.

Se implementó la automatización del método con un programa de cómputo en lenguaje FORTRAN, con el cual fue posible obtener curvas de transmisión y reflexión de distintos sistemas, variando el número de capas alternadas, los grosores de estas, materiales y ángulo de incidencia.

### 3.0 Grosor de la capa de un dieléctrico en un cristal fotónico 1D con componentes dieléctricas

En esta sección se procede a obtener una expresión para calcular el grosor de una capa de material dieléctrico en un sistema metal-dieléctrico. El propósito es el de elegir adecuadamente los grosores de las capas que conforman el cristal fotónico en cuestión, de tal manera que la PBG se encuentre centrada en la longitud de onda  $\lambda_c$  que se elija.

Se sabe que, cuando se tiene un cristal fotónico conformado por dos materiales dieléctricos, es posible calcular los grosores de las capas, de acuerdo a la longitud de onda para la cual se desea centrar la PBG. Esta relación está dada por:

$$d_k = \frac{\lambda_c}{4n_k} \quad (97)$$

Donde  $d_k$  es el grosor físico de la capa,  $\lambda_c$  es la longitud de onda en la cual se centra la PBG, y  $n_k$  es el índice de refracción del material, con  $k=2, 3$ . Uno de los materiales tiene índice de refracción bajo y el otro alto. Esta ecuación es válida en general para materiales cuyo índice de refracción es real.

Así el periodo del cristal fotónico es

$$a_p = d_2 + d_3$$

Sin embargo, cuando se tiene un material cuyo índice de refracción es complejo, (es decir que presenta absorción, por ejemplo, un metal), ya no se puede recurrir a esta relación (97).

La fórmula (97) es empleada desde hace mucho tiempo en el campo denominado capa interferencial óptica (Optical Interference Coating OIC) para diseñar espejos multidieléctricos.

#### 4.0 Grosor de la capa de un dieléctrico en un cristal fotónico con componente metálica

Para calcular el grosor de una de las capas del sistema metal-dieléctrico, es necesario hacer consideraciones respecto al índice de refracción complejo, como se verá en esta sección.

Como se vio en la sección 2.1, la amplitud del campo eléctrico dentro de la película puede escribirse como

$$\vec{E}_2 = 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} \frac{1}{V_2} [C_2 e^{+iq_{z2}(z-d_2)} + D_2 e^{-iq_{z2}(z-d_2)}] e^{iq_y y} e^{-i\omega t} E_{t1} \hat{i} \quad (98)$$

Vamos a considerar incidencia normal y que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , entonces, el módulo cuadrado del campo eléctrico en la película

$$|\vec{E}_2|^2 = \left| 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} \frac{1}{V_2} \right|^2 \frac{1}{\mu_0} \left| \left( \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2 \omega^2 - q_y^2} + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{3r} \omega^2 + i\mu_0 \varepsilon_{3i} \omega^2 - q_y^2} \right) e^{+iq_{z2}(z-d_2)} + \left( \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2 \omega^2 - q_y^2} - \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{3r} \omega^2 + i\mu_0 \varepsilon_{3i} \omega^2 - q_y^2} \right) e^{-iq_{z2}(z-d_2)} \right|^2 \quad (99)$$

En el caso particular de incidencia normal, se cumple  $q_y = 0$  y  $q_{z2} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \omega$

$$|\vec{E}_2|^2 = \left| 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} \frac{1}{V_2} \right|^2 \frac{\omega}{\mu_0} \left| \left( \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{3r} + i\mu_0 \varepsilon_{3i}} \right) e^{+i\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \omega (z-d_2)} + \left( \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} - \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{3r} + i\mu_0 \varepsilon_{3i}} \right) e^{-i\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \omega (z-d_2)} \right|^2 \quad (100)$$

Reescribiendo en términos de los índices de refracción:

$$|\vec{E}_2|^2 = \left| 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} \frac{1}{V_2} \right|^2 \frac{\omega}{\mu_0} \left| (n_2 + n_3 + ik_3) e^{+i\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \omega (z-d_2)} + (n_2 - n_3 - ik_3) e^{-i\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \omega (z-d_2)} \right|^2 \quad (101)$$

Como esta es una cantidad compleja, puede expresarse de la siguiente manera

$$a + ib = c \exp(i\vartheta) \quad (102)$$

Entonces:

$$n_2 + n_3(\lambda) + ik_3(\lambda) = c\cos(\vartheta) + ic\sin(\vartheta) \quad (103)$$

Separando la parte real y la parte imaginaria:

$$n_2 + n_3(\lambda) = c_1\cos(\vartheta) \quad (104)$$

$$k_3(\lambda) = c_1\sin(\vartheta) \quad (105)$$

Dividiendo (105) y (104):

$$\frac{k_3(\lambda)}{n_2 + n_3(\lambda)} = \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \quad (106)$$

$$\frac{k_3(\lambda)}{n_2 + n_3(\lambda)} = \tan(\vartheta) \quad (107)$$

De (106), se despeja  $\vartheta$ :

$$\vartheta_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{k_3(\lambda)}{n_2 + n_3(\lambda)} \right] \quad (108)$$

Ahora, de las ecs. (104) y (105), se obtiene:

$$c_1 = \sqrt{(n_2 + n_3)^2 + k_3^2} \quad (109)$$

Para

$$n_2 - n_3(\lambda) - ik_3(\lambda) = c_2\cos(\vartheta) + ic_2\sin(\vartheta) \quad (110)$$

se obtiene:

$$c_2 = \sqrt{(n_2 - n_3)^2 + k_3^2} \quad (111)$$

y

$$\vartheta_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{-k_3(\lambda)}{n_2 - n_3(\lambda)} \right] \quad (112)$$

Trabajando con la ecuación (101),

$$\begin{aligned}\sigma &= (n_2 + n_3 + ik_3)e^{+in_2\frac{\omega}{c}d_2} + (n_2 - n_3 - ik_3)e^{-in_2\frac{\omega}{c}d_2} \\ &= c_1e^{i\vartheta_1+in_2\frac{\omega}{c}d_2} + c_2e^{i\vartheta_2-in_2\frac{\omega}{c}d_2}\end{aligned}\quad (113)$$

El módulo cuadrado

$$|\sigma|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + 2c_1c_2\cos\left(2n_2\frac{\omega}{c}d_2 + \vartheta_1 - \vartheta_2\right)\quad (114)$$

Se sabe que  $\cos\left(2n_2\frac{\omega}{c}d_2 + \vartheta_1 - \vartheta_2\right) = 1$ , cuando se cumple:

$$2n_2\frac{\omega}{c}d_2 + \vartheta_1 - \vartheta_2 = m\pi, \text{ con } m = 1,2,3, \dots\quad (115)$$

Se cumple que  $\omega/c = 2\pi/\lambda_c$ :

$$\frac{4n_2\pi}{\lambda_c}d_2 + \vartheta_1 - \vartheta_2 = m\pi, \text{ con } m = 1,2,3, \dots\quad (116)$$

Despejando  $d_2$  y sustituyendo  $\vartheta_1$  y  $\vartheta_2$  en la ecuación anterior:

$$d_2 = \frac{\lambda_c}{4n_2} \left[ m + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{-k_3(\lambda_c)}{n_2 - n_3(\lambda_c)} \right] - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{k_3(\lambda_c)}{n_2 + n_3(\lambda_c)} \right] \right]\quad (117)$$

Con esta expresión es posible calcular el grosor del material dieléctrico en un sistema metal-dieléctrico, considerando dispersión. Para el problema de interés en este trabajo, es de gran importancia obtener el grosor adecuado, considerando las características del metal, ya que esto permite centrar la PBG en una longitud de onda de interés.

También observa que, en el caso de no considerar el índice de absorción, es decir si  $k_3(\lambda) = 0$ , se tiene la expresión (97) para un sistema conformado por materiales dieléctricos mencionada al principio de esta sección.

# CAPÍTULO 3

## RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se estudia la respuesta óptica de una estructura multicapa, tipo “cristal” fotónico uni-dimensional, compuesta por dos materiales alternados; uno dieléctrico y el otro metálico.

Se presentan los resultados obtenidos a partir de la elaboración de un programa en el lenguaje FORTRAN para el sistema, basado en el cálculo desarrollado en el capítulo anterior.

Se obtuvieron resultados para la reflexión y transmisión para polarizaciones (s y p) de un sistema multicapas con parte metálica, variando el ángulo de incidencia, el grosor y el número de capas, obteniendo así distintos resultados, cuya interpretación se incluye en esta sección.

Se utilizaron las ecuaciones obtenidas para los coeficientes de transmisión y reflexión obtenidos en el capítulo 2.

Se tomaron los datos del índice de refracción complejo de la plata del libro “Handbook of Optical Constants of Solids” Editado por E. Palik ([11]).

El sistema es un cristal fotónico con componente de Plata (Ag) y se encuentra representado en la figura (4):

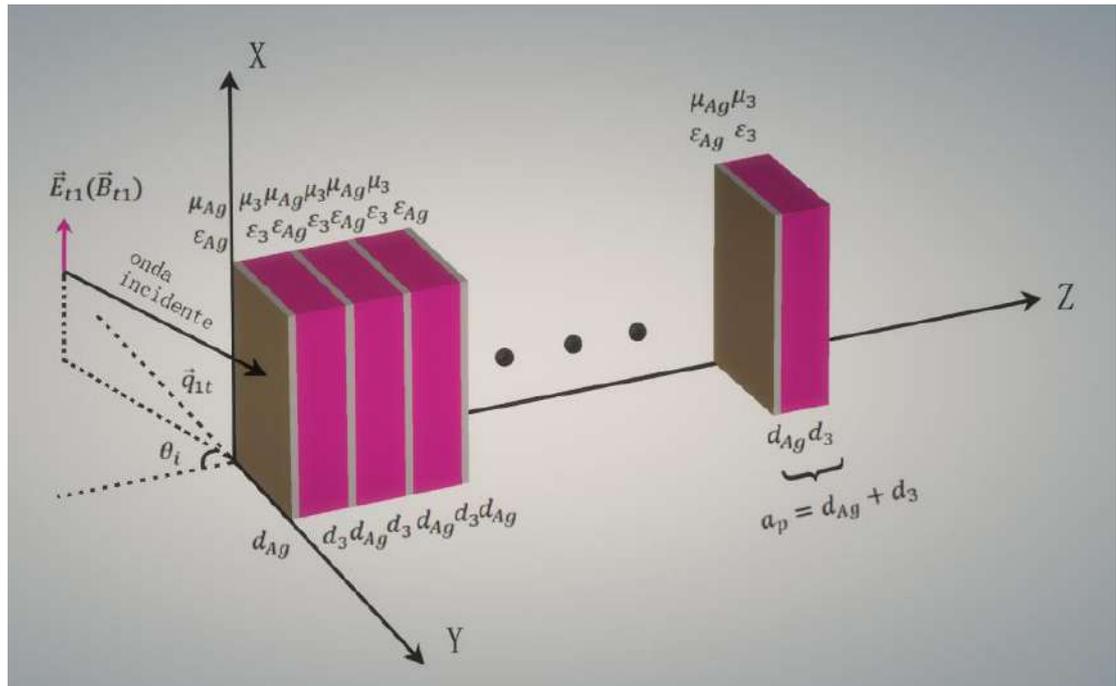


Figura 4. Cristal fotónico unidimensional con parte metálica. El sistema está rodeado por vacío  $\epsilon_1 = \epsilon_{n_c+2} = 1$ . Las permitividades de los materiales están indicadas por  $\epsilon_3$  y  $\epsilon_{Ag}$ , las permeabilidades son  $\mu_3$  y  $\mu_{Ag}$  y los grosores son  $d_3$  y  $d_{Ag}$ . El periodo del cristal fotónico es  $a_p = d_{Ag} + d_3$ .

Se muestran e interpretan los resultados para sistemas con distinta cantidad de medios, variando los parámetros mencionados anteriormente.

Se señalan las diferencias más notorias entre los sistemas, ya que el comportamiento obtenido en las curvas resultó muy similar al abordado en la teoría estudiada.

## 5.0 Sistema de una superficie metálica de plata

En esta sección se presentan los espectros de reflexión para un medio semi-infinito compuesto por plata en contacto con vacío. Los comportamientos observados en el espectro de reflexión, son representativos de las características propias de un metal noble.

Con el fin de tener una precisión adecuada de los valores utilizados para la Plata (de 1 nm en este caso), se realizó una interpolación de los datos proporcionado en [11] para este material, de tal manera que se obtuvieran valores consecutivos para el índice de refracción y el índice de absorción, en un rango de longitudes de onda entre 200 nm y 900 nm.

El medio adyacente a la plata es el vacío. En la mayoría de los casos presentes en este capítulo, se tomó un ángulo fijo, aunque este puede ser variado en el problema, esto con el fin de darle claridad a la presentación.

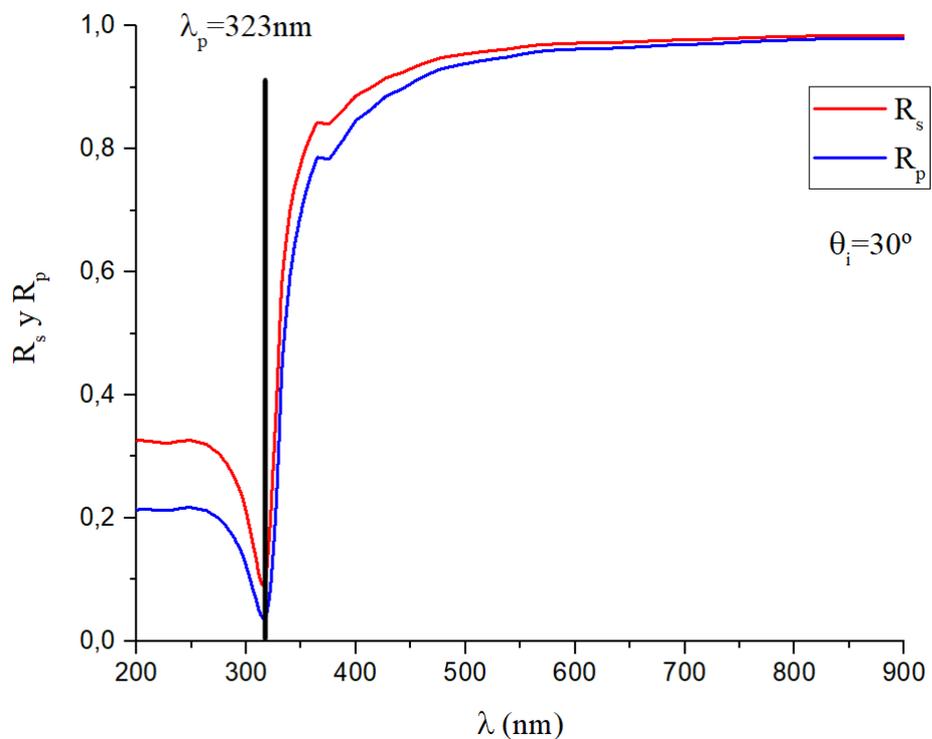


Figura 5. Reflexión vs longitud de onda, en polarización  $s$  (roja) y  $p$  (azul), por una capa metálica de plata (Ag) con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ .

La figura 5 muestra la reflexión vs longitud de onda para una superficie metálica de plata, la cual se encuentra en interacción con una onda plana electromagnética linealmente polarizadas. La curva roja corresponde a la obtenida para la polarización s y la azul para la polarización p, con un ángulo de incidencia  $\theta=30^\circ$ . Se observa un comportamiento similar entre ambas curvas, debido a que la forma de las funciones obtenidas para cada polarización coincide, difiriendo únicamente en los factores que involucran a la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética.

En ambas gráficas el mínimo se alcanza en 323nm, siendo este valor correspondiente a la frecuencia de plasma. Este parámetro resulta ser característico del material, e indica el punto a partir del cual la reflexión aumenta rápidamente hasta alcanzar su valor máximo [13]. Cuando la curva llega a 1, se tiene la implicación física de que la luz incidente en la superficie es reflejada y no se presenta transmisión.

Para este caso,  $\mu_0 = 1$ , debido a que se tiene como medio adyacente vacío; por otro lado,  $\varepsilon = (n + ik)^2$ , el cual varía con la longitud de onda, según los datos experimentales utilizados.

Esto se puede observar en las siguientes curvas:

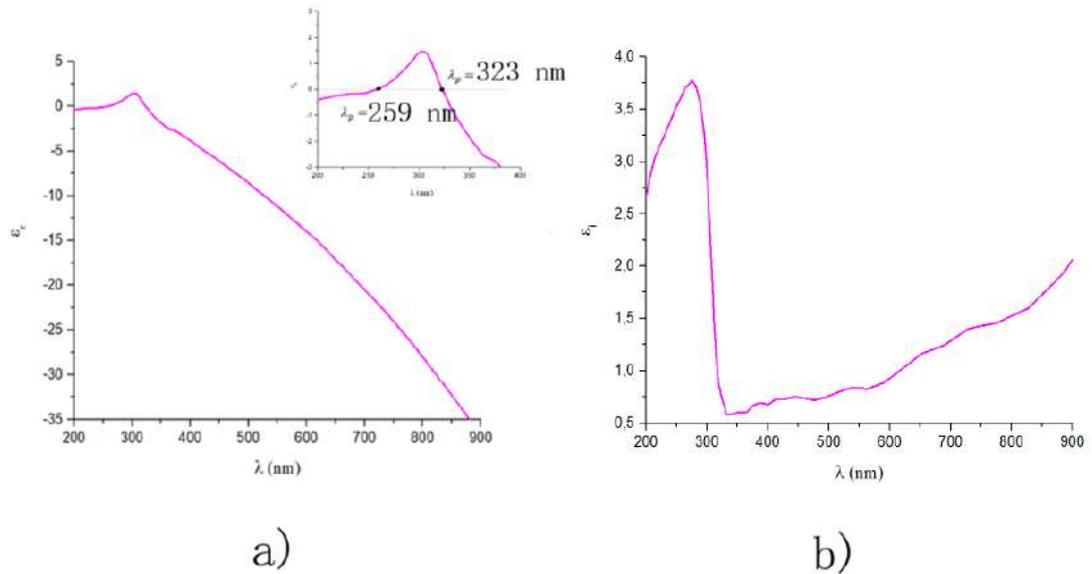


Figura 6. a) Parte real de la permitividad dieléctrica de la plata.  $\epsilon_r$  vs  $\lambda$  [11], en el recuadro se muestra la misma curva en un intervalo más pequeño de frecuencias y alrededor de la frecuencia de plasma. b) Parte imaginaria de la permitividad dieléctrica de la plata  $\epsilon_i$  vs  $\lambda$ .

En metales, el índice de refracción es complejo, por lo que, al calcular la permitividad eléctrica, también se tiene una parte real y una parte imaginaria.

En la curva correspondiente a la parte real de la permitividad de la plata (6a), el valor de la longitud de onda en el cual la curva llega al valor cero, es el correspondiente a la frecuencia de plasma. Debido a que se está considerando un metal real, las contribuciones de los electrones ligados al núcleo, se observan en el aumento de la permitividad a partir de la frecuencia de plasma, antes de comenzar a disminuir y tomar valores negativos.

Las curvas en ambas polarizaciones (Figura 6) comienzan en distintos valores del coeficiente de reflexión, debido a la diferencia en las expresiones (56) y (96), pero en aproximadamente 323 nm (frecuencia de plasma), disminuyen abruptamente y después aumentan casi inmediatamente, a partir del mismo valor.

Se puede observar que, en el rango de longitudes de onda de 200nm a 323nm (o frecuencia de plasma), la parte real de la permitividad es positiva, mientras que la parte imaginaria aumenta antes de disminuir rápidamente. Por otro lado, cuando los valores de  $\epsilon_r$  son negativos, en la figura 6b) se puede notar que  $\epsilon_i$  decae y se mantiene cercana a 0.5, es decir, la absorción es baja y por lo tanto, la reflexión aumenta, como se puede apreciar en la figura 5.

Debido a que el interés de este trabajo es el de estudiar los efectos debido a la parte metálica del sistema propuesto, es de gran importancia comenzar por ilustrar el comportamiento de una sola superficie de plata, como se hizo en esta sección.

Posteriormente se presentará el efecto debido a la variación en el grosor de esta misma superficie, de tal manera que se pueda intuir si existe una dependencia de este parámetro con lo observado en las curvas de reflexión del mismo sistema, considerando el mismo ángulo de incidencia.

A partir de este resultado, es posible explicar cómo esta parte influye en los resultados que se presentan en las secciones posteriores.

## **6.0 Una capa metálica**

En esta sección se procede a observar el comportamiento de la luz al incidir sobre una capa metálica de plata rodeada de vacío. El propósito es comprender estos resultados utilizando como fundamentos lo que se vio en la sección anterior, donde solo se tiene una superficie del mismo material. Con esto, se pretende comenzar por estudiar sistemas simples, de tal manera que cuando se calculen los espectros de reflexión y transmisión para un multicapa, ya se tenga un entendimiento previo sobre las propiedades ópticas de los materiales que lo componen.

En las capas metálicas no se presentan los efectos de interferencia con el espesor, como en capas dieléctricas, pero el campo decae exponencialmente y como consecuencia los espectros dependen fuertemente de este parámetro.

En la figura 7 se muestran los espectros de transmisión y reflexión para ambas polarizaciones para una sola capa de plata de diferentes grosores, todas con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . Se observa que entre mayor sea el grosor de esta, la reflexión aumenta y el pozo alrededor de la frecuencia de plasma se torna más pronunciado. Esto se predice por la dependencia del grosor de la capa con la expresión para la reflexión. Se tiene un mínimo en el valor donde la permitividad eléctrica del metal tiene un máximo (figura 6), y la reflexión aumenta de manera abrupta. Como las curvas de transmisión son recíprocas a las de reflexión, les ocurre lo contrario, y cuando se grafican juntas se aprecia que el máximo se pronuncia más cerca del valor asociado a la frecuencia de plasma. Esto da indicios de que, tanto la reflexión como la transmisión dependen del grosor de la capa de plata, y por lo tanto, en una estructura dieléctrico-metal, se observarán cambios en los espectros cuando se varíe el grosor de esta.

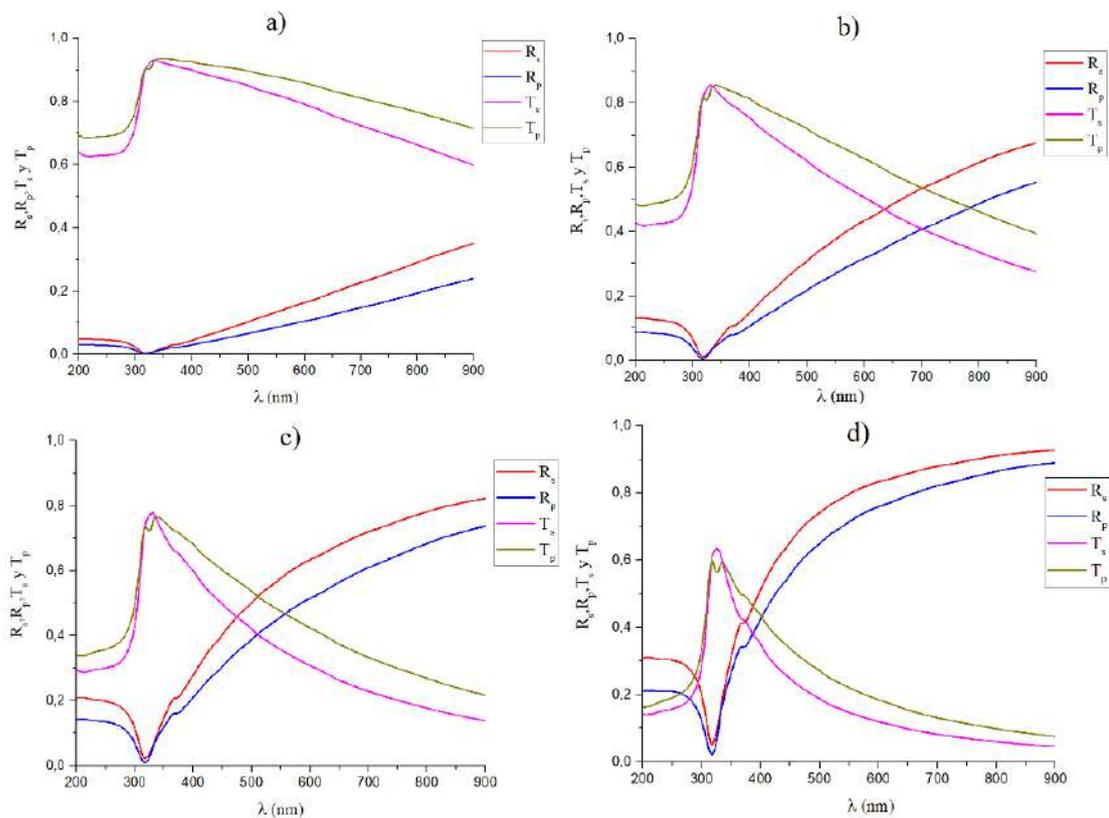


Figura 7. Espectros de reflexión y transmisión en polarización  $s$  y  $p$  (indicadas en la figura,  $R_s$  color rojo,  $R_p$  color azul,  $T_s$  Color magenta y  $T_p$  color mostaza), para una capa de plata con grosores de a) 5 nm, b) 10 nm, c) 15 nm y d) 25 nm, a un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ .

Nótese cómo el mínimo en el valor de reflexión para ambas polarizaciones corresponde a la frecuencia de plasma el cual permanece inalterado, así como el aumento en la reflexión a partir de este punto. Por otro lado, si se comparan los valores del coeficiente de transmisión, cuando el grosor de la plata aumenta, esta disminuye gradualmente. Esto es consecuencia del índice de refracción complejo del metal, es decir, como el material presenta absorción, se espera que el máximo que alcanza la transmisión no permanezca constante.

Con estos resultados se puede concluir que, en definitiva, el grosor de una capa metálica juega un papel en el comportamiento de la luz al incidir sobre esta. Se pudo observar a través de los espectros de reflexión y transmisión cómo la variación de este parámetro influye en los valores que los coeficientes toman. Es notoria la presencia de absorción por parte de la plata, al ir disminuyendo el máximo de la transmisión a medida que el grosor de la capa aumenta.

También se tiene como resultado importante, el hecho de que la curva de reflexión se asemeja cada vez más a la figura 5, la cual corresponde a una superficie de plata rodeada de vacío. Entre mayor es el grosor de la capa presentada en la figura 8, el comportamiento del sistema pareciera aproximarse a la situación que se expuso en la sección anterior.

Como se mencionó anteriormente, la dependencia observada del grosor de la capa con la reflexión es uno de los efectos que se utilizarán como sustento para la interpretación física de los resultados que se presentan posteriormente a lo largo de este capítulo.

## **7.0 Una capa dieléctrica**

El propósito de esta sección es observar el efecto producido en los espectros de reflexión y transmisión de una capa de material dieléctrico, debido a la variación del grosor de la misma.

Es importante realizar una comparación entre el resultado de la sección pasada y el que se presenta en esta, debido a que estos comportamientos comprenden la base de la

interpretación física de sistemas más complicados, por ejemplo un multicapa que contenga ambos tipos de materiales.

En la siguiente figura, se tiene una comparación de las curvas de reflexión para una sola capa de  $\text{SiO}_2$  con diferentes grosores, todas a un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ :

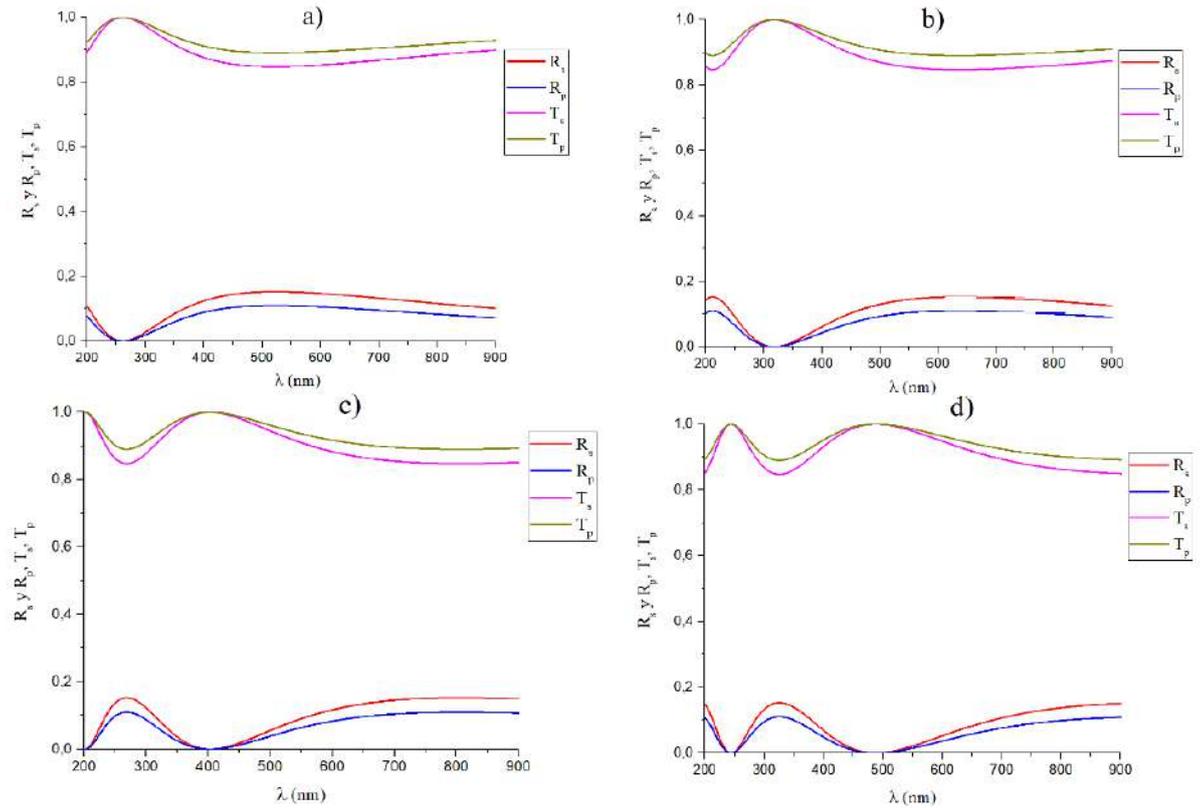


Figura 8. Espectros de reflexión y transmisión en polarización  $s$  y  $p$  (indicadas en la figura  $R_s$  color rojo,  $R_p$  color azul,  $T_s$  Color magenta y  $T_p$  color mostaza), para una capa de  $\text{SiO}_2$  con grosores de a) 92 nm, b) 112 nm, c) 142 nm y d) 172 nm, con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ .

Nótese que para estos casos, ambas polarizaciones son distinguibles al igual que en el caso de la capa de plata, debido a que se tiene un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . Si se tuviera incidencia normal, las curvas presentarían comportamientos indistinguibles.

Para obtener la curva 8 a), se consideró un grosor del material dieléctrico de 92nm, tomando en cuenta que  $d_{SiO_2} = \frac{\lambda_c}{4n_{SiO_2}} = \frac{540 \text{ nm}}{4(1.46)}$ , donde  $\lambda_c$  es la longitud de onda a la que se desea centrar una PBG y  $n_{SiO_2}$  es el índice de refracción del SiO<sub>2</sub>. A partir de este valor, se aumentó el grosor de manera arbitraria para obtener las curvas 8 b) , 8 c) y 8 d).

En la figura 8 a) , se puede observar un mínimo en los valores de transmisión (o un máximo en la reflexión) en  $\lambda_c = 540 \text{ nm}$ , y un valor máximo igual a 1 en  $261 \text{ nm} \approx \frac{\lambda_c}{2}$ , siendo este un punto de invisibilidad, es decir un valor de longitud de onda para el cual la transmisión es 1. La onda electromagnética incidente no detecta la capa dieléctrica. Para este material dieléctrico no se observa un decaimiento abrupto en la curva y tampoco oscilaciones que sugieren contribuciones de electrones, como en el caso de los metales.

A medida que se aumenta el grosor de la capa, se observa una mayor cantidad de fluctuaciones alrededor de un mayor rango de valores de longitud de onda. Esto es debido a la superposición de efectos de interferencia constructiva y destructiva.

De acuerdo a las expresiones obtenidas en el capítulo anterior, se tiene una dependencia con el grosor de las capas, y es por esta razón que se observa esta superposición. Entre mayor sea el grosor de la capa a considerar en el sistema, se tendrá una mayor cantidad de máximos y mínimos en las curvas de la reflexión y de transmisión.

Es importante señalar que el mínimo local de la reflexión que se observa en la figura 8 a) ya no corresponde a los obtenidos en 8b), c) y d), es decir, hay un desplazamiento hacia longitudes de onda mayor.

En contraste con la figura 7, no hay un valor de frecuencia de plasma alrededor del cual la curva tenga un mínimo (o un máximo en el caso de la transmisión), debido a que esta es una característica de los metales.

También es destacable el hecho de que sin importar qué grosor se considere, el máximo de la curva de transmisión sigue siendo 1, a diferencia del resultado observado en la sección anterior donde, a medida que se aumentaba el grosor de la plata, el valor del máximo en la transmisión disminuía. Esto es de suma importancia ya que es claro el

efecto debido a la absorción del metal, cuestión que no se aprecia en el caso del material dieléctrico, porque su índice de refracción es real, es decir, el índice de absorción es nulo.

Otra diferencia que se tiene es el hecho de que este dieléctrico posee un índice de refracción real, lo cual implica que no se tiene absorción, o que el índice de absorción es muy pequeño o nulo.

En materiales dieléctricos, cuando se obtiene la reflexión en polarización p, con los coeficientes de Fresnel (calculados en el capítulo 2), se sabe que a cierto ángulo no se presenta reflexión, o esta es nula. Este ángulo es conocido como ángulo de Brewster, y para el caso del SiO<sub>2</sub>, corresponde a 55.59°, esto se obtiene de  $\theta_B = \arctan\left(\frac{1.46}{1}\right) = 55.59$  [8].

Finalmente, se puede hacer una comparación entre las figuras 8 y 7, resaltando las diferencias de cada una. Se pudo notar la ausencia de absorción para la capa de SiO<sub>2</sub> debido a su índice de refracción real. No hay un valor de frecuencia de plasma en torno al cual se observen oscilaciones antes de aumentar abruptamente. Aquí el aumento y decaimiento de la curva son graduales y obedecen a las expresiones obtenidas en el capítulo 2 para su cálculo. Tampoco se tienen contribuciones de los electrones libres como en el caso de la capa metálica, y el valor máximo de la curva se encuentra en  $\lambda = 261 \text{ nm}$ .

Esta sección comparativa permitió ilustrar las diferencias en las curvas de reflexión de sistemas de una sola superficie para dos tipos de materiales diferentes: metal y dieléctrico. Es fundamental para los fines del trabajo la comprensión del comportamiento de la luz en sistemas simples, debido a que esto constituye la base de la interpretación física que se desarrollará posteriormente en sistemas con capas alternadas, incluyendo ambos tipos de materiales.

En las siguientes secciones se presentarán los resultados obtenidos de estudiar un sistema con estas características, así como la discusión basada en estas observaciones previas.

## 8.0 Sistema multicapas formada de 2 capas alternadas vacío-plata

Debido a que el sistema de interés para este trabajo es un cristal fotónico con parte metálica, es necesario modelarlo de manera adecuada para obtener los resultados esperados.

En principio, los cálculos se efectuaron considerando una estructura multicapa sin especificar sus características espaciales, como el periodo o el número de capas. El hecho de que la herramienta computacional no soporta un sistema infinito (por definición, un cristal fotónico se compone por un número infinito de capas), trae como consecuencia la necesidad de establecer un criterio de aproximación, el cual permita considerar que el comportamiento observado es como el de un cristal fotónico. De este criterio se hablará con mayor detenimiento posteriormente en este capítulo.

Lo que se observa en las siguientes secciones son los resultados obtenidos para sistemas con una cantidad de capas insuficientes de acuerdo al criterio y al comportamiento de las curvas.

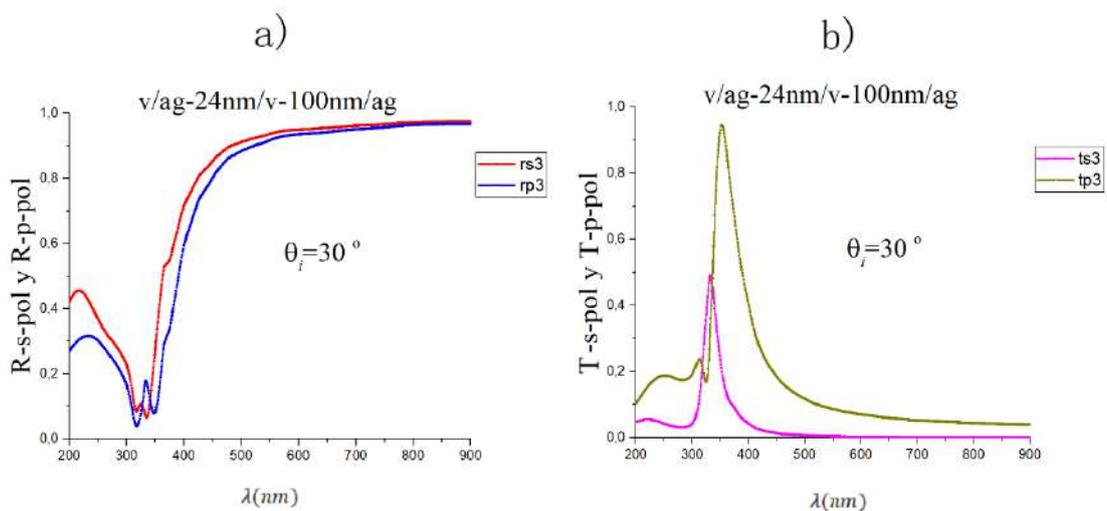


Figura 9. 9a) Reflexión y 9b) transmisión en polarización p y s (indicados en la figura  $R_s$  color rojo,  $R_p$  color azul,  $T_s$  color magenta y  $T_p$  color mostaza), para un sistema de 2 capas alternadas con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . Los grosores son de 100 nm para la capa de vacío y 24nm para la capa de plata (Ag), periodo  $ap=124$  nm.

En la figura 9, se obtuvieron la reflexión y la transmisión para 2 capas alternadas de vacío y plata, con grosores de 24 nm y 100 nm respectivamente, en polarizaciones s y p (indicadas en la figura), ambas considerando un ángulo de incidencia  $\theta=30^\circ$ . Para esta configuración, se tiene de medio incidente al vacío, y el periodo corresponde a  $a_p = 24nm + 100nm = 124nm$ .

Se pueden observar también en este caso que las curvas para ambas polarizaciones también son muy similares en comportamiento, debido al parecido de las expresiones para cada caso.

De la misma forma, se tiene un decaimiento marcado alrededor del mismo valor del caso anterior (entre 300 nm y 350 nm aproximadamente), a diferencia de que en este sistema a considerar, se observan fluctuaciones en el mínimo de ambas curvas.

Si se considera que el grosor óptico es de  $\frac{\lambda}{4}$  (quarter wavelenght), la diferencia de fase entre las ondas reflejadas será de  $\pi$ . Al encontrarse desfasadas, interfieren destructivamente entre sí y forman un mínimo. Si se tiene un grosor de  $\frac{\lambda}{2}$ , la diferencia en fase es de  $2\pi$ ; esto quiere decir que ambas ondas están en fase e interfieren constructivamente, formando así un máximo [33].

A medida que se aumente la cantidad de capas en el sistema, se tendrán más efectos de interferencia, por lo que se observarán más fluctuaciones en las curvas.

El valor máximo de la expresión (56) se da cuando el coseno de esta última expresión toma valor igual a -1, mientras que el mínimo será cuando valga 1.

Utilizando este criterio se pueden comprobar los valores de máximos y mínimos observados en la figura, de acuerdo al valor de longitud de onda.

En la función, se observa un decaimiento abrupto hasta que llega a la región correspondiente a donde se encuentra la frecuencia de plasma para este material, y después sube rápidamente hasta el máximo.

En este caso, se tiene incidencia oblicua ( $\theta = 30^\circ$ ) y se puede observar la diferencia en la curva de transmisión en polarización p, ya que esta no coincide exactamente con la

obtenida para la polarización s. Esto se mencionó en el capítulo anterior, como parte de lo que se esperaba obtener en los resultados numéricos.

En la siguiente sección se establecerá el criterio de aproximación y se realizará una comparación entre sistemas con mayor cantidad de medios, esto con el fin de obtener la configuración adecuada para considerar a la multicapa como un cristal fotónico.

## **9.0 Implementación del criterio para lograr el cristal fotónico**

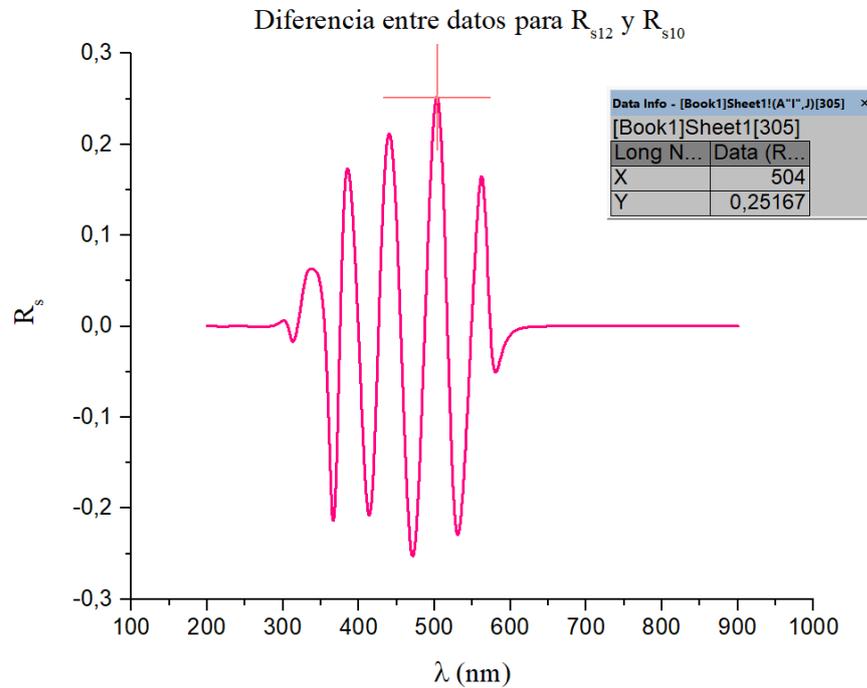
Un resultado importante fue el determinar cuántas capas alternadas de materiales son suficientes para considerar que el sistema se comporta como un cristal fotónico.

Para este caso, se compararon los resultados numéricos para distintas cantidades de medios. Seguido, se calculó la diferencia entre los datos de dos sistemas y se graficó para observar el comportamiento.

Debido a que el sistema estudiado no es infinito, no es posible observar exactamente este comportamiento (además de las limitaciones computacionales). Por ello, se estableció un valor de diferencia de 0.2 como criterio para considerar que la aproximación es lo suficientemente buena, y por ende el sistema puede considerarse un cristal fotónico.

Es importante señalar que este valor se eligió en base a observaciones realizadas sobre los resultados obtenidos, es decir, los máximos en las diferencias de los datos comparados convergen a 0.2. Por otro lado, se buscó un balance entre el número de capas y el espesor del material metálico, de tal manera que la transmisión no decayera hasta llegar a valores muy cercanos a cero. Si el espesor de la capa metálica fuera mayor, la estructura tendería a aumentar tanto su reflexión, que no se observaría transmisión de la luz. El mismo razonamiento es aplicable a si el cristal fotónico tuviera demasiadas capas alternadas. De no elegirse de manera adecuada estos parámetros, las curvas de reflexión y transmisión ya no formarían una estructura de bandas semejante a la de un cristal fotónico.

A continuación se presenta la curva que describe el comportamiento de la diferencia entre los datos obtenidos para un sistema de 10 y de 12 capas:



*Figura 10. Diferencia de resultados numéricos entre la reflexión en polarización  $s$  de un sistema de 10 capas y uno de 12, es decir  $\Delta R_s = R_s(12) - R_s(10)$ .*

En esta figura se puede observar que el valor máximo de la diferencia entre las curvas de reflexión, corresponde a 0.25167. Esta cifra aún se encuentra fuera del criterio establecido para considerar al sistema como cristal fotónico, a pesar de ser un valor cercano a 0.

Se continuó con la comparación de datos, hasta obtener el siguiente resultado:

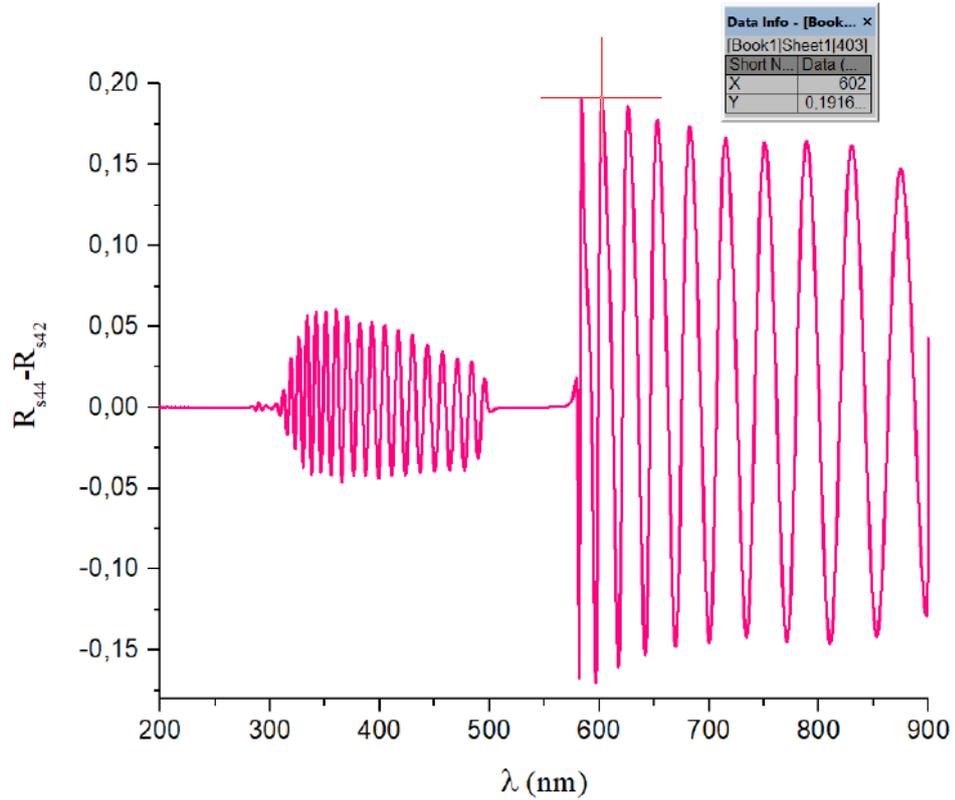


Figura 11. Diferencia de resultados numéricos entre la reflexión en polarización  $s$  de un sistema de 44 capas y uno de 42, es decir  $\Delta R_s = R_s(44) - R_s(42)$ .

Se obtuvo una curva cuyo máximo y mínimo se encuentran posicionados dentro del rango del valor que se estableció para el criterio, específicamente en 0.1916, por lo que se concluyó que para 44 capas alternadas, el sistema se puede considerar como un cristal fotónico.

En la siguiente figura se muestra la comparación para la reflexión entre 42 y 44 capas:

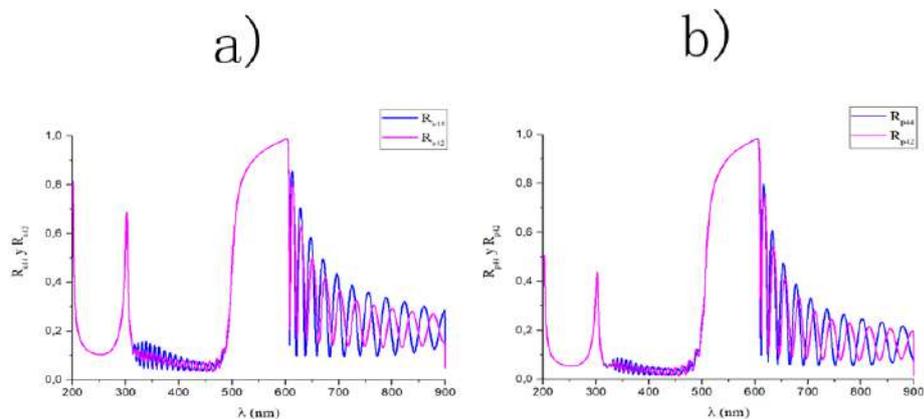


Figura 12. Reflexión para un sistema de 42 (magenta) y 44 capas (azul), con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . Las reflexiones en polarización s están dadas por la figura 12 a), y en polarización p por la figura 12 b). Los grosores son de 213 nm para la capa de vacío y 7 nm para la capa de plata (Ag).

Se puede apreciar en estas curvas que la reflexión no llega a cero, debido al efecto de absorción del material metálico. También se observa que se alcanza un valor máximo en 1, pero debido a la misma razón, no se mantiene constante en un intervalo de longitudes de onda.

Es posible incrementar el número de medios de manera indefinida, pero no es conveniente en casos donde la herramienta computacional representa una limitación y no se tiene establecida una cantidad precisa para asegurar que el criterio se cumplirá exactamente, es decir, que se obtenga una curva constante en  $R_s = 0$ .

Es por esta razón que se procede a establecer un valor cercano a cero, de tal manera que se pueda considerar una aproximación aceptable. Se esperaría que de aumentarse el número de capas, la diferencia no sea muy grande para la comparación de los sistemas.

A través de este criterio, en conjunto con la consideración del índice de refracción complejo del material metálico en el cálculo del grosor de la capa dieléctrica en un PC, se pudo obtener el principal resultado de interés para este trabajo en cuestión. En la siguiente sección se presenta el comportamiento de un cristal fotónico con componente metálica, y una comparación con otro compuesto por dos materiales dieléctricos alternados.

## 10.0 Cristal fotónico con componente metálica

En esta sección se muestran los resultados principales obtenidos en base al criterio de aproximación anteriormente mencionado.

En la siguiente figura, se obtuvieron las curvas de reflexión y transmisión de un sistema de 44 capas alternadas de plata y  $SiO_2$ , cuyo índice de refracción es 1.46. Utilizando la ecuación (117), obtenida en el capítulo 2, se calculó el grosor de la capa del material dieléctrico, para obtener una banda prohibida centrada en 550 nm.

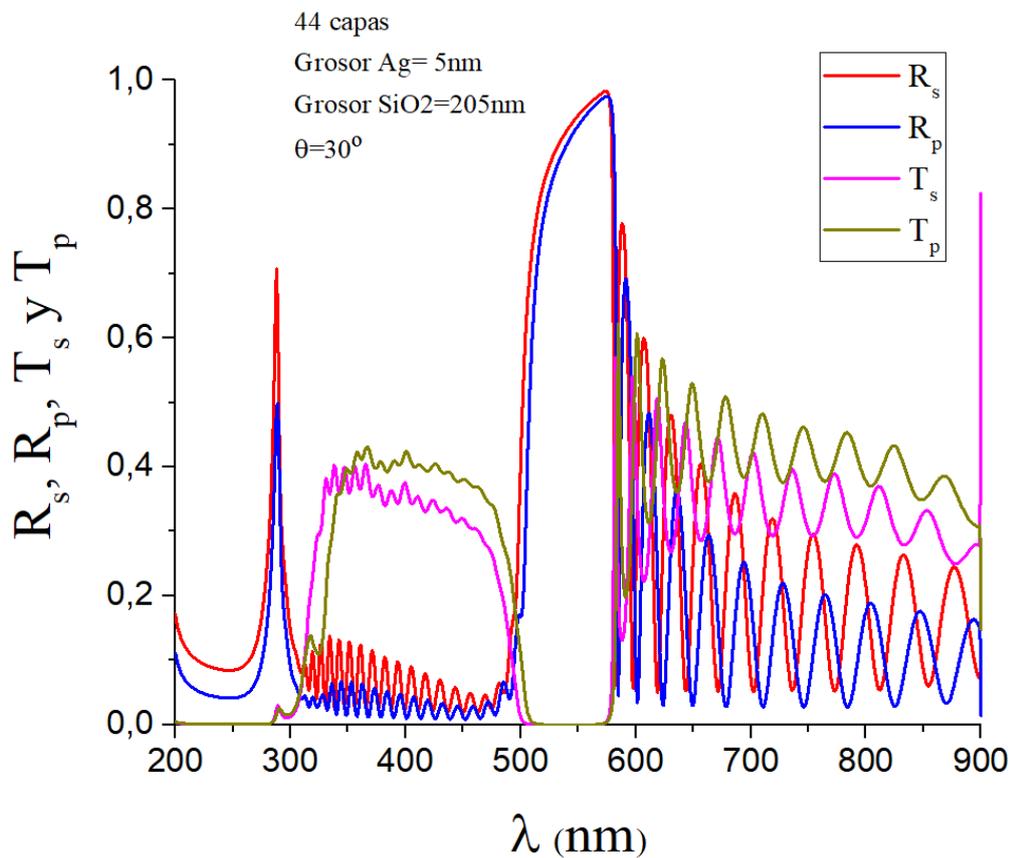


Figura 13. Reflexión y transmisión en polarización  $p$  y  $s$  (indicados en la figura  $R_s$  color rojo,  $R_p$  color azul,  $T_s$  color magenta y  $T_p$  color mostaza), para un sistema de 44 capas con un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ . Los grosores son de 205 nm para la capa de  $SiO_2$  y 5 nm para la capa de plata (Ag). El índice de refracción de  $SiO_2$  es  $n_{SiO_2} = 1.46$ . El periodo es  $a_p = 205nm + 5nm = 210nm$ .

Debido a que el cristal fotónico posee una componente metálica, las consideraciones usuales para sistemas conformados por materiales dieléctricos no son aplicables a este caso. Para obtener una banda prohibida centrada en 550 nm, fue necesario tomar en cuenta la naturaleza del índice de refracción complejo de la plata, de tal manera que el cálculo del grosor de la capa de material dieléctrico fuera congruente con las observaciones gráficas. La PBG obtenida tiene un ancho de banda de aproximadamente 82 nm, y corresponde a la región donde la luz incidente es reflejada y no se presenta transmisión. En esta figura solo se muestra a la primera banda prohibida, debido a que es la única presente en el espectro visible, siendo esta la porción de interés para este caso.

Por otro lado, como se vio en secciones previas, el grosor de la capa de plata influye en los resultados de la reflexión y transmisión. Al ser un material cuyo índice de absorción es diferente de cero, a medida que el grosor de la capa metálica aumenta, la transmisión en el cristal disminuye notoriamente. Debido a ello, se seleccionó un valor de 5 nm, ya que en esta configuración la transmisión observada en la región entre 300 nm y 500 nm se mantiene cercano de 0.4.

En esta figura se observan diferencias entre las polarizaciones debido a que se consideró un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ , y las funciones ya no toman los mismos valores.

Como otro resultado importante, en la siguiente figura, se obtuvieron las curvas de reflexión y transmisión de un sistema de 40 capas alternadas de plata y  $ZnS$ . Este material tiene un índice de refracción mayor que el  $SiO_2$ . Utilizando la ecuación (117), obtenida en el capítulo 2, se calculó el grosor de la capa del material dieléctrico, para obtener una banda prohibida centrada en 550 nm.

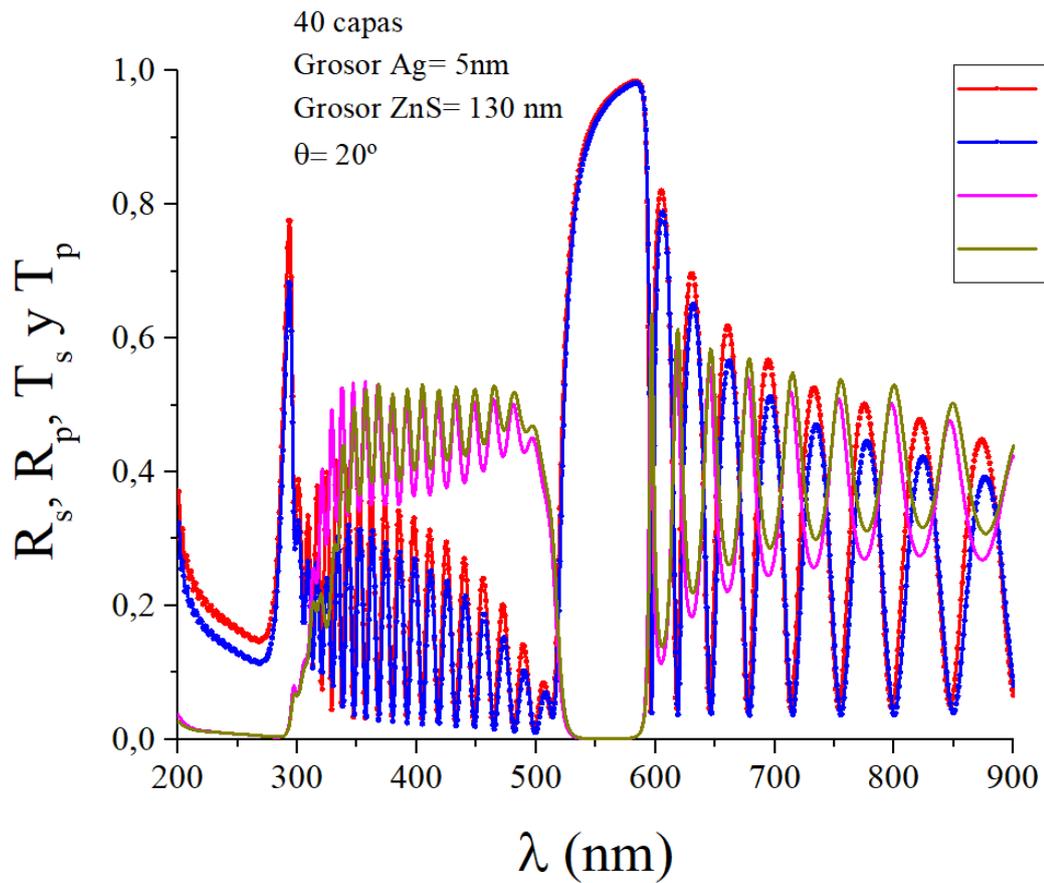


Figura 14. Reflexión y transmisión en polarización  $p$  y  $s$  (indicados en la figura  $R_s$  color rojo,  $R_p$  color azul,  $T_s$  color magenta y  $T_p$  color mostaza), para un sistema de 40 capas con un ángulo de incidencia de  $20^\circ$ . Los grosores son de  $130 \text{ nm}$  para la capa de ZnS y  $5 \text{ nm}$  para la capa de plata (Ag). El índice de refracción de ZnS es  $n_{\text{ZnS}} = 2.4$ . El periodo es  $a_p = 130 \text{ nm} + 5 \text{ nm} = 135 \text{ nm}$ .

En esta figura se puede observar una mejor coincidencia entre las curvas de reflexión y de transmisión, utilizando una menor cantidad de capas que las del sistema compuesto por plata y  $\text{SiO}_2$ , además de que el periodo es también menor. Esto se calculó a partir de la ecuación (117) desarrollada en el capítulo 2; debido a que el ZnS posee un índice de refracción mayor ( $n_{\text{ZnS}} = 2.4$ ), se obtuvo un menor grosor para el material dieléctrico en el diseño del cristal fotónico con componente metálica, cuya PBG se encuentra centrada en  $\lambda_c = 550 \text{ nm}$ .

Otro aspecto es que los valores de transmisión son más cercanos a 0.5, a pesar de tener el mismo grosor para la capa de plata ( $d_{Ag} = 5nm$ ), esto debido a que el grosor total de la estructura es menor.

Finalmente, basándonos en el apéndice I es posible determinar la profundidad de piel y compararlo con el grosor de la capa metálica, obteniendo así  $\delta = \frac{\lambda}{2k} \approx 25.67 nm$ . Este valor resulta ser mucho mayor que el utilizado para la plata en el sistema en cuestión, lo cual sugiere que se cumple la condición  $d \ll \delta$ , y por lo tanto, el multicapa puede ser considerada un cristal fotónico.

Este sistema podría ser aplicable a la construcción de una guía de ondas óptica de resonador acoplado, como el propuesto por la referencia [33]. De acuerdo a la figura 1b) de esta publicación, se puede considerar al medio 2 como un material metálico y tener así un cristal fotónico con componente metálica. Al introducir un defecto en medio de la estructura, se rompe la periodicidad, de tal manera que se obtiene una guía de ondas óptica de resonador acoplado. Esta es una aplicación importante para fines de este trabajo, ya que es posible obtener guías de ondas de resonador acoplado con un grosor total menor a aquellos constituidos únicamente a partir de materiales dieléctricos.

Con estos resultados ha sido posible comprobar la teoría estudiada y las predicciones que se realizaron respecto al sistema con los criterios establecidos.

En contraste, a continuación se hace una comparación con un multicapa de dos materiales dieléctricos alternados. El fin de esto es observar diferencias importantes entre el cristal fotónico con parte metálica y el compuesto por materiales dieléctricos, ya que esto representa un objetivo importante en esta tesis.

## 11.0 Cristal fotónico dieléctrico

Como un sistema comparativo, se calcularon las curvas de reflexión y transmisión para un sistema multicapa conformado por materiales dieléctricos. Se obtuvo que el sistema se comporta como un cristal fotónico cuando se tienen 18 pares de capas alternadas, y se calcularon los grosores con la expresión (97).

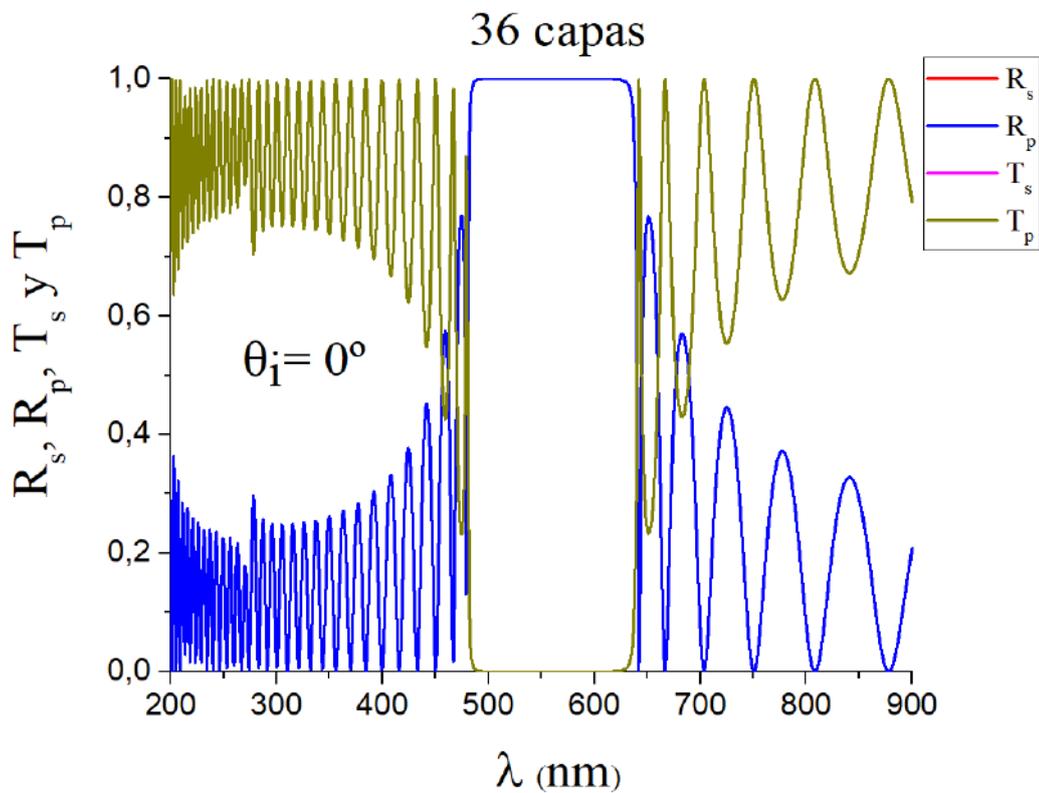


Figura 15. Reflexión y transmisión en polarización (indicados en la figura  $R_s$  color rojo,  $R_p$  color azul,  $T_s$  color magenta y  $T_p$  color mostaza), para un sistema de 36 capas con un ángulo de incidencia de  $0^\circ$ . Los grosores son de 100 nm para la capa de  $\text{SiO}_2$  y 65 nm para la capa de  $\text{ZnS}$ . El periodo del cristal fotónico es 165 nm. Sus índices de refracción son  $n_{\text{SiO}_2} = 1.46$  y  $n_{\text{ZnS}} = 2.4$ . Dado el ángulo, las curvas de reflexión obtenidas en polarización  $s$  y  $p$  son indistinguibles, lo mismo para la transmisión.

En este sistema, los grosores de las capas son de 100 nm para el  $\text{SiO}_2$  y 65 nm para el  $\text{ZnS}$ , respectivamente, y sus índices de refracción son  $n_{\text{SiO}_2} = 1.46$  y  $n_{\text{ZnS}} = 2.4$ . La banda

prohibida se encuentra centrada en 560 nm, y este valor sí se pudo obtener de acuerdo a la expresión (97), que corresponde a la ecuación usual para sistemas donde no se considera una componente metálica. El ancho de banda para este caso es de aproximadamente 161 nm.

Si se compara con cristal fotónico con parte metálica, se puede observar que al no considerarse absorción, el valor máximo de la reflexión es 1 en toda la región que comprende el ancho de la banda, así como las fluctuaciones debido a los efectos de interferencia. Es importante señalar que en este caso, no hay distinción de polarizaciones debido a que se tiene un ángulo de incidencia de  $0^\circ$ .

La importancia de realizar esta comparación reside en evidenciar los efectos debidos a la componente metálica en el sistema compuesto por capas de plata y  $\text{SiO}_2$ . Debido a que para la plata el índice de absorción es diferente de cero, no se observa una banda prohibida bien definida en un intervalo de longitudes de onda, a comparación de un sistema dieléctrico. En contraste, tampoco se observa una región donde la reflexión sea nula.

Finalmente, se puede concluir que los criterios para el diseño de un PC dieléctrico, no son aplicables a un sistema donde se considera una componente metálica. Esto se debe principalmente a las propiedades características de este tipo de materiales, específicamente su índice de refracción complejo, las contribuciones de los electrones presentes y el comportamiento de la permitividad eléctrica en torno a la frecuencia de plasma.

# CONCLUSIONES

Se calculó teóricamente (y se obtuvieron resultados numéricos) la reflexión y la transmisión de un cristal fotónico unidimensional con componente metálica conformado por  $n_c$  capas.

Haciendo uso del método recursivo, se logró calcular los coeficientes de transmisión y reflexión en polarización s y p como función del ángulo de incidencia, los índices de refracción complejos y los grosores de las capas.

Se elaboró un programa de cómputo en lenguaje FORTRAN, (basado en el método mencionado anteriormente), con el cual fue posible obtener curvas de transmisión y reflexión de distintos sistemas, variando el número de capas alternadas, los grosores de estas, materiales y ángulo de incidencia, para observar los efectos que estos cambios producen en el sistema, así como también obtener PBGs.

A su vez, para fines de este trabajo, fue necesario obtener una expresión válida para el cálculo del grosor de una capa de material dieléctrico en una estructura metal-dieléctrica, tomando en cuenta el índice de refracción complejo del metal y dispersión. Esto fue con el fin de obtener el grosor adecuado, de tal manera que fuera posible centrar la PBG en la longitud de onda que se eligiera.

Con el objetivo de estudiar sistemas más simples, se obtuvieron curvas de reflexión y transmisión para una capa de plata rodeada de vacío, y además para una capa de SiO<sub>2</sub> rodeada de vacío. Se tomó un ángulo de incidencia de 30° en ambos casos.

Para la capa de plata, se distinguió su frecuencia de plasma característica, la cual correspondió a un valor de longitud de onda de  $\lambda_p = 323 \text{ nm}$ . Se hizo notoria la presencia de absorción, así como la comprobación de la dependencia del grosor de la capa en los valores que los coeficientes toman. Se pudo notar la ausencia de absorción para la capa de SiO<sub>2</sub> debido a su índice de refracción real. El mínimo en los valores de transmisión (o máximo en la reflexión) se encuentra en  $\lambda_c = 540 \text{ nm}$ , y el valor máximo es igual a 1 en  $261 \text{ nm} \approx \frac{\lambda_c}{2}$ , siendo este un punto de invisibilidad, es decir un valor de longitud de onda para el cual la transmisión es 1.

Un resultado importante fue el determinar cuántas capas alternadas de materiales son suficientes para considerar que el sistema se comporta como un cristal fotónico, a través de la implementación de un criterio de aproximación.

Basado en la diferencia  $R_{nc+2} - R_{nc} < \Delta R$ , con  $\Delta R = 0.2$ , se encontró que con  $n_c > 40$  para plata y  $SiO_2$ , el sistema con componente metálica se comporta como un cristal fotónico, mientras que en el caso de una multicapa de materiales dieléctricos se requieren 18 pares.

Como se estudió, la plata presenta absorción, y por ello se recurrió a seleccionar un espesor  $d=5$  nm, ya que con esta configuración de cristal fotónico, los valores de transmisión se aproximaron a 0.5. A su vez, fue posible centrar la PBG en  $\lambda_c = 550$  nm, utilizando la expresión para calcular el grosor de la capa de material dieléctrico, considerando una estructura metal-dieléctrica.

Otro resultado destacable fue que el periodo para un sistema compuesto por Ag y ZnS ( $a_p = 135$  nm), resultó ser menor al del cristal fotónico con componentes dieléctricas, siendo este  $a_p = 165$  nm. Esto se calculó de igual forma con la ecuación (107), y se obtuvo una PBG centrada en 550 nm. Este resultado es importante, debido a que una de las ventajas principales de los cristales fotónicos con componente metálica es que pueden construirse con un grosor total menor que un cristal compuesto solo por materiales dieléctricos. Esto es beneficioso en el campo de la nanoelectrónica.

Finalmente, se obtuvo que la profundidad de piel para la plata en este sistema fue de  $\delta \approx 25.7$  nm, lo cual resulta ser al menos un orden de magnitud mayor que el grosor de las capas de plata, siendo este de  $d = 5$  nm. Esto satisface la condición esperada para que la multicapa pudiera considerarse un cristal fotónico ( $d \ll \delta$ ).

Se puede concluir que los criterios para el diseño de un PC dieléctrico, no son aplicables a un sistema donde se considera una componente metálica. Esto se debe principalmente a las propiedades características de este tipo de materiales, específicamente su índice de refracción complejo, las contribuciones de los electrones presentes y el comportamiento de la permitividad eléctrica en torno a la frecuencia de plasma.

# APÉNDICE A

## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Se considera una onda plana electromagnética conformada por un campo eléctrico  $\vec{E}$  orientado en la dirección X, un campo magnético  $\vec{B}$  en la dirección Y, y cuya dirección de propagación corresponde al eje Z, de acuerdo al diagrama.

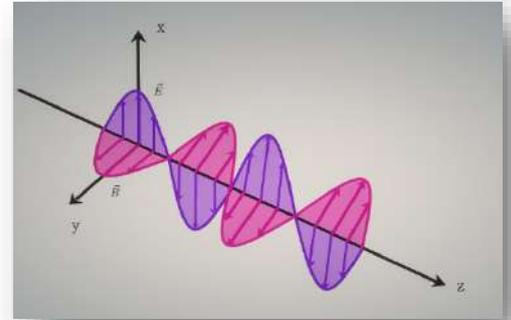


Figura 16. Onda plana electromagnética

Se parte de las Leyes de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r}, t) \quad (a1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (a2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (a3)$$

La ley de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (a4)$$

En este trabajo, se supone que se satisfacen las siguientes relaciones lineales  $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$  y  $\vec{B} = \vec{\mu} \vec{H}$ , siendo  $\vec{D}$  el desplazamiento magnético,  $\vec{H}$  la inducción magnética,  $\vec{\epsilon}$  el tensor dieléctrico y  $\vec{\mu}$  el tensor de permeabilidad magnética. Asumimos que el medio tiene una respuesta lineal. En este caso, se utilizan unidades del sistema MKS, considerando las cantidades  $\mu = \mu_0 \mu_r$  y  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ .

Tomando el rotacional de la ecuación (a3) (o Ley de Faraday) se obtiene,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{\mu} \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (\text{a5})$$

Si se considera que el medio es isotrópico (es decir, que sus propiedades físicas no dependen de la dirección) y es homogéneo, se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (\text{a6})$$

Ya que los operadores diferenciales temporal y espacial conmutan,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \quad (\text{a7})$$

De la ecuación (a4), o Ley de Ampère, si se tiene un medio en ausencia de corrientes  $\vec{J}(\vec{r}, t) = 0$ , (Nota: en los metales esto no se cumple, en los materiales ohmicos se cumple que  $\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t)$ )

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)}{\partial t} \quad (\text{a8})$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (\text{a9})$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{a10})$$

Utilizando la propiedad del doble rotacional,

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{a11})$$

Se supone que la densidad de corriente en el sistema es cero, por lo que la ecuación (a1) o Ley de Gauss toma la forma:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{a12})$$

Si el medio se encuentra en ausencia de densidad de corriente, entonces

$$\nabla \left( \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \vec{D} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{a13})$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{D}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{a14})$$

Finalmente se encuentra la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

(a15)

De manera similar, se puede encontrar una ecuación de onda para el campo magnético, teniendo en consideración las mismas condiciones del sistema (respuesta lineal, isotrópico, homogéneo, en ausencia de carga).

De la cuarta ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{a16})$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{a17})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{a18})$$

Obteniendo el rotacional:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{a19})$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \left( \frac{\partial (\nabla \times \vec{E})}{\partial t} \right) \quad (\text{a20})$$

De la ecuación (3):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\mu\epsilon \left( \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) \quad (\text{a21})$$

Utilizando la identidad del doble rotacional:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\mu\epsilon \left( \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) \quad (\text{a22})$$

Pero de la ecuación (2),  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , entonces

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \left( \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) = 0$$

(a23)

Las soluciones que satisfacen a estas ecuaciones de onda para el caso en el que la polarización sea perpendicular al plano de incidencia tienen la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E e^{i(\vec{q}_z \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{i} \quad (\text{a24})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sqrt{\mu \varepsilon} \frac{\vec{q}_z \times \vec{E}}{q_z} \quad (\text{a25})$$

Para el caso en el que la polarización sea paralela al plano de incidencia, son

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B e^{i(\vec{q}_z \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{i} \quad (\text{a26})$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \frac{\vec{q}_z \times \vec{B}}{q_z} \quad (\text{a27})$$

Donde  $\vec{q}_z$  es el vector de onda orientado en la dirección “z” de propagación.

## APÉNDICE B

### DEDUCCIÓN DE LA LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell de manera implícita contienen algunas leyes como la ley de conservación de la carga. A continuación se presenta su deducción.

De la Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (\text{b1})$$

Tomando la divergencia:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \quad (\text{b2})$$

Sabiendo que en general  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ ,

$$0 = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \quad (\text{b4})$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{b5})$$

Como los operadores diferenciales de tiempo y espacio conmutan,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{b6})$$

De la Ley de Gauss  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r}, t)$ , entonces

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

(b7)

# APÉNDICE C

## VECTOR DE POYNTING

Para este apéndice se obtiene la expresión que representa al vector de Poynting, de tal manera que se pueda utilizar para obtener la irradiancia, y en consecuencia, la transmitancia como función del este. En este caso, se consideran la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío, es decir  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ .

La derivada temporal del trabajo está dada por:

$$\frac{dW}{dt} = \int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \rho d^3r \quad (c1)$$

$$\frac{dW}{dt} = \int (\vec{E} \cdot \vec{j}) d^3r \quad (c2)$$

Despejando  $\vec{j}$  de la Ley de Ampère se tiene:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (c3)$$

Sustituyendo en (c2):

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{E} \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d^3r \quad (c4)$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] d^3r \quad (c5)$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})) - \vec{E} \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d^3r \quad (c6)$$

Sustituyendo la Ley de Faraday en (c6):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \int \left( \vec{B} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d^3r \quad (c7)$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \int \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) d^3r \quad (c8)$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) \right) d^3r - \int \nabla \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) d^3r \quad (c9)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el segundo integrando se obtiene:

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) \right) d^3r - \oint \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) d^2r \quad (c10)$$

De aquí se puede asociar al vector de Poynting con el término dentro de la integral cerrada, así:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$$

Este vector expresa la intensidad instantánea del flujo de energía por unidad de área, y tiene la misma dirección de propagación.

Para una onda viajera, se puede encontrar una expresión conveniente para la irradiancia, comenzando por expresar  $\vec{S}$  como un número complejo, cuya parte imaginaria es cero. Se escriben  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en forma de ondas planas, con magnitudes E y B, respectivamente y frecuencia  $\omega$ :

$$\vec{S} = \text{Re}(\vec{E}e^{i\omega t}) \times \text{Re}(\vec{B}e^{i\omega t}) \quad (c11)$$

Reescribiendo en términos de sus conjugados:

$$= \frac{1}{2}(\vec{E}e^{i\omega t} + \vec{E}^*e^{-i\omega t}) \times \frac{1}{2}(\vec{B}e^{i\omega t} + \vec{B}^*e^{-i\omega t}) \quad (\text{c12})$$

Distribuyendo:

$$= \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}e^{2i\omega t} + \vec{E}^* \times \vec{B}^*e^{-2i\omega t}) \quad (\text{c13})$$

$$= \frac{1}{2}Re(\vec{E} \times \vec{B}^*) + \frac{1}{2}Re(\vec{E} \times \vec{B}e^{2i\omega t}) \quad (\text{c14})$$

Para obtener la irradiancia, se obtiene el valor promedio en el tiempo para esta forma del vector de Poynting:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{P}(t) dt \quad (\text{c15})$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2}Re(\vec{E} \times \vec{B}^*) + \frac{1}{2}Re(\vec{E} \times \vec{B}e^{2i\omega t}) \right] dt \quad (\text{c16})$$

El segundo sumando tiene valor promedio igual a cero, por lo que:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}Re(\vec{E} \times \vec{B}^*) \quad (\text{c17})$$

Este vector tiene la misma dirección que el flujo de energía de la onda.

Escribiendo en términos de sus magnitudes se tiene:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2}Re(EB^*) \quad (\text{c18})$$

Esto es por definición la irradiancia

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(EB^*) \quad (c19)$$

Si se consideran los campos eléctrico y magnético incidentes en un medio:

$$\vec{E}_{n_t} = \left[ E_{n_t} e^{i(\vec{q}_{n_t} \cdot \vec{r} - \omega t)} + E_{n_r} e^{i(\vec{q}_{n_r} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \hat{i} \quad (c20)$$

$$\vec{B}_{n_t} = \sqrt{\mu_n \varepsilon_n} \left[ \frac{q_{n_t z} \left( E_{n_t} e^{i(\vec{q}_{n_t} \cdot \vec{r} - \omega t)} - E_{n_r} e^{i(\vec{q}_{n_r} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \hat{j} - q_{n_t y} \left( E_{n_t} e^{i(\vec{q}_{n_t} \cdot \vec{r} - \omega t)} + E_{n_r} e^{i(\vec{q}_{n_r} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \hat{k}}{q_{n_t}} \right] \quad (c21)$$

Para el siguiente medio  $n + 1$ , se tienen las ondas transmitidas:

$$\vec{E}_{(n+1)_t} = E_{(n+1)_t} e^{i(\vec{q}_{(n+1)_t} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{i} \quad (c22)$$

$$\vec{B}_{(n+1)_t} = \frac{q_{(n+1)_z} \sqrt{\mu_{(n+1)_t} \varepsilon_{(n+1)_t}} E_{(n+1)_t} e^{i(\vec{q}_{(n+1)_t} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{j}}{q_{(n+1)_t}} \quad (c23)$$

Se puede reescribir (4) en términos de las ondas:

$$I_{n_t} = \frac{1}{2} \left( E_{n_t} \left( \text{Cos}(q_{n_t} d) + i \text{Sin}(q_{n_t} d) \right) + E_{n_r} \left( \text{Cos}(q_{n_r} d) + i \text{Sin}(q_{n_r} d) \right) \right) \left( \sqrt{\mu_n \varepsilon_n} \frac{q_{n_t z} \left( E_{n_t} \left( \text{Cos}(q_{n_t} d) - i \text{Sin}(q_{n_t} d) \right) - E_{n_r} \left( \text{Cos}(q_{n_r} d) - i \text{Sin}(q_{n_r} d) \right) \right)}{q_{n_t}} \right) \quad (c24)$$

$$= \frac{\sqrt{\mu_n \varepsilon_n} q_{ntz}}{2q_{nt}} \left( E_{nt}^2 [\text{Cos}^2(q_{nt}d) + \text{Sin}^2(q_{nt}d)] - E_{nr}^2 (\text{Cos}^2(q_{nr}d) + \text{Sin}^2(q_{nr}d)) \right) \quad (\text{c25})$$

Ahora:

$$I_i = \frac{\sqrt{\mu_n \varepsilon_n} q_{ntz}}{2q_{nt}} E_{ni}^2 \quad (\text{c26})$$

$$I_r = \frac{\sqrt{\mu_n \varepsilon_n} q_{nrz}}{2q_{nt}} E_{nr}^2 \quad (\text{c27})$$

$$I_{(n+1)t} = \frac{\sqrt{\mu_{n+1} \varepsilon_{n+1}} q_{(n+1)tz}}{2q_{(n+1)t}} E_{(n+1)t}^2 \quad (\text{c28})$$

Obteniendo R:

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_{nr}^2}{E_{ni}^2} \quad (\text{c29})$$

Ahora se obtiene T:

$$T \equiv \frac{\frac{\sqrt{\mu_{n+1} \varepsilon_{n+1}} q_{(n+1)tz}}{2q_{(n+1)t}} E_{(n+1)t}^2}{\frac{\sqrt{\mu_n \varepsilon_n} q_{ntz}}{2q_{nt}} E_{nt}^2} = \frac{q_{nt} q_{(n+1)tz} \sqrt{\mu_{n+1} \varepsilon_{n+1}}}{q_{(n+1)t} q_{ntz} \sqrt{\mu_n \varepsilon_n}} \frac{E_{(n+1)t}^2}{E_{nt}^2} \quad (\text{c30})$$

# APÉNDICE D

## FRECUENCIA DE PLASMA

Si se considera un átomo cuyos electrones se encuentran ligados al núcleo a través de un resorte, el movimiento del electrón está descrito:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = -e\vec{E} \quad (d1)$$

Donde  $m$  es la masa del electrón y  $e$  es la magnitud de la carga.  $\vec{E}$  es el campo eléctrico que actúa sobre el electrón.

El término  $m\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$  está relacionado con la pérdida de energía, y  $m\omega_0^2 \vec{r}$  es la fuerza de restitución de Hooke.

Si se considera que el campo eléctrico varía en el tiempo como  $e^{-i\omega t}$ , la solución es entonces:

$$\vec{r} = \frac{-e\vec{E}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega} \quad (d2)$$

Y el momento dipolar es:

$$\vec{p} = \frac{e^2 \vec{E}}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega} \quad (d3)$$

Si se asume que el desplazamiento en  $r$  es lo suficientemente pequeño como para considerar una relación lineal entre  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$ ,

$$\vec{p} = \alpha(\omega)\vec{E} \quad (d4)$$

Donde  $\alpha(\omega)$  es la polarizabilidad dependiente de la frecuencia.

De las ecuaciones (d2) y (d3), se tiene:

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega} \quad (d5)$$

Si se tienen  $N$  átomos por unidad de volumen, la polarización macroscópica es:

$$\vec{P} = N\langle\vec{p}\rangle = N\alpha\langle\vec{E}\rangle = \chi\vec{E} \quad (d6)$$

Para metales con electrones libres, los electrones no están ligados y se puede considerar  $\omega_o = 0$  y que  $\langle\vec{E}\rangle = \vec{E}$ , entonces:

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E} = \chi\vec{E} \quad (d7)$$

Se puede definir un desplazamiento eléctrico complejo, de tal forma que

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E}_{ext} \quad (d8)$$

En notación compleja esto se expresa como sigue:

$$\vec{D} = \vec{D}_o e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (d9)$$

Ahora, de las ecuaciones (d7) y (d8) se obtiene:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N\alpha \quad (d10)$$

Y usando (d5):

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega} \quad (d11)$$

De aquí, para materiales no magnéticos, se puede separar  $\varepsilon$  en su parte real e imaginaria como sigue:

$$\varepsilon_r = n^2 - k^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2) + \Gamma^2\omega^2} \quad (d12)$$

$$\varepsilon_i = 2nk = \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2) + \Gamma^2\omega^2} \quad (d13)$$

Si  $\omega_o = 0$ , entonces:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{1}{(\omega^2 + \Gamma^2)} \quad (d14)$$

$$\varepsilon_i = \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{\Gamma}{\omega(\omega^2 + \Gamma^2)} \quad (d15)$$

El término  $\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$  es conocido como la frecuencia de plasma.

Se observa que los parámetros microscópicos de los que depende son de la masa, la carga y el número de electrones en cuestión.

En un metal ideal con electrones libres, la reflexión es casi 1 por debajo de la frecuencia de plasma. Por encima de este valor, la reflexión decae abruptamente.

Se cumple que por encima de la frecuencia de plasma

$$n^2 \approx 1 - (\omega_p^2/\omega^2) \quad (d16)$$

Cuando  $\omega_p^2 = \omega^2$ , el índice de refracción es cero, y por ende, también la función dieléctrica.

# APÉNDICE E

## UNA SUPERFICIE VACÍO -METAL

Los campos eléctricos y magnéticos

Para  $z < -\infty$

$$\vec{E}_1 = [E_{t1}e^{i(\vec{q}_{t1}\cdot\vec{r})} + E_{r1}e^{i(\vec{q}_{r1}\cdot\vec{r})}]e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{e1})$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{q_1} [q_{z1}(E_{t1}e^{i(\vec{q}_{t1}\cdot\vec{r})} - E_{r1}e^{i(\vec{q}_{r1}\cdot\vec{r})})\hat{j} - q_{y1}(E_{t1}e^{i(\vec{q}_{tn}\cdot\vec{r})} - E_{r1}e^{i(\vec{q}_{rn}\cdot\vec{r})})\hat{k}]e^{-i\omega t} \quad (\text{e2})$$

Para  $z > +\infty$

$$\vec{E}_2 = [E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2}\cdot\vec{r})}]e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{e3})$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{q_2} [q_{z2}(E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2}\cdot\vec{r})})\hat{j} - q_{y2}(E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2}\cdot\vec{r})})\hat{k}]e^{-i\omega t} \quad (\text{e4})$$

Donde

$$\vec{q}_{tn} = q_{yn}\hat{j} + q_{zn}\hat{k} \quad (\text{e5})$$

$$\vec{q}_{rn} = q_{yn}\hat{j} - q_{zn}\hat{k} \quad (\text{e6})$$

y  $q_n = \omega\sqrt{\mu_n\varepsilon_n}$ ,  $q_{zn} = \sqrt{\mu_n\varepsilon_n\omega^2 - q_{yn}^2}$ ,  $q_{yn} = q_y = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\sin\theta_i$  y  $n=1,2$ . y donde  $\mu_n$  y  $\varepsilon_n$  son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del medio correspondiente. Se utilizan unidades MKS, considerando las cantidades absolutas, es decir  $\mu = \mu_0\mu_r$  y  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ .

Dependiendo del sistema, se tendrán tantas fronteras como número de medios existan. Se analiza a continuación la forma que toman las ecuaciones de Maxwell en cada frontera, obteniendo así un sistema de ecuaciones de  $n_m \times n_m$ , el cual es posible resolver con el método recursivo.

En cada una de las frontera en  $Z = 0$

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1]_{Z=0} \times \hat{n} = 0 \quad (\text{e7})$$

Sustituyendo los campos:

$$[(E_{t2} e^{i(\vec{q}_{t2} \cdot \vec{r})}) \hat{i} - (E_{t1} e^{i(\vec{q}_{t1} \cdot \vec{r})} + E_{r1} e^{i(\vec{q}_{r1} \cdot \vec{r})}) \hat{i}]_{Z=0} \times \hat{k} = 0 \quad (\text{e8})$$

Realizando el producto cruz e igualando las componentes

$$E_{t2} = E_{t1} + E_{r1} \quad (\text{e9})$$

Para la condición en la que se considera a la componente tangencial de  $\vec{H}$ , se tiene:

$$\left[ \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1 \right]_{Z=0} \times \hat{n} = 0 \quad (\text{e10})$$

Sustituyendo los campos:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{1}{q_2} [q_{z2}(E_{t2}) \hat{j} - q_{y2}(E_{t2}) \hat{k}] \times \hat{k} \\ & - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{1}{q_1} [q_{z1}(E_{t1} + E_{r1}) \hat{j} - q_{y1}(E_{t1} + E_{r1}) \hat{k}] \times \hat{k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{e11})$$

Realizando el producto e igualando las componentes:

$$\frac{q_{z2}}{\mu_2} E_{t2} = \frac{q_{z1}}{\mu_1} E_{t1} - \frac{q_{z1}}{\mu_1} E_{r1} \quad (\text{e12})$$

De las (e9) y (e12) encontramos

$$\frac{E_{t2}}{E_{t1}} = \frac{2 \frac{q_{z1}}{\mu_1}}{\frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2}} \quad (\text{e13})$$

$$\frac{E_{r1}}{E_{t1}} = \frac{\frac{q_{z1}}{\mu_1} - \frac{q_{z2}}{\mu_2}}{\frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2}} \quad (\text{e14})$$

Sea

$$C_1^{(s)} = \frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2} \quad (\text{e15})$$

$$D_1^{(s)} = \frac{q_{z1}}{\mu_1} - \frac{q_{z2}}{\mu_2} \quad (\text{e16})$$

$$F_1^{(s)} = 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} \quad (\text{e17})$$

Las (e13) y (e14) se escriben como

De las (e9) y (e12) encontramos

$$\frac{E_{t2}}{E_{t1}} = \frac{F_1^{(s)}}{C_1^{(s)}} \quad (\text{e18})$$

$$\frac{E_{r1}}{E_{t1}} = \frac{D_1^{(s)}}{C_1^{(s)}} \quad (\text{e19})$$

Los campos eléctricos y magnéticos

$$\vec{E}_1(y, z, t) = e^{iq_y y} \left[ e^{+iq_{z1}z} + \frac{D_1^{(s)}}{C_1^{(s)}} e^{-iq_{z1}z} \right] E_{t1} e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{e20})$$

$$\vec{B}_1(y, z, t) = \frac{1}{\omega} e^{iq_y y} \left\{ (q_{z1}\hat{j} - q_y\hat{k}) e^{+iq_{z1}z} - (q_{z1}\hat{j} + q_y\hat{k}) \frac{D_1^{(s)}}{C_1^{(s)}} e^{-iq_{z1}z} \right\} E_{t1} e^{-i\omega t} \quad (\text{e21})$$

$$\vec{E}_2 = e^{iq_y y} e^{+iq_{z2} z} \frac{F_1^{(s)}}{C_1^{(s)}} E_{t1} e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{e22})$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{\omega} e^{iq_y y} e^{+iq_{z2} z} (q_{z2} \hat{j} - q_y \hat{k}) \frac{F_1^{(s)}}{C_1^{(s)}} E_{t1} e^{-i\omega t} \quad (\text{e23})$$

Cuando el medio “2” está caracterizado por una constante dieléctrica compleja (lo cual significa que el medio es absorbente), los campos además la fase explícita hay una fase adicional, así como un decaimiento exponencial. Por ejemplo, el campo eléctrico en el medio dos sería

$$\vec{E}_2 = A_1^{(s)} e^{i(q_{2y} r \cdot y + q_{2z} r \cdot z + \varphi_1^{(s)} - \omega t)} e^{-q_{z2} i z} \hat{i} \quad (\text{e24})$$

Donde asumimos que

$$\frac{F_1^{(s)}}{C_1^{(s)}} = A_1^{(s)} e^{+i\varphi_1^{(s)}} \quad (\text{e25})$$

La ecuación (e24), puede escribirse entonces como sigue:

$$\vec{E}_2 = A_1^{(s)} e^{i(q_{2y} r \cdot y + q_{2z} r \cdot z + \varphi_1^{(s)} - \omega t)} e^{-q_{z2} i z} \hat{i}$$

Fijándonos en la exponencial real:

$$A_1^{(s)} e^{-q_{z2} i z} = A_1^{(s)} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} n_2 z}$$

En el medio 2,  $z = d_2$ , entonces

$$A_1^{(s)} e^{-q_{z2} i z} = A_1^{(s)} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} n_2 d_2}$$

Entonces

$$A_1^{(s)} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} n_2 d_2} = A_1^{(s)} e^{-d_2/\delta}$$

Donde  $\delta = \frac{\lambda}{2\pi k}$

$$q_{z2} = q_{z2r} + iq_{z2i} \quad (\text{e26})$$

Recordar que  $q_{z2} = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 \omega^2 - q_y^2}$ .

Este decaimiento exponencial y la fase no aparecen cuando el medio “2” está caracterizado por una constante dieléctrica puramente real (es decir el medio no es absorbente)

# APÉNDICE F

## UNA CAPA

Reflexión y transmisión por una capa

Los campos eléctricos y magnéticos

Para  $-\infty \leq z \leq 0$

$$\vec{E}_1 = [E_{t1}e^{i\vec{q}_{t1}\cdot\vec{r}} + E_{r1}e^{i\vec{q}_{r1}\cdot\vec{r}}]e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{f1})$$

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\omega} [q_{z1}(E_{t1}e^{i(\vec{q}_{t1}\cdot\vec{r})} - E_{r1}e^{i(\vec{q}_{r1}\cdot\vec{r})})\hat{j} - q_{y1}(E_{t1}e^{i(\vec{q}_{tn}\cdot\vec{r})} + E_{r1}e^{i(\vec{q}_{rn}\cdot\vec{r})})\hat{k}]e^{-i\omega t} \quad (\text{f2})$$

Para  $0 \leq z \leq d_2$

$$\vec{E}_2 = [E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2}\cdot\vec{r})} + E_{r2}e^{i(\vec{q}_{r2}\cdot\vec{r})}]e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{f3})$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{\omega} [(q_{z2}\hat{j} - q_{y2}\hat{k})E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2}\cdot\vec{r})} - (q_{z2}\hat{j} + q_{y2}\hat{k})E_{r2}e^{i(\vec{q}_{r2}\cdot\vec{r})}]e^{-i\omega t} \quad (\text{f4})$$

Para  $d_2 \leq z \leq +\infty$

$$\vec{E}_3 = E_{t3}e^{i(\vec{q}_{t3}\cdot\vec{r})}e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{f5})$$

$$\vec{B}_3 = \frac{1}{\omega} (q_{z3}\hat{j} - q_{y3}\hat{k})E_{t3}e^{i(\vec{q}_{t3}\cdot\vec{r})}e^{-i\omega t} \quad (\text{f6})$$

Donde

$$\vec{q}_{tn} = q_{yn}\hat{j} + q_{zn}\hat{k} \quad (\text{f7})$$

$$\vec{q}_{rn} = q_{yn}\hat{j} - q_{zn}\hat{k} \quad (\text{f8})$$

y  $q_n = \omega\sqrt{\mu_n\varepsilon_n}$ ,  $q_{zn} = \sqrt{\mu_n\varepsilon_n\omega^2 - q_{yn}^2}$ ,  $q_{yn} = q_y = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\sin\theta_i$  y  $n=1,2,3$ . y donde  $\mu_n$  y  $\varepsilon_n$  son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del medio correspondiente. Se utilizan unidades MKS, considerando las cantidades absolutas, es decir  $\mu = \mu_0\mu_r$  y  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ .

Dependiendo del sistema, se tendrán tantas fronteras como número de medios existan. Se analiza a continuación la forma que toman las ecuaciones de Maxwell en cada frontera, obteniendo así un sistema de ecuaciones de  $n_m \times n_m$ , el cual es posible resolver con el método recursivo.

En la frontera  $z = 0$

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1]_{z=0} \times \hat{k} = 0 \quad (f9)$$

Sustituyendo los campos:

$$[(E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2}\cdot\vec{r})} + E_{r2}e^{i(\vec{q}_{r2}\cdot\vec{r})})\hat{i} - (E_{t1}e^{i(\vec{q}_{t1}\cdot\vec{r})} + E_{r1}e^{i(\vec{q}_{r1}\cdot\vec{r})})\hat{i}]_{z=0} \times \hat{k} = 0 \quad (f10)$$

Realizando el producto e igualando las componentes

$$E_{t2} + E_{r2} = E_{t1} + E_{r1} \quad (f11)$$

Para la condición en la que se considera a la componente tangencial de  $\vec{H}$ , se tiene:

$$\left[\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2 - \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1\right]_{z=0} \times \hat{k} = 0 \quad (f12)$$

Sustituyendo los campos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_2}[q_{z2}(E_{t2} - E_{r2})\hat{j} - q_{y2}(E_{t2} + E_{r2})\hat{k}] \times \hat{k} \\ & - \frac{1}{\mu_1}[q_{z1}(E_{t1} - E_{r1})\hat{j} - q_{y1}(E_{t1} + E_{r1})\hat{k}] \times \hat{k} = 0 \end{aligned} \quad (f13)$$

Realizando el producto e igualando las componentes:

$$\frac{q_{z2}}{\mu_2}E_{t2} - \frac{q_{z2}}{\mu_2}E_{r2} = \frac{q_{z1}}{\mu_1}E_{t1} - \frac{q_{z1}}{\mu_1}E_{r1} \quad (f14)$$

De las (f11) y (f14) encontramos

$$+2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} E_{t2} = \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) E_{t1} - \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} - \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) E_{r1} \quad (\text{f15})$$

$$-2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} E_{r2} = \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} - \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) E_{t1} - \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) E_{r1} \quad (\text{f16})$$

Sea

$$C_1^{(s)} = \frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2} \quad (\text{f17})$$

$$D_1^{(s)} = \frac{q_{z1}}{\mu_1} - \frac{q_{z2}}{\mu_2} \quad (\text{f18})$$

$$F_2^{(s)} = 2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} \quad (\text{f19})$$

La (f15) y (f16) son

$$+F_2^{(s)} E_{t2} = C_1^{(s)} E_{t1} - D_1^{(s)} E_{r1} \quad (\text{f20})$$

$$-F_2^{(s)} E_{r2} = D_1^{(s)} E_{t1} - C_1^{(s)} E_{r1} \quad (\text{f21})$$

En la frontera  $z = d_2$

$$[\vec{E}_3 - \vec{E}_2]_{z=d_2} \times \hat{k} = 0 \quad (\text{f22})$$

Sustituyendo los campos:

$$[(E_{t3} e^{i(\vec{q}_{t3} \cdot \vec{r})}) \hat{i} - (E_{t2} e^{i(\vec{q}_{t2} \cdot \vec{r})} + E_{r2} e^{i(\vec{q}_{r2} \cdot \vec{r})}) \hat{i}]_{z=0} \times \hat{k} = 0 \quad (\text{f23})$$

Realizando el producto e igualando las componentes

$$E_{t3} e^{+iq_{z3}d_2} = E_{t2} e^{+iq_{z2}d_2} + E_{r2} e^{-iq_{z2}d_2} \quad (\text{f24})$$

Para la condición en la que se considera a la componente tangencial de  $\vec{H}$ , se tiene:

$$\left[ \frac{1}{\mu_3} \vec{B}_3 - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 \right]_{z=d_2} \times \hat{k} = 0 \quad (\text{f25})$$

Sustituyendo los campos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_3} [q_{z3}(E_{t3}e^{+iq_{z3}d_2})\hat{j} - q_{y3}(E_{t3}e^{+iq_{z3}d_2})\hat{k}] \times \hat{k} \\ & - \frac{1}{\mu_2} [q_{z2}(E_{t2}e^{+iq_{z2}d_2} - E_{r2}e^{-iq_{z2}d_2})\hat{j} \\ & - q_{y2}(E_{t2}e^{+iq_{z2}d_2} + E_{r2}e^{-iq_{z2}d_2})\hat{k}] \times \hat{k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{f26})$$

Realizando el producto e igualando las componentes:

$$\frac{q_{z3}}{\mu_3} E_{t3}e^{+iq_{z3}d_2} = \frac{q_{z2}}{\mu_2} E_{t2}e^{+iq_{z2}d_2} - \frac{q_{z2}}{\mu_2} E_{r2}e^{-iq_{z2}d_2} \quad (\text{f27})$$

De las (f24) y (f27) encontramos

$$+2 \frac{q_{z3}}{\mu_3} E_{t3}e^{+iq_{z3}d_2} = \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} + \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) E_{t2}e^{+iq_{z2}d_2} - \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} - \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) E_{r2}e^{-iq_{z2}d_2} \quad (\text{f28})$$

$$-2 \frac{q_{z3}}{\mu_3} 0e^{-iq_{z3}d_2} = \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} - \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) E_{t2}e^{+iq_{z2}d_2} - \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} + \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) E_{r2}e^{-iq_{z2}d_2} \quad (\text{f29})$$

Sea

$$C_2^{(s)} = \frac{q_{z2}}{\mu_2} + \frac{q_{z3}}{\mu_3} \quad (\text{f30})$$

$$D_2^{(s)} = \frac{q_{z2}}{\mu_2} - \frac{q_{z3}}{\mu_3} \quad (\text{f31})$$

La (f28) y (f29) son

$$+2 \frac{q_{z3}}{\mu_3} E_{t3}e^{+iq_{z3}d_2} = C_2^{(s)} E_{t2}e^{+iq_{z2}d_2} - D_2^{(s)} E_{r2}e^{-iq_{z2}d_2} \quad (\text{f32})$$

$$-2 \frac{q_{z3}}{\mu_3} 0e^{-iq_{z3}d_2} = D_2^{(s)} E_{t2}e^{+iq_{z2}d_2} - C_2^{(s)} E_{r2}e^{-iq_{z2}d_2} \quad (\text{f33})$$

Sustituyendo (f20) y (f21) en (f32) y (f33) obtenemos

$$\begin{aligned}
& +2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} 2 \frac{q_{z3}}{\mu_3} E_{t3} e^{+iq_{z3}d_2} \\
& = + \left[ C_1^{(s)} C_2^{(s)} e^{+iq_{z2}d_2} + D_1^{(s)} D_2^{(s)} e^{-iq_{z2}d_2} \right] E_{t1} \\
& - \left[ D_1^{(s)} C_2^{(s)} e^{+iq_{z2}d_2} + C_1^{(s)} D_2^{(s)} e^{-iq_{z2}d_2} \right]
\end{aligned} \tag{f34}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} 2 \frac{q_{z3}}{\mu_3} 0 e^{-iq_{z3}d_2} \\
& = \left[ C_1^{(s)} D_2^{(s)} e^{+iq_{z2}d_2} + D_1^{(s)} C_2^{(s)} e^{-iq_{z2}d_2} \right] E_{t1} \\
& - \left[ D_1^{(s)} D_2^{(s)} e^{+iq_{z2}d_2} + C_1^{(s)} C_2^{(s)} e^{-iq_{z2}d_2} \right] E_{r1}
\end{aligned} \tag{f35}$$

Sea

$$V_2^{(s)} = \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} - \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} - \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) e^{+iq_{z2}d_2} + \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} + \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) e^{-iq_{z2}d_2} \tag{f36}$$

$$U_2^{(s)} = \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} + \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} - \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) e^{+iq_{z2}d_2} + \left( \frac{q_{z1}}{\mu_1} - \frac{q_{z2}}{\mu_2} \right) \left( \frac{q_{z2}}{\mu_2} + \frac{q_{z3}}{\mu_3} \right) e^{-iq_{z2}d_2} \tag{f37}$$

La (B34) y (B35) son

$$\begin{aligned}
& +2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} 2 \frac{q_{z3}}{\mu_3} E_{t3} e^{+iq_{z3}d_2} \\
& = + \left[ C_1^{(s)} C_2^{(s)} e^{+iq_{z2}d_2} + D_1^{(s)} D_2^{(s)} e^{-iq_{z2}d_2} \right] E_{t1} \\
& - \left[ D_1^{(s)} C_2^{(s)} e^{+iq_{z2}d_2} + C_1^{(s)} D_2^{(s)} e^{-iq_{z2}d_2} \right]
\end{aligned} \tag{f38}$$

$$0 = U_2^{(s)} E_{t1} - V_2^{(s)} E_{r1} \tag{f39}$$

Así podemos escribir las amplitudes como

$$E_{r1} = \frac{U_2^{(s)}}{V_2^{(s)}} E_{t1} \tag{f40}$$

$$E_{t2} = 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} \frac{C_2}{V_2} e^{-iq_{z2}d_2} E_{t1} \tag{f41}$$

$$E_{r2} = 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} \frac{D_2}{V_2} e^{+iq_{z2}d_2} E_{t1} \tag{f42}$$

$$E_{t3} = 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} 2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} \frac{1}{V_2} e^{-iq_{z3}d_2} E_{t1} \quad (\text{f43})$$

Los campos eléctricos y magnéticos

$$\vec{E}_1(y, z, t) = e^{iq_y y} \left[ e^{+iq_{z1}z} + \frac{U_2}{V_2} e^{-iq_{z1}z} \right] E_{t1} e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (\text{f44})$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(y, z, t) = \frac{1}{\omega} e^{+iq_{z2}z} e^{iq_y y} \left\{ q_{z1} \left[ e^{+iq_{z1}z} - \frac{U_2}{V_2} e^{-iq_{z1}z} \right] \hat{j} \right. \\ \left. - q_y \left[ e^{+iq_{z1}z} + \frac{U_2}{V_2} e^{-iq_{z1}z} \right] \hat{k} \right\} E_{t1} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{f45})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 = 2 \frac{q_{z1} C_2}{\mu_1 V_2} e^{iq_y y} e^{+iq_{z2}(z-d_2)} e^{-i\omega t} E_{t1} \hat{i} \\ + 2 \frac{q_{z1} D_2}{\mu_1 V_2} e^{iq_y y} e^{-iq_{z2}(z-d_2)} e^{-i\omega t} E_{t1} \hat{i} \end{aligned} \quad (\text{f46})$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 = \frac{1}{\omega} 2 \frac{q_{z1} C_2}{\mu_1 V_2} e^{iq_y y} e^{+iq_{z2}(z-d_2)} e^{-i\omega t} (q_{z2} \hat{j} - q_y \hat{k}) E_{t1} \\ - \frac{1}{\omega} 2 \frac{q_{z1} D_2}{\mu_1 V_2} e^{iq_y y} e^{-iq_{z2}(z-d_2)} e^{-i\omega t} (q_{z2} \hat{j} + q_y \hat{k}) E_{t1} \end{aligned} \quad (\text{f47})$$

$$\vec{E}_3 = 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} 2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} \frac{1}{V_2} e^{iq_y y} e^{+iq_{z3}(z-d_2)} e^{-i\omega t} E_{t1} \hat{i} \quad (\text{f48})$$

$$\vec{B}_3(y, z, t) = \frac{1}{\omega} 2 \frac{q_{z1}}{\mu_1} 2 \frac{q_{z2}}{\mu_2} \frac{1}{V_2} (q_{z3} \hat{j} - q_y \hat{k}) e^{iq_y y} e^{+iq_{z3}(z-d_2)} e^{-i\omega t} E_{t1} \quad (\text{f49})$$

Es válida la discusión del apéndice D.

# APÉNDICE G

## CONDICIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA 3 MEDIOS

Aplicando las condiciones en la frontera en  $z = d_2$ , ( para  $n=1$  y  $n=2$ ) se tienen las siguientes ecuaciones:

$$[\vec{E}_3 - \vec{E}_2]_{z=Z_2=d_2} \times \hat{k} = 0$$

Sustituyendo los campos:

$$[(E_{t3}e^{i(\vec{q}_{t3} \cdot \vec{r} - \omega t)} + E_{r3}e^{i(\vec{q}_{r3} \cdot \vec{r} - \omega t)})\hat{i} - (E_{t2}e^{i(\vec{q}_{t2} \cdot \vec{r} - \omega t)} + E_{r2}e^{i(\vec{q}_{r2} \cdot \vec{r} - \omega t)})\hat{i}]_{z=Z_2=d_2} \times \hat{n} = 0$$

En este caso, Se utilizan unidades MKS, considerando las cantidades absolutas, es decir  $\mu = \mu_0\mu_r$  y  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ .

Realizando el producto e igualando las componentes:

$$E_{t3}\exp(+iq_{3z}d_2) + E_{r3}\exp(-2iq_{3z}d_2) = E_{t2}\exp(+iq_{2z}d_2) + E_{r2}\exp(-2iq_{2z}d_2) \quad (g1)$$

Para la condición en la que se considera a la componente tangencial de  $\vec{H}$ , se tiene:

$$\left[ \frac{1}{\mu_3} \vec{B}_3 - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 \right]_{z=Z_2=d_2} \times \hat{k} = 0$$

Sustituyendo los campos:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}} \frac{1}{q_3} [q_{3z}(E_{t3}\exp(+iq_{3z}d_2) - E_{r3}\exp(-iq_{3z}d_2))\hat{j} \\ & \quad - q_{3y}(E_{t3}\exp(+iq_{3z}d_2) + E_{r3}\exp(-iq_{3z}d_2))\hat{k}] \times \hat{k} - \\ & \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{1}{q_2} [q_{2z}(E_{t2}\exp(+iq_{2z}d_2) - E_{r2}\exp(-iq_{2z}d_2))\hat{j} \\ & \quad - q_{2y}(E_{t2}\exp(+iq_{2z}d_2) + E_{r2}\exp(-iq_{2z}d_2))\hat{k}] \times \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

Realizando el producto e igualando las componentes:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}} \frac{1}{q_3} [q_{3z}(E_{t3} \exp(+iq_{3z}d_2) - E_{r3} \exp(-iq_{3z}d_2))] - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{1}{q_2} [q_{2z}(E_{t2} \exp(+iq_{2z}d_2) - E_{r2} \exp(-iq_{2z}d_2))] = 0 \quad (g2)$$

Y se obtiene dos ecuaciones

$$E_{t3} \exp(+iq_{3z}d_2) + E_{r3} \exp(-2iq_{3z}d_2) = E_{t2} \exp(+iq_{2z}d_2) + E_{r2} \exp(-2iq_{2z}d_2) \quad (g1)$$

$$\frac{q_{3z}}{\mu_3} E_{t3} \exp(+iq_{3z}d_2) - [-E_{r3} \exp(-iq_{3z}d_2)] = \left[ \frac{q_{2z}}{\mu_2} [E_{t2} \exp(+iq_{2z}d_2) - E_{r2} \exp(-iq_{2z}d_2)] \right] = 0 \quad (h3)$$

En la película de vacío ( $d_2 < z < d_2 + d_3$ )

$$\vec{E}(z) = E_{t3} \exp[+iq_{3z}(z - d_2)] + E_{r3} [-iq_{3z}(z - d_2)] \quad (g4)$$

Suponiendo que las fases son iguales

$$\vec{E}(z) = t \exp(+if) \exp[+iq_{3z}u] + r \exp(-if) [-iq_{3z}u] \quad (g5)$$

$$|\vec{E}(z)|^2 = \{t \exp[+iq_{3z}u + if] + r \exp[-iq_{3z}u - if]\} \{t \exp[-iq_{3z}u - if] + r \exp[+iq_{3z}u + if]\} \quad (g6)$$

$$|\vec{E}(z)|^2 = t^2 + r^2 + 2tr \cos(2q_{3z}u + 2f) \quad (g7)$$

Si épsilon es real, entonces  $f=0$  y

$$|\vec{E}(z)|^2 = t^2 + r^2 + 2tr \cos(2q_{3z}u) \quad (g8)$$

Si estamos en incidencia normal

$$|\vec{E}(z)|^2 = t^2 + r^2 + 2tr \cos(2\sqrt{\mu_3 \varepsilon_3} \omega^2 u) \quad (g9)$$

$$|\vec{E}(z)|^2 = t^2 + r^2 + 2tr \cos\left(\frac{4\pi n_3}{\lambda} d_3\right) \quad (\text{g10})$$

En la película de plata ( $d_2+d_3 < z < d_2+d_3+d_4$ )

$$\begin{aligned} \vec{E}_4(z) = & E_{t4} \exp[+iq_{4z}(z - d_2 - d_3)] \\ & + E_{r3}[-iq_{4z}(z - d_2 - d_3)] \end{aligned} \quad (\text{g11})$$

Suponiendo que las fases son iguales  $q_{4z} = q_{4zr} + iq_{4zi}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_4(z) = & t_4 \exp(+if_4) \exp[+iq_{4zr}u - q_{4zi}u] \\ & + r_4 \exp(-if_4)[-iq_{4z}u + q_{4zi}u] \end{aligned} \quad (\text{g12})$$

$$\begin{aligned} |\vec{E}_4(z)|^2 = & \{t_4 \exp[+iq_{4zr}u - q_{4zi}u + if_4] \\ & + r_4[-iq_{4z}u + q_{4zi}u \\ & - if_4]\} \{t_4 \exp[-iq_{4zr}u - q_{4zi}u - if_4] \\ & + r_4[+iq_{4z}u + q_{4zi}u + if_4]\} \end{aligned} \quad (\text{g13})$$

$$\begin{aligned} |\vec{E}(z)|^2 = & t_4^2 \exp(-2q_{4zi}u) + r_4^2 \exp(+2q_{4zi}u) \\ & + 2t_4r_4 \cos(2q_{4zr}u + 2f) \end{aligned} \quad (\text{g14})$$

Si épsilon es real, entonces  $f=0$  y  $q_{4zi} = 0$  y

$$|\vec{E}(z)|^2 = t^2 + r^2 + 2tr \cos(2q_{3z}u) \quad (\text{g15})$$

Si estamos en incidencia normal

$$|\vec{E}(z)|^2 = t^2 + r^2 + 2tr \cos(2\sqrt{\mu_3 \epsilon_3} \omega^2 u) \quad (\text{g16})$$

$$|\vec{E}(z)|^2 = t^2 + r^2 + 2tr \cos\left(\frac{4\pi n_3}{\lambda} d_3\right) \quad (\text{g17})$$

De la ecuación (g4)

$$|\vec{E}_3(z)|^2 = t_3^2 + r_3^2 + 2t_3r_3 \cos(2q_{3z}d_3 + 2f_{3t} - 2f_{3r}) \quad (\text{g18})$$

La condición de máximos

$$\sqrt{\mu_3\varepsilon_3 - \mu_1\varepsilon_1 \sin^2 \theta_i} \frac{4\pi d_3}{\lambda} + 2f = 2n\pi \quad (\text{g19})$$

$$\mu_3\varepsilon_3 = \mu_1\varepsilon_1 \quad (\text{g20})$$

$$\cos \theta_i \frac{4\pi d_3}{\lambda} + 2f = 2n\pi \quad (\text{g21})$$

$$d_3 = \frac{\lambda_0}{4n_3} \quad (\text{g22})$$

F=-0.9p

$$d_3 = \frac{400 \text{ nm}}{4} = 100 \text{ nm}, 115 \text{ nm} \rightarrow 186 \text{ nm} \quad (\text{g23})$$

N es un número entero

La condición de mínimos

$$\sqrt{\mu_3\varepsilon_3 - \mu_1\varepsilon_1 \sin^2 \theta_i} \frac{4\pi d_3}{\lambda} + 2f = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{g24})$$

N es un número entero

$$|\vec{E}_5(z)|^2 = t_5^2 + r_5^2 + 2t_5r_5 \cos(2q_{5z}d_3 + 2f_{5t} - 2f_{5r}) \quad (\text{g25})$$

Para una película de plata

$$\begin{aligned} & \vec{E}_{1r}(z) \\ &= \frac{\left(\frac{q_{1z}}{\varepsilon_1} + \frac{q_{2z}}{\varepsilon_2}\right) D_2 \exp(+iq_{2z}d_2) + \left(\frac{q_{1z}}{\varepsilon_1} - \frac{q_{2z}}{\varepsilon_2}\right) C_2 \exp(-iq_{2z}d_2)}{\left(\frac{q_{1z}}{\varepsilon_1} - \frac{q_{2z}}{\varepsilon_2}\right) D_2 \exp(+iq_{2z}d_2) + \left(\frac{q_{1z}}{\varepsilon_1} + \frac{q_{2z}}{\varepsilon_2}\right) C_2 \exp(-iq_{2z}d_2)} E_{t1} \end{aligned} \quad (\text{g26})$$

# APÉNDICE H

## EL EFECTO PIEL CLÁSICO

La función dieléctrica para el modelo de Drude de un metal de electrones libres está dada por:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega \left( \omega + \frac{i}{\tau} \right)} \quad (\text{h1})$$

A frecuencias bajas, se espera que  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ , y sabiendo que  $\sigma = \frac{N e^2 \tau}{m}$ , de la ec. (h1) se tiene:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi\sigma}{\omega\tau} \frac{1}{\left( \omega + \frac{i}{\tau} \right)} \quad (\text{h2})$$

$$\approx 1 - \frac{4\pi\sigma\tau}{\omega} \left( \omega - \frac{i}{\tau} \right) \quad (\text{h3})$$

Donde la parte real e imaginaria de  $\varepsilon$  son:

$$\varepsilon_r = 1 - 4\pi\sigma\tau \quad (\text{h4})$$

$$\varepsilon_i = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (\text{h5})$$

Entonces, con  $\omega\tau \ll 1$ ,  $|\varepsilon_r| \ll |\varepsilon_i|$ .

Sabiendo que se cumple:

$$n = \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_r \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{h6})$$

$$k = \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_r \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{h7})$$

Entonces:

$$n = k, \quad \omega\tau \ll 1 \quad (\text{h8})$$

Utilizando las ecuaciones

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \left[ e^{-\left(\frac{\omega}{c} \vec{k} \cdot \vec{r}\right)} \right] e^{i\left(\frac{\omega}{c} \vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \quad (\text{h9})$$

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{2nk}{\mu} \quad (\text{h10})$$

En conjunto con (h8) se obtiene el decaimiento en la magnitud del campo eléctrico dentro del metal:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\left(\frac{\lambda}{2\pi k}\right)r} = \vec{E}_0 e^{-r/\delta} \quad (\text{h11})$$

El término  $\delta = \frac{\lambda}{2\pi k}$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda y  $k$  es el índice de absorción, se conoce como la profundidad de piel clásica, esta es una medida de penetración de una onda plana electromagnética en un material.

# BIBLIOGRAFÍA

1. Joannopoulos, J. D., Meade, R. D., & Yablonovitch, J. N. E. (1994). *Photonic Crystals*. Mod. Opt.
2. Dahman, Y. (2017). *Nanotechnology and Functional materials for engineers*. Elsevier, Inc.
3. Valenzuela Sau, J. D., Méndez Sánchez, R. A., Aceves, R., & García Llamas, R. (2020). *Dirac equation and energy levels of electrons in one-dimensional wells: Plane wave expansion method*. *Physica E: Low dimensional Systems and Nanostructures*, 124, 114298.10.1016.
4. Cheng, C. C., & Scherer, A. (1995). *Fabrication of photonic band-gap crystals*. American Vacuum Society.
5. Yablonovitch, E. (1987). *Inhibited spontaneous emission in solid state physics and electronics*. *Physical Review Letters*, 7, 58. 10.1103.
6. John, S. (1987). *Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices*. *Physical Review Letters*, 58. 10.1103.
7. Oraevskii, A. N., & Protsenko, I. E. (2000). *High refractive index and other optical properties of heterogeneous media*. *JETP Letters*, 72. 10.1134
8. Prather, D. (2009). *Photonic Crystals, theory, applications and fabrication*. Wiley.
9. Johnson, S. G., Fan, S., Villeneuve, P. R., & Joannopoulos, J. D. (1999). *Guided Modes in Photonic Crystal Slabs*. *Phys. Rev. B*, 60, 70. 10.1103.
10. Wooten, F. (1972). *Optical properties of solids*. American Press.
11. MacLeod, M. A. (2001). *Thin-Film Optical Filters*. CRC Press.
12. Palik, E. (1985). *Handbook of Optical Constants of Solids* (Vol. 1). Academia Press.

13. Pendry, J. (1994). *Photonic band structure*. J. Mod. Opt., 41. 10.1088
14. Joannopoulos, J. D., Villeneuve, P., & Fan, S. (1997). *Photonic crystals: putting a new twist on light*. Nature, 386. 10.1038.
15. Chuang, S. L. (2009). *Physics of Photonic Devices*. John Wiley and Sons.
16. Vetrov, S. Y., Bikbaev, R. G., & Timofeev, I. V. (2013). *Optical Tamm states at the interface between a photonic crystal and a nanocomposite with resonance dispersion*. JETP, 117. 10.1088.
17. Fink, Y., Winn, J. N., Fan, S., Chen, C., Michel, J., Joannopoulos, J. D., & Thomas, E. L. (1998). *A dielectric omnidirectional reflector*. Science, 282. 10.1126.
18. Wang, X., Hu, X., Li, Y., Jia, W. J., Xu, C., Liu, X., & Zi, J. (2002). *Enlargement of omnidirectional total reflection frequency range in one-dimensional photonic crystals by using photonic heterostructures*. Appl. Phys. Lett, 80. 10.1063.
19. Toshihiko, B., Noda, S., Tomoda, K., Yamamoto, N., & Chutinan, A. (2000). *Photonic Crystals, An Introduction*. Science, 289. 10.1007.
20. Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons.
21. Abdulhalim, I. (2000). *Analytic propagation matrix method for anisotropic magneto-optic layered media*. Journal of Optics, 557. 10.1088.
22. C. Luna Sánchez, A. S. Ramírez Duverger, R. García Llamas (2013). *Excitación de modos y relación de dispersión de un material metal-dieléctrico*. Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora.
23. Ramírez Duverger A., Gaspar Armenta J., García Llamas R. (2006). *Surface wave effect on light scattering from one-dimensional photonic crystals*. Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora.
24. Ramírez Duverger A., Gaspar Armenta J., García Llamas R. (2007). *Experimental determination of a surface wave at the one-dimensional photonic*

*crystal–metal interface*. Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora.

25. Ehrenreich, H., & Philipp, H. R. (1962). *Optical properties of Ag and Cu*. Physical Review, 128.10.1103.
26. Cooper, B. R., Ehrenreich, H., & Philipp, H. R. (1965). *Optical properties of noble metals*. Physical Review, 138.10.1103.
27. Wooten, F., Irani, G. B., & Huen, T. (1971). *Optical Properties of Solids*. American Press.
28. Green, E. L., & Muldaur, L. (1970). *Theory of Electromagnetic Properties of Superconducting and Normal Systems*. Physical Review, 156. 10.1103.
29. Mueller, F. M., & Phillips, J. C. (1967). *Electronic spectrum of crystalline copper*. Physical Review, 157. 10.1103.
30. Berglund, C. N., & Spicer, W. E. (1967). *Photoemission Studies of Copper and Silver: Theory*. Physical Review, 136. 10.1103.
31. Flory, F. (1995). *Thin Films For Optical Systems*. CRC Press.
32. Regalado, E., & García Llamas, R. (1993). *Method for calculating optical coating stabilities*. Optical Society of America, 5677.10.1364.
33. Yariv, A., Xu, Y., K.Lee, R., & Scherer, A. (1999). *Coupled-resonator optical waveguide: a proposal and analysis*. Optics Letters, 24(11), 1523–1527, 10.1364/ol.24.000711

