

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

“TEORÍA CUALITATIVA DE SISTEMAS CUADRÁTICOS EN EL PLANO”



Trabajo de Tesis que para obtener el grado de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta

Juan Diego Ramírez Valdez

*Director de Tesis
Dr. Ruben Flores E.*

Hermosillo, Sonora

Diciembre de 2002

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Teoría Cualitativa de Sistemas Cuadráticos en el Plano

Juan Diego Ramírez Valdez

Diciembre de 2002

Índice

Introducción.	ii
Capítulo 1. Teoría Cualitativa de Sistemas Dinámicos.	1
1.1 Retrato Fase y Puntos Singulares.	2
1.2 Teoría de Poincaré-Bendixson.	4
1.2.1. Criterio para la existencia de Ciclos Límite.	6
Capítulo 2. Sistemas Cuadráticos en el Plano.	9
2.1. Puntos Singulares de Sistemas Cuadráticos.	9
2.1.1. Criterio de Poincaré para la existencia de centros.	15
2.2. Órbitas Periódicas y Ciclos Límite.	18
2.3. Criterio para la no existencia de Ciclos Límite.	21
Capítulo 3. Aplicaciones.	25
3.1. Sistemas Hamiltonianos.	25
3.2. Sistemas Gradientes.	28
3.3. Sistemas de Tipo Lotka-Volterra.	29
Conclusiones.	33
Bibliografía.	35

Introducción

Ante la dificultad de resolver explícitamente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el plano, los métodos cualitativos o geométricos se constituyen en un importante instrumento para la descripción del comportamiento de las soluciones principalmente en lo que respecta a su comportamiento a la larga.

A Poincaré se deben los principales conceptos y primeros resultados de la teoría cualitativa de los sistemas en el plano como son los conceptos de espacio fase, puntos de equilibrio, ciclos límite, etc; así como el llamado teorema de Poincaré-Bendixson sobre la existencia de ciclos límite.

En este trabajo estudiaremos con mayor detalle el espacio fase de los sistemas cuadráticos en el plano, es decir sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2\end{aligned}$$

principalmente en lo que respecta al número y características de los puntos singulares, la existencia, el número y disposición de los ciclos límite. Utilizando métodos algebraicos y geométricos sencillos así como la presentación de ejemplos y aplicaciones mostraremos las distintas formas que puede tomar el espacio fase para los sistemas cuadráticos. Los métodos que utilizaremos corresponden principalmente a los de los artículos [4] y [5].

El trabajo se presenta dividido en tres capítulos:

En el primer capítulo se exponen algunas nociones básicas de la teoría de Poincaré-Bendixson, la cual nos describe el comportamiento de las curvas solución que describe un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano. Empezaremos dando algunas definiciones elementales y concluiremos con el Teorema de Poincaré-Bendixson y un importante teorema que involucra la divergencia.

En el segundo capítulo presentamos las distintas propiedades de los sistemas cuadráticos y algunos criterios para la existencia de ciclos límite de estos sistemas.

En el tercer capítulo estudiamos familias importantes de sistemas cuadráticos en el plano, especialmente los sistemas Hamiltonianos, los sistemas Gradiente y los que llamamos de tipo Lotka-Volterra.

Finalmente se hace una sección de conclusiones en la que se resumen los aspectos más importantes de este trabajo y además se harán algunas observaciones.

Capítulo 1

Teoría cualitativa de sistemas dinámicos.

Consideremos un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ y una función continua $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ definida en A y con valores en \mathbb{R}^2 . Un **sistema de ecuaciones diferenciales autónomo en el plano** es un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = f_2(x, y)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Una **curva solución** de (1.1) en un intervalo $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$, es una curva en el plano $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definida en J y con valores en A tal que $\dot{x} = f_1(x(t), y(t))$ y $\dot{y} = f_2(x(t), y(t)) \forall t \in J$.

Propiedad fundamental de los sistemas autónomos. Si $\gamma : (t_0 - a, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^2$, es una curva solución de (1.1) tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, entonces $\xi(t) = \gamma(t + t_0 - t_1)$ es curva solución de (1.1) en el intervalo $(t_1 - a, t_1 + a)$ y tal que $\xi(t_1) = (x_0, y_0)$.

La propiedad anterior es fácilmente verificable viendo que $\xi(t) = \dot{\gamma}(t + t_0 - t_1) = F(\gamma(t + t_0 - t_1)) = F(\xi(t))$ para $t_1 - a < t < t_1 + a$.

Problema de Cauchy. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A \subset \mathbb{R}^2$. El Problema de Cauchy consiste en encontrar una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, definida en un intervalo J que contiene a t_0 y tal que:

$$\begin{aligned}1) \dot{\gamma}(t) &= F(\gamma(t)), \forall t \in J \\ 2) \gamma(t_0) &= (x_0, y_0)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Con respecto al Problema de Cauchy enunciamos sin demostrar los siguientes teoremas fundamentales:

Teorema 1 (Existencia y Unicidad) Sea $A = \{(x, y) | x \in (x_0 - a, x_0 + a), y \in (y_0 - b, y_0 + b)\}$. Si $F(x, y)$ en el lado derecho de (1.1) es una función diferenciable y acotada en A , entonces el Problema de Cauchy (1.2) tiene una única solución en el intervalo $J = (t_0 - h, t_0 + h)$ donde $h \leq \min(a, \frac{b}{M})$ y M es una cota superior para los valores de $\|F\|$ en A .

Teorema 2 Sea $\phi(t, t_0, x_0, y_0)$ la solución al problema de Cauchy (1.2) valuada en t y que en t_0 pasa por (x_0, y_0) , entonces ϕ es una función diferenciable en todos sus argumentos en una vecindad alrededor de (t_0, x_0, y_0) .

La demostración de ambos teoremas se puede consultar en [1]

1.1 Retrato Fase y Puntos Singulares

Definición 3 Al conjunto de curvas geométricas en el plano que recorren las soluciones $(x(t), y(t))$ del sistema (1.1) se le conoce como **retrato fase**. A las curvas geométricas que determinan la traza de las curvas solución se les llama **órbitas**.

Es de hacer notar, que si la función F en el lado derecho del sistema (1.1) se multiplica por una función $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $h \neq 0$, entonces el nuevo sistema tiene el mismo retrato fase que el sistema inicial. Más aún, si tomamos $h(x, y) = \frac{1}{1 + \|F(x, y)\|}$, entonces el nuevo sistema es tal que todo problema de Cauchy tiene solución única definida para todo t real.

Definición 4 Una solución $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ se dice **periódica** si existe $T > 0$ tal que $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Al mínimo valor de $T > 0$ que satisface la condición se le llama **periodo**.

Definición 5 Una curva solución γ del sistema autónomo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y)\end{aligned}$$

se llama **isoclina** si el campo vectorial formado por $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ tiene la misma inclinación a lo largo de γ .

Definición 6 A un punto (x_0, y_0) tal que $f_1(x_0, y_0) = 0$, $f_2(x_0, y_0) = 0$, se le dice **punto singular** o **punto de equilibrio**. En este caso la curva

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, es la curva solución al problema de Cauchy (1.2). Si el punto (x_0, y_0) no es singular se llama **punto regular**.

Para la clasificación de los puntos singulares de (1.1) supondremos que el origen es el punto singular y escribiremos el lado derecho de (1.1) en la forma

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (ax + by + \Phi_1(x, y), cx + dy + \Phi_2(x, y)) \text{ con} & (1.3) \\ \Phi_i(0, 0) &= 0, \text{ y } \lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \text{ para } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Es decir, trasladamos el punto singular al origen y linealizamos el sistema alrededor de éste.

Consideremos la matriz cuadrada

$$\Delta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Diremos que el punto singular $(0, 0)$ es **no degenerado** si $\det \Delta \neq 0$. De otra manera, diremos que $(0, 0)$ es punto singular **degenerado**.

Definición 7 Consideremos el sistema lineal asociado a (1.3) y supongamos que $(0, 0)$ es un punto singular no degenerado de (1.1). a) Se llama **nodo** si la matriz Δ posee valores propios reales del mismo signo y; b) se llama **punto silla** si los valores propios son reales y de signo contrario. c) Si la matriz Δ tiene valores propios complejos con parte real distinta de cero, el punto singular se llama **foco**.

Respecto al caso no lineal, mencionaremos el siguiente teorema de Poincaré que reúne los tres casos anteriores:

Teorema 8 Sea $(0, 0)$ un punto singular no degenerado del sistema (1.3) y consideremos la matriz asociada Δ . Si se cumplen los casos a), b) ó c) de la definición anterior, entonces $(0, 0)$ de (1.3) es del mismo tipo que en cada caso del sistema lineal asociado.

Ver demostración en [2].

Note que en la definición anterior, no hemos considerado para Δ el caso de que tenga valores propios que sean imaginarios puros. La razón de esto es que en ese caso el retrato fase alrededor del punto es topológicamente distinto al que presenta el sistema lineal asociado. Este caso queda cubierto mediante:

Definición 9 Un punto singular se denomina **centro** si posee una vecindad V tal que la órbita través de cada punto de V es periódica y está contenida en V .

Es pertinente señalar aquí que si el origen es un centro entonces los valores propios de la matriz Δ son imaginarios puros. Ver [1].

Teorema 10 Sea $(0, 0)$ un punto singular no degenerado del sistema (1.3) y consideremos la matriz asociada Δ .

1.2 Teoría de Poincaré-Bendixson

Definición 11 Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva solución del sistema (1.1) definida para toda $t \in \mathbb{R}$. Un punto (\tilde{x}, \tilde{y}) en la cerradura de A se dice **punto ω -límite de $(x(t), y(t))$** , si existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$. Al conjunto $A_\omega = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ es punto } \omega\text{-límite de } (x(t), y(t))\}$ se le llama **conjunto ω -límite de $(x(t), y(t))$** . Análogamente, un punto (\tilde{x}, \tilde{y}) en la cerradura de A se dice **punto α -límite de $(x(t), y(t))$** , si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$. Al conjunto $A_\alpha = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ es punto } \alpha\text{-límite de } (x(t), y(t))\}$ se le llama **conjunto α -límite de $(x(t), y(t))$** .

Definición 12 $B \subset \mathbb{R}^2$ se dice **invariante** bajo el sistema (1.1) si para cada $(x_0, y_0) \in B$ la curva solución $\gamma(t)$ con $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ es tal que $(x(t), y(t)) \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Propiedades de los conjuntos límite. En lo que sigue supondremos que la función F en el lado derecho del sistema (1.1) es acotada y que sólo posee puntos singulares aislados.

Teorema 13 Sea γ una curva solución de (1.1) acotada para $t \in (0, \infty)$, entonces

- i) A_ω es no vacío,
- ii) A_ω es cerrado,
- iii) A_ω es conexo,
- iv) A_ω es invariante.

La demostración se puede consultar en [3].

Teorema 14 (Poincaré-Bendixson) Sea A_ω el conjunto ω -límite del sistema (1.1). Entonces distinguimos los siguientes casos respecto a la estructura de A_ω

1. Si A_ω no contiene puntos singulares, entonces A_ω es una curva cerrada y la órbita de la solución γ coincide con A_ω o ésta se acerca en espiral hacia A_ω cuando $t \rightarrow \infty$. En este último caso a A_ω se le llama **ciclo límite**.

2. Si A_ω contiene puntos singulares y puntos regulares, entonces A_ω consta de órbitas y puntos singulares a los cuales tienden esas órbitas cuando $t \rightarrow \infty$.

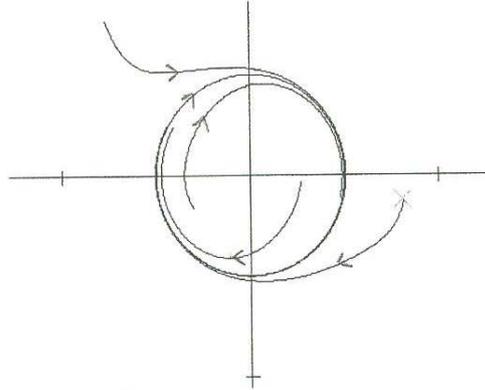
La demostración se puede consultar en [1], [2], [3] y [6].

Corolario 15 Toda órbita periódica contiene en su interior un punto singular.

Ejemplo 16 Este ejemplo ilustra el primer caso del teorema anterior. El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (1 - x^2 - y^2)y\end{aligned}$$

tiene un único punto singular en el origen. La circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 1 es una órbita periódica y toda órbita que pasa por un punto dentro de esta circunferencia tiende a ella cuando $t \rightarrow \infty$ mientras que toda órbita que pasa por un punto fuera de la circunferencia tiende a ella cuando $t \rightarrow -\infty$ mientras que cuando $t \rightarrow -\infty$ la órbita se aleja sin límite. Además los valores propios de la parte lineal de la matriz asociada son imaginarios puros y sin embargo el origen no es un centro.

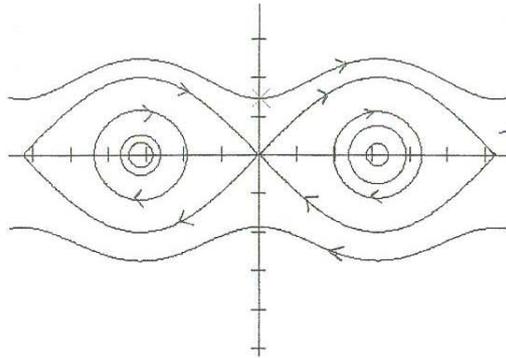


Caso 1 del Teorema de Poincaré-Bendixson

Ejemplo 17 El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \sin x\end{aligned}$$

ilustra el caso 2 del teorema de Poincaré-Bendixson. Este sistema tiene puntos singulares en $(n\pi, 0)$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Los puntos de la forma $(2n\pi, 0)$ son puntos silla y los puntos de la forma $((2n+1)\pi, 0)$ son centros. Además este sistema no tiene ciclos límites, notemos que las órbitas periódicas definen un conjunto de órbitas conocidas como **ciclo separatrix** cuando $x \rightarrow 2\pi n$ y cuando $y \rightarrow \pm 1$.



Caso 2 del Teorema de Poincaré-Bendixson.

1.2.1 Criterio para la existencia de ciclos límite.

Definición 18 Sea γ una órbita periódica de (1.1). Si $\operatorname{div}(f_1, f_2) > 0$ en todos los puntos de γ entonces decimos que γ es **fuertemente estable**. Análogamente Si $\operatorname{div}(f_1, f_2) < 0$ en todos los puntos de γ entonces decimos que γ es **fuertemente inestable**.

Teorema 19 Consideremos el sistema autónomo (1.1) con A un dominio simplemente conexo. Sea $h(x, y)$ una función positiva definida en A . Entonces:

- a) Si $\operatorname{div}(hf_1, hf_2)$ no se anula en A , el sistema no tiene órbitas periódicas en A .
- b) Si $\operatorname{div}(hf_1, hf_2)$ es idénticamente cero en A , entonces no hay ciclos límites en A .
- c) Si A es una región anular y $\operatorname{div}(hf_1, hf_2)$ no se anula en A , el sistema tiene a lo más un ciclo límite en A .

Demostración. a) Supongamos que γ es una órbita periódica en A . Aplicando el Teorema de Green al campo vectorial $(P, Q) = (hf_1, hf_2)$ tenemos

$$\int_{\gamma} Pdy - Qdx = \int \int_D \operatorname{div}(P, Q) dx dy.$$

donde $\gamma = \partial D$. Pero el lado izquierdo de la expresión de arriba es cero pues el campo vectorial es tangente a γ mientras que el lado izquierdo es distinto de cero por hipótesis, luego no puede haber órbitas periódicas en A .

b) Supongamos que existe un ciclo límite C . Entonces las órbitas que pasan por puntos cercanos a C "espiralean" hacia él (alejándose de él o acercándose a él). Tomemos un segmento L transversal a C y un punto M en L y supongamos que la órbita que pasa por M se acerca a C cuando $t \rightarrow \infty$. Tomemos el arco de órbita \widetilde{MN} que empieza en M y termina en el punto N de L donde lo vuelve a cortar (esto sucede, pues la órbita se acerca a C en forma de espiral). Tomemos la curva cerrada δ formada por el arco de la órbita \widetilde{MN} y el segmento de \widetilde{NM} y L . Entonces la curva δ y C determinan una región anular R en cuyo interior se anula la divergencia del campo. Por otro lado, en la frontera de R el campo vectorial es tangente a ella salvo en el segmento \widetilde{MN} donde el campo apunta hacia el interior de R teniéndose así un flujo distinto de cero a través de la frontera de R . Aplicando el Teorema de Green en R tenemos

$$0 \neq \int_{\partial R} (Pdy - Qdx) \cdot ds = \int \int_R \operatorname{div}(P, Q) dx dy = 0,$$

lo que nos lleva a una contradicción. Luego no puede existir ciclo límite si $\operatorname{div}(P, Q) = 0$ en R .

c) Supongamos que existen dos ciclos límite C_1 y C_2 y uno de ellos está anidado en el otro. Consideremos la región anular B determinada por ellos. Se tiene entonces por el Teorema de Green que

$$0 = \int_{\partial B} (Pdy - Qdx) \cdot ds = \int \int_B \operatorname{div}(P, Q) dx dy$$

pero esto contradice el hecho de que $\operatorname{div}(P, Q)$ no se anula en A . Por lo tanto a lo más puede haber un ciclo límite. ■

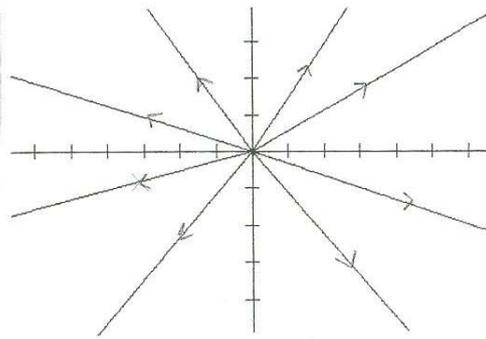
Corolario 20 Si (x_0, y_0) es un centro, entonces $\operatorname{div}(P, Q)(x_0, y_0) = 0$.

Corolario 21 Toda órbita periódica del sistema autónomo (1.1) intersecta a la curva $\operatorname{div}(P, Q) = 0$.

Ejemplo 22 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y\end{aligned}$$

este sistema ilustra el inciso a) del Teorema 19, ya que la divergencia del campo que se forma siempre es 2 en todo \mathbb{R}^2 y por lo tanto no tiene órbitas periódicas.

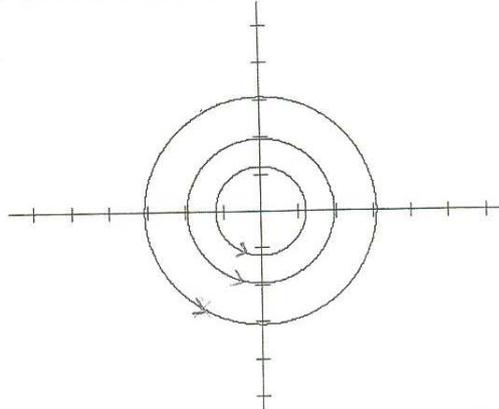


Sistema en que la divergencia no se anula.

Ejemplo 23 El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

ilustra el inciso b) del teorema anterior; ya que aunque la divergencia siempre es cero en todo \mathbb{R}^2 esta sistema está formado solo por órbitas periódicas, en particular por circunferencias. El único punto singular está sobre el origen y es un centro.

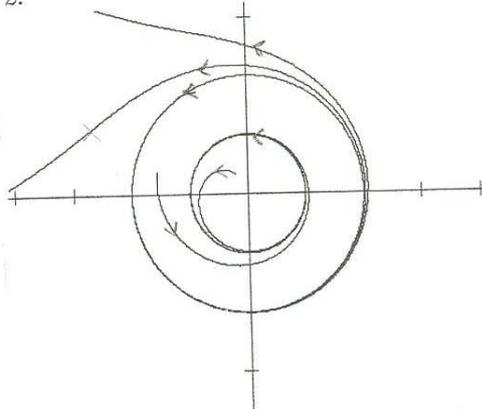


Sistema en que la divergencia siempre es cero.

Ejemplo 24 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y \\ \dot{y} &= \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \end{aligned}$$

La divergencia de éste sistema no se anula en la región anular determinada por la circunferencia con centro en el origen y radio 1 y la circunferencia con centro en el origen y radio 2.



La divergencia no es cero en una región anular.

Capítulo 2

Sistemas cuadráticos en el plano.

En este capítulo consideraremos sistemas autónomos en el plano de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 = P(x, y) \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 = Q(x, y)\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde P y Q son primos relativos, es decir no existe un polinomio de la forma $p(x, y) = c_0 + c_1x + c_2y$ que divida tanto a P como a Q . A estos sistemas se les denomina **sistemas cuadráticos**.

Además, antes de establecer criterios sobre los puntos singulares, órbitas periódicas y ciclos límite, daremos la siguiente definición:

Definición 25 Se dice que el punto (x_0, y_0) es un **punto de contacto** de la recta $L : ax + by + c$ si el vector $(P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$ es paralelo a L .

2.1 Puntos singulares de sistemas cuadráticos

Con la última definición enunciamos el siguiente teorema acerca de las propiedades de los puntos singulares y de contacto:

Teorema 26 Para sistemas de la forma (2.1) se cumple:

- A lo más existen cuatro puntos singulares
- Tres puntos singulares no pueden estar sobre una misma recta.
- Si la recta $L : ax + by + c = 0$ no es invariante, entonces hay a lo más dos puntos singulares o de contacto en L .
- Si L contiene dos puntos singulares o de contacto, la orientación del campo vectorial $X = (P, Q)$ sobre los segmentos infinitos aislados por los puntos singulares o de contacto es opuesta a la orientación de X en el segmento finito.
- Una recta que une 2 puntos singulares es isoclina.

Demostración. a) Se sigue del hecho de que dos cónicas se intersectan a lo más en cuatro puntos.

b) Consideremos una recta de la forma $y = mx + b$, entonces las componentes P y Q del campo sobre esa recta toman la forma de un polinomio de segundo grado en la variable x . Como los puntos singulares del campo sobre esta recta corresponden a raíces comunes de $P(x, mx + b) = 0$ y $Q(x, mx + b) = 0$, entonces si se tienen 2 puntos singulares $(x_1, mx_1 + b)$ y $(x_2, mx_2 + b)$ sobre la recta, esto implica que el polinomio $\lambda P(x, mx + b) = Q(x, mx + b)$ para un cierto valor λ real. Por lo tanto el valor de estos polinomios en cualquier otro punto distinto de x_1, x_2 tiene que ser distinto de cero, lo cual indica que no puede existir un tercer punto singular sobre esa recta.

c) Los puntos singulares o de contacto sobre L deben satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} aP(x, y) + bQ(x, y) &= 0 \\ ax + by + c &= 0 \end{aligned}$$

Si L no es invariante, al sustituir la segunda ecuación en la primera, nos da un polinomio de segundo grado en x o en y el cual no será idénticamente cero (porque L no es invariante), y entonces tendrá a lo más dos raíces reales que corresponderán a los puntos de contacto sobre dicha recta.

d) Si existen dos puntos singulares o de contacto $x_1 < x_2$ sobre la recta $y = mx + b$ entonces el polinomio $R(x, mx + b) := mP(x, mx + b) - Q(x, mx + b) = 0$ tiene dos raíces reales x_1, x_2 . Si los puntos son singulares entonces ambos serán raíces de P y Q separadamente. Como R es un polinomio de segundo grado entonces el signo que tome en el segmento abierto (x_1, x_2) será contrario al signo que tome en $(x_1, x_2)^c$. Supongamos que en (x_1, x_2) el polinomio $R > 0$. Pero $R = (P, Q) \cdot (m, -1)$, esto quiere decir que el ángulo que hace el campo con la normal a la recta será menor que $\frac{\pi}{2}$, mientras que en $(x_1, x_2)^c$ el ángulo con la normal deberá ser mayor que $\frac{\pi}{2}$, y por lo tanto la orientación del campo en los dos subconjuntos será de signo contrario.

e) Si existen 2 puntos singulares sobre una recta $y = mx + b$ entonces el polinomio $P(x, mx + b)$ y el polinomio $Q(x, mx + b)$ ambos se anularán en dos puntos distintos, por lo tanto $P(x, mx + b) = c \cdot Q(x, mx + b)$ para toda x y c una constante. Es decir $\frac{Q}{P}(x, mx + b) = c$ para toda x , lo cual prueba que el campo tiene la misma inclinación a lo largo de la recta. ■

Ahora que hemos obtenido algunas condiciones en lo que respecta al número de puntos singulares que puede tener un sistema cuadrático, el siguiente Corolario es un importante resultado que involucra el carácter de ciertos puntos singulares y la orientación de los mismos.

Corolario 27 *Si dos puntos singulares son focos o centros, entonces las órbitas alrededor de estos tienen orientación opuesta.*

Demostración. Sean A_1, A_2 dos puntos singulares (centros o focos), consideremos la recta L que los une. Supongamos que las órbitas alrededor de A_1

y A_2 tienen la misma orientación, entonces dichas órbitas intersestrarían al segmento que une a A_1 y A_2 en direcciones opuestas lo cual contradice el inciso d) del teorema 26. ■

Inmediatamente vemos que se cumple lo siguiente.

Corolario 28 *El número máximo de centros o focos en un sistema cuadrático es dos.*

Y finalizando con la parte de puntos singulares se tiene el siguiente teorema que involucra la posición y el carácter de los puntos singulares.

Teorema 29 *Supongamos que un sistema cuadrático tiene exactamente cuatro puntos singulares, y sea Γ el cuadrilátero que dichos puntos forman. Entonces:*

(a) *Si el cuadrilátero es convexo, entonces dos puntos singulares opuestos son puntos silla y el otro par de puntos singulares no son puntos silla (es decir, son nodos, focos o centros).*

(b) *Si el cuadrilátero no es convexo, entonces los tres vértices exteriores son puntos silla y el vértice interior no es punto silla o, viceversa, ningún vértice exterior es punto silla y el vértice interior es punto silla.*

En particular, un sistema cuadrático puede tener a lo más tres puntos silla y a lo más tres puntos que no son puntos silla.

Demostración. Haciendo un cambio de coordenadas, podemos suponer que los puntos singulares son $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (\alpha, \beta)$, donde $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 1$.

Tomando el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 \\ \dot{y} &= b_1x^2 + b_2y^2 + b_3xy + b_4x + b_5y + b_6\end{aligned}$$

lo podemos ver de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x\left(x + \frac{a_4}{a_1}\right) + a_2y\left(y + \frac{a_5}{a_2}\right) + a_3xy + a_6 \\ \dot{y} &= b_1x\left(x + \frac{b_4}{b_1}\right) + b_2y\left(y + \frac{b_5}{b_2}\right) + b_3xy + b_6\end{aligned}$$

Así, $O=(0,0) \implies a_6 = 0, b_6 = 0$

$A=(1,0) \implies 1 + \frac{a_4}{a_1} = 0, 1 + \frac{b_4}{b_1} = 0 \implies a_4 = -a_1, b_4 = -b_1$

$B=(0,1) \implies 1 + \frac{a_5}{a_2} = 0, 1 + \frac{b_5}{b_2} = 0 \implies a_5 = -a_2, b_5 = -b_2$

El sistema se nos transforma ahora en lo siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x(x-1) + a_2y(y-1) + a_3xy \\ \dot{y} &= b_1x(x-1) + b_2y(y-1) + b_3xy\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\text{Finalmente } C = (\alpha, \beta) \implies a_1\alpha^2 - a_1\alpha + a_2\beta^2 - a_2\beta + a_3\alpha\beta = 0 \implies a_3 = \frac{a_1\alpha - a_1\alpha^2 + a_2\beta - a_2\beta^2}{\alpha\beta} \implies a_3 = -\frac{\alpha-1}{\beta}a_1 - \frac{\beta-1}{\alpha}a_2$$

$$\text{y de la misma manera } b_3 = -\frac{\alpha-1}{\beta}b_1 - \frac{\beta-1}{\alpha}b_2$$

Tomando el Jacobiano del sistema (2.2) tenemos

$$J = \begin{bmatrix} 2a_1x - a_1 + a_3y & 2b_1x - b_1 + b_3y \\ 2a_2y - a_2 + a_3x & 2b_2y - b_2 + b_3x \end{bmatrix}$$

Valuando J en los puntos singulares tenemos

$$J_O = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -a_2 & -b_2 \end{bmatrix}$$

De aquí se tiene que $\det(J_O) = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$

Si $\det(J_O) < 0 \Rightarrow O$ es punto silla

y si $\det(J_O) > 0 \Rightarrow O$ es nodo, centro o foco.

$$J_A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -a_2 + a_3 & -b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(J_A) &= -a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 - b_1a_3 = -a_1b_2\left(-\frac{\alpha-1}{\beta}b_1 - \frac{\beta-1}{\alpha}b_2\right) + b_1a_2 - \\ & b_1\left(-\frac{\alpha-1}{\beta}a_1 - \frac{\beta-1}{\alpha}a_2\right) \\ &= \frac{-a_1b_2\alpha + a_1b_2\beta - a_1b_2 - a_2b_1\alpha - a_2b_1\beta + a_2b_1}{\alpha} = -\frac{(a_1b_2 - b_1a_2)(\alpha + \beta - 1)}{\alpha} = -\frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha} \det(J_O) \end{aligned}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} -a_1 + a_3 & -b_1 + b_3 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(J_B) = -a_1b_2 + a_3b_2 + b_1a_2 - b_3a_2 = -\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} \det(J_O)$$

$$J_C = \begin{bmatrix} 2a_1\alpha - a_1 + a_3\beta & 2b_1\alpha - \alpha - b_3\beta \\ 2a_2\beta - a_2 + a_3\alpha & 2b_2\beta - \beta + b_3\alpha \end{bmatrix}$$

$$\det(J_C) = (\alpha + \beta - 1) \det(J_O).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el punto (α, β) se encuentra en el primer cuadrante, es decir $\alpha > 0, \beta > 0$. Consideremos los dos casos que contempla el teorema:

Si el cuadrilátero OACB es convexo entonces $\alpha + \beta > 1$, y entonces

$\det(J_O), \det(J_C)$ tienen el mismo signo y $\det(J_A), \det(J_B)$ tienen el mismo signo y contrario a los primeros dos. Teniéndose así dos puntos sillas y dos puntos que no son silla.

Si el cuadrilátero OACB no es convexo, entonces $\alpha + \beta < 1$ y entonces

$\det(J_C)$ tiene signo opuesto a $\det(J_O), \det(J_A), \det(J_B)$. Es decir, C es silla y O, A, B no son silla o viceversa. ■

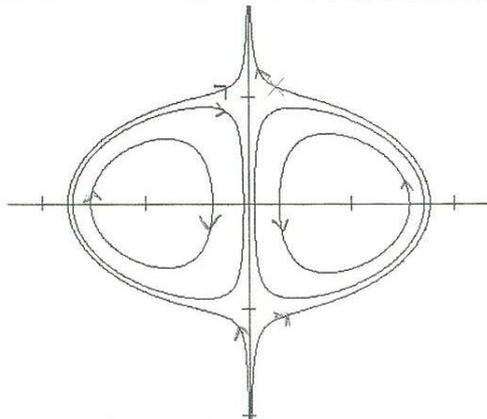
En particular, vemos que un sistema cuadrático puede tener a lo más 3 puntos silla y a lo más 3 puntos que no son silla.

Para ilustrar el resultado anterior mostramos algunos ejemplos de sistemas que tienen exactamente 4 puntos singulares

Ejemplo 30 *El sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2xy \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

tiene como puntos singulares $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$. De los cuales los dos primeros son centros y los dos últimos son puntos silla.

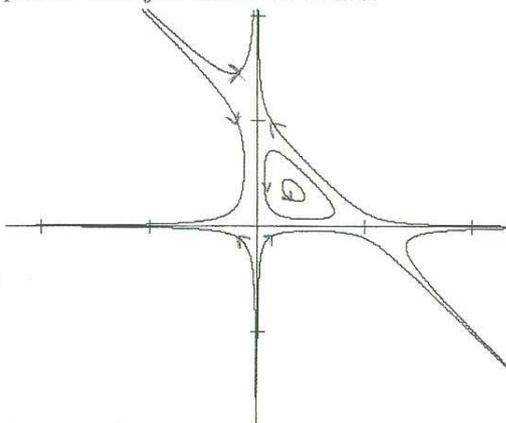


Sistema cuadrático con dos sillas y dos no sillas.

Ejemplo 31 *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} &= -y + y^2 + 2xy\end{aligned}$$

tiene como puntos singulares $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. De los cuales los tres primeros son puntos silla y el último es centro.

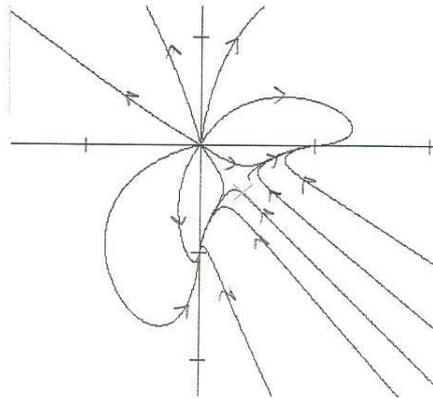


Sistema cuadrático con tres sillas y un no silla.

Ejemplo 32 *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^2 + 2xy \\ \dot{y} &= y - y^2 - 2xy\end{aligned}$$

tiene como puntos singulares $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ y $(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$. De los cuales los tres primeros son nodos y el último es punto silla.



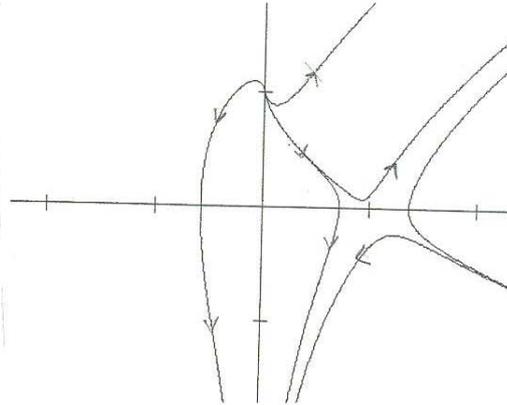
Sistema cuadrático con una silla y tres no sillas.

Sin embargo cuando un sistema cuadrático tiene exactamente dos puntos singulares, se puede dar cualquiera de los casos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 33 *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= x + y - 1\end{aligned}$$

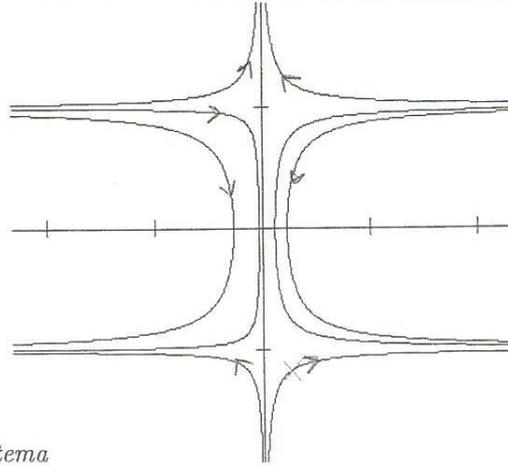
tiene como puntos singulares $(0,1)$ el cual es nodo y $(1,0)$ el cual es punto silla.



Ejemplo 34 *Los puntos singulares del sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2xy \\ \dot{y} &= y^2 - 1\end{aligned}$$

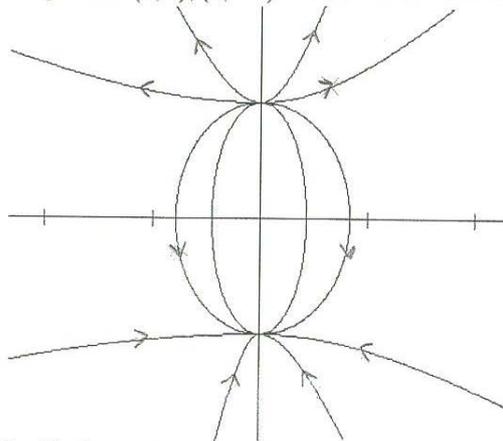
son $(0,1)$ y $(0,-1)$, ambos son puntos silla.



Ejemplo 35 El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= y^2 - 1\end{aligned}$$

tiene como puntos singulares $(0, 1), (0, -1)$ de los cuales ambos son nodos.



2.1.1 Criterio de Poincaré para la existencia de centros.

Definición 36 Si existe una función continua F tal que F es constante en todas las curvas solución del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2\end{aligned}$$

decimos que F es *integral primera* del sistema anterior.

Teorema 37 (Poincaré) El origen del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 \\ \dot{y} &= x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2\end{aligned} \tag{2.3}$$

es un centro si y solo si en una vecindad abierta del origen, (2.3) tiene una integral primera analítica que no es constante.

Demostración. Sea F una serie de potencias donde $F(0, 0) = 0$, es decir

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x, y)$$

donde F_k es un polinomio homogéneo de grado k sobre \mathbb{R} .

(Suficiencia)

Sea F integral primera analítica. Entonces podemos escribir la derivada de F a lo largo de las soluciones del sistema como $DF = D_1F + D_2F = 0$, donde $D_1F = (-y)\frac{\partial F}{\partial x} + x\frac{\partial F}{\partial y}$, y $D_2F = (a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + (b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2)\frac{\partial F}{\partial y}$

Susstituyendo $F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x, y)$ en esta última ecuación tenemos $DF = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial x}\right) \cdot (-y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial y}\right) \cdot (x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2) = 0$

Agrupando los términos del mismo orden observamos que $F_1 = 0$, y $F_2 = A(x^2 + y^2)$ y entonces F se puede tomar de la forma

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Por un resultado conocido de Cálculo Diferencial, existe un cambio de coordenadas $\phi(x', y') = (x, y)$ tal que $F \circ \phi(x', y') = x'^2 + y'^2$. Por lo tanto las curvas de nivel de $F \circ \phi$ son circunferencias con centro en $(0, 0)$ y consecuentemente las líneas de nivel de la función F también serán curvas cerradas y entonces el origen será un centro.

(Necesidad)

Supongamos que el origen es un centro, busquemos una serie de potencias que nos dé una integral primera analítica.

Usando la notación anterior debemos tener otra vez que $F_1 = 0$ y $F_2 = f_{20}(x^2 + y^2)$, donde f_{20} es arbitrario. Tomemos $f_{20} = \frac{1}{2}$ y procedamos por inducción.

Supongamos que hemos construido F_1, \dots, F_{q-1} .

Escribamos el término homogéneo de grado q correspondiente al desarrollo $DF = 0$, que en este caso se escribe

$$F_q = f_{q0}x^q + f_{q1}x^{q-1}y + \dots + f_{qq}y^q$$

De aquí se tiene $\frac{\partial F_q}{\partial x}(-y) + \frac{\partial F_q}{\partial y}x = -\frac{\partial F_{q-1}}{\partial x}P_2 - \frac{\partial F_{q-1}}{\partial y}Q_2 = H_q$.

Así tenemos que los f_{q_i} 's deben resolver una ecuación de la forma

$$y \frac{\partial F_q}{\partial x} - x \frac{\partial F_q}{\partial y} = H_q \quad (2.4)$$

Para probar la existencia de una solución F_q para (2.4), hagamos primero un cambio a coordenadas polares $x = \rho \cos \omega$ e $y = \rho \sin \omega$ de manera que F_q y H_q se convierten en polinomios homogéneos $\phi(\omega)$ y $\psi(\omega)$ en $\cos \omega$ y $\sin \omega$:

$$\begin{aligned} F_q(x, y) &= \rho^q \phi_q(\omega) \\ H_q(x, y) &= \rho^q \psi_q(\omega) \end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos la ecuación

$$y \frac{\partial (\rho^q \phi_q(\omega))}{\partial x} - x \frac{\partial (\rho^q \phi_q(\omega))}{\partial y} = \rho^q \psi_q(\omega)$$

Veamos la forma de la ecuación (2.4) y notemos que $\frac{\partial x}{\partial \omega} = -y$ y $\frac{\partial y}{\partial \omega} = x$. Entonces podemos reemplazar esto en (2.4) y obtener

$$-\frac{\partial (\rho^q \phi_q(\omega))}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega} - \frac{\partial (\rho^q \phi_q(\omega))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{\partial (\rho^q \phi_q(\omega))}{\partial \omega} = -\rho^q \psi_q(\omega)$$

Lo anterior nos lleva a que

$$\frac{d\phi_q}{d\omega} = \psi_q(\omega) \quad (2.5)$$

Podemos escribir $\phi_q(\omega)$ y $\psi_q(\omega)$ como series de Fourier

$$\begin{aligned} \phi_q(\omega) &= \sum_{k=0}^q (A_{qk} \cos k\omega + B_{qk} \sin k\omega) \\ \psi_q(\omega) &= \sum_{k=0}^q (C_{qk} \cos k\omega + D_{qk} \sin k\omega) \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial (2.5) tenemos

$$\sum_{k=0}^q (-kA_{qk} \sin k\omega + kB_{qk} \cos k\omega) = \sum_{k=0}^q (C_{qk} \cos k\omega + D_{qk} \sin k\omega)$$

Necesitamos ver si A_{qk} , B_{qk} se pueden encontrar de manera que la igualdad anterior se cumpla. Observando los coeficientes debemos tomar

$$\begin{aligned} B_{qk} &= -\frac{C_{qk}}{k} \text{ y } A_{qk} = \frac{D_{qk}}{k} \text{ si } k \neq 0 \\ C_{q0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si $k \neq 0$ tenemos soluciones únicas para B_{qk} y A_{qk} . Veamos ahora que habiendo determinado H_q el coeficiente C_{q0} resulta ser siempre cero. Veamos esto: Si q es impar, entonces $C_{q0} = 0$ dado que C_0 es el primer coeficiente en la expansión de Fourier $\psi_q(\omega)$ la cual es polinomio homogéneo de grado impar en $\sin \omega$ y $\cos \omega$. Así para q impar la ecuación (2.5) se puede resolver únicamente

para f_{q_i} . Ahora si q es par y si $C_0 \neq 0$, entonces utilizando A_{qk}, B_{qk} como en el primer renglón de (2.6) tenemos

$$\sum_{i+k=q+1} D_k(F_i) = C_{q0}(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}$$

De esta manera si tomamos $F = F_2 + \dots + F_q$, entonces F es una función positiva en una vecindad de $(0, 0)$ y además

$$\frac{dF(x(t), y(t))}{dt} = C_{q0}(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{q}{2}}$$

Esto quiere decir que la función F es monótona a lo largo de las trayectorias, lo cual no es posible si el origen es un centro y entonces debemos tener que $C_{q0} = 0$ para q par. Para concluir la demostración del teorema debemos probar que la serie arriba construida es convergente. Esta parte de la demostración se puede consultar en [9]. ■

Ahora escribamos el sistema (2.3) de la forma \dot{y}/\dot{x} para obtener una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + ax^2 + (2b + \alpha)xy + cy^2}{y + bx^2 + (2c + \beta)xy + dy^2} \quad (2.7)$$

y plantear el siguiente teorema

Teorema 38 *El sistema (2.3) tiene centro en el origen si y solo si la ecuación (2.7) cumple con alguna de las condiciones siguientes*

- a) $a + c = b + d = 0$
- b) $\alpha(a + c) = \beta(b + d), a\alpha^3 - (3b + \alpha)\alpha^2\beta + (3c + \beta)\alpha\beta^2 - d\beta^3 = 0$
- c) $\alpha + 5(b + d) = \beta + 5(a + c) = ac + bd + 2(a^2 + d^2) = 0$

Ver demostración en [8].

2.2 Órbitas periódicas y ciclos límite.

Veamos ahora la disposición y estructura de las órbitas periódicas y los ciclos límite. Empezaremos enunciando el siguiente teorema:

Teorema 39 *Un sistema cuadrático en el plano, tiene las siguientes propiedades:*

a) *Dos órbitas periódicas tienen orientación opuesta si no tienen puntos en común en su interior. En particular, no puede haber más de dos órbitas periódicas que no tengan puntos en común en su interior.*

b) *El interior de una órbita periódica es una región convexa.*

Demostración. a) Sean γ_1, γ_2 órbitas periódicas. Sea (x_k, y_k) el punto singular dentro de la órbita γ_k ($k=1,2$).

Al igual que en el Corolario 27, supongamos que γ_1 y γ_2 tienen la misma orientación. Entonces γ_1 y γ_2 intersectan al segmento que une a (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en sentidos opuestas. Esto contradice el inciso (d) del teorema 26.

b) Supongamos que la región no es convexa. Entonces existen (x_i, y_i) y (x_j, y_j) tales que el segmento que los une intersecta a la órbita en cuatro puntos, esos cuatro puntos determinan tres segmentos continuos tales que en cada par de segmentos consecutivos la orientación del campo es opuesta y entonces en cada uno de los segmentos tendríamos un punto de contacto, lo cual no es posible en vista del inciso c) del teorema 26. Por lo tanto, el interior de una órbita periódica debe ser una región convexa. ■

El teorema anterior no se cumple en general, un claro ejemplo es la ecuación de Van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - r(x^2 - 1)y\end{aligned}$$

Para comprobar esto escribamos el sistema anterior de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dx} = -r(x^2 - 1) - \frac{x}{y}$$

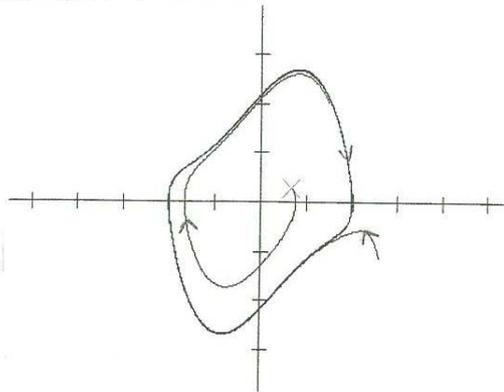
y derivando otra vez obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2rx - \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

Si consideramos los puntos $(-1, y)$ donde $y > 0$ se tiene que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} > 0$ y que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2r - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}\right)$$

De esta manera, cuando r es suficientemente grande (tal que $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$) y el ciclo límite define una región no convexa.



Sistema con un ciclo límite que no es convexo.

Hemos observado ya que una órbita periódica contiene sólo un punto singular. La siguiente pregunta es ¿puede ser cualquier tipo de punto singular? Con

el siguiente teorema probaremos que una órbita periódica no puede rodear a un nodo o a un punto silla, es decir los valores propios del punto singular no pueden ser ambos reales.

Teorema 40 *Supongamos que p es un punto singular de un sistema cuadrático y que los valores propios de la linealización del sistema son reales (es decir, p es un nodo o un punto silla). Entonces se tienen las siguientes posibilidades:*

- (a) *Existe una recta invariante que pasa por p ; o bien*
- (b) *Existe una recta L que pasa por p tal que L no contiene otro punto de contacto o singular y la orientación del campo vectorial en L no cambia de signo en p .*

Demostración. Haciendo una traslación, tomemos $p = (0, 0)$.

Sea $L := kx + y = 0$ y consideremos la orientación del campo (\dot{x}, \dot{y}) a lo largo de L , es decir, el signo de la expresión $k\dot{x} + \dot{y} = (ka_3 + b_3)x^2 + (ka_5 + b_5)y^2 + (ka_4 + b_4)xy + (ka_1 + b_1)x + (ka_2 + b_2)y$. Los coeficientes a_0 y b_0 no aparecen porque L pasa por el origen.

Como $y = -kx$, entonces

$$\begin{aligned} k\dot{x} + \dot{y} &= (ka_3 + b_3)x^2 + (ka_5 + b_5)(-kx)^2 + (ka_4 + b_4)x(-kx) + (ka_1 + b_1)x + \\ &+ (ka_2 + b_2)(-kx) \\ &= [-k^2a_2 + k(a_1 - b_2) + b_1]x + [b_3 + k(a_3 - b_4) - k^2(a_4 - b_5) + k^3a_5]x^2 \end{aligned}$$

Sea $f(k) = -k^2a_2 + k(a_1 - b_2) + b_1$

y $g(k) = b_3 + k(a_3 - b_4) + k^2(a_4 - b_5) + k^3a_5$

Por hipótesis, los valores propios en $(0, 0)$ son reales distintos de cero, entonces

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 \geq 0$$

Así, f tiene una raíz real k_1 .

Tenemos ahora los siguientes casos:

(1) $g(k_1) = 0$, entonces

$$k_1\dot{x} + \dot{y} \equiv 0$$

y así L es una recta invariante que pasa por $(0, 0)$

(2) $g(k_1) \neq 0$

$$k_1\dot{x} + \dot{y} = g(k_1)x^2$$

y entonces $k_1\dot{x} + \dot{y}$ no cambia de signo en $(0, 0)$. ■

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 41 *Una órbita periódica rodea un centro o a un foco.*

Demostración. Supongamos que tenemos una órbita periódica γ teniendo a un punto singular p dentro de γ . Si en p los valores propios de la linealización del sistema fueran reales distintos de cero esto obligaría a la existencia de una recta invariante L que pasa por p y sobre la cual el campo no cambia de dirección. Esto es imposible pues en los puntos de intersección de γ con L el campo es transversal a γ y por lo tanto L no puede ser invariante.

Por otro lado en esos puntos de intersección de la recta con la órbita periódica siempre el campo cambia de orientación pues este debe permanecer tangente a la curva.

Por lo tanto ambos casos no son posibles y entonces no puede existir un punto interior con raíces reales.

Finalmente concluimos que las raíces deben ser complejas; es decir, p es un centro o un foco. ■

Para finalizar esta sección y recordando la definición de órbita periódica fuertemente estable como aquella sobre la que $\text{div}(P, Q) < 0$ y fuertemente inestable como aquella sobre la que $\text{div}(P, Q) > 0$, terminamos con la siguiente proposición.

Proposición 42 *Una órbita periódica de un sistema cuadrático no puede ser fuertemente estable o fuertemente inestable.*

Demostración. Como toda órbita periódica de un sistema cuadrático debe intersectar en dos puntos distintos a la recta $\text{div}(P, Q) = 0$, entonces no es posible que la divergencia mantenga un signo constante sobre los puntos de toda la órbita. ■

Veamos ahora algunos resultados acerca de ciclos límites.

2.3 Criterio para la no existencia de ciclos límites.

Consideremos el sistema cuadrático general:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \\ \dot{y} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2\end{aligned}$$

Supongamos que tiene al menos un punto singular. Haciendo una traslación podemos suponer que está en el origen. Entonces tendríamos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) = a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \\ \dot{y} &= Q(x, y) = b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2\end{aligned}$$

Calculemos la divergencia del campo (P, Q)

$$\text{div}(P, Q) = (a_1 + b_2) + (2a_3 + b_4)x + (a_4 + 2b_5)y$$

Consideremos los puntos (x, y) en los que $\text{div}(P, Q) = 0$. Entonces se tiene que

$$y = -\frac{a_1 + b_2}{a_4 + 2b_5} - \frac{2a_3 + b_4}{a_4 + 2b_5}x$$

Tomemos el ángulo θ que forma la normal a la recta con el campo vectorial en cada punto en que $\text{div}(P, Q) = 0$, obteniendo

$$\cos \theta = \frac{(2a_3 + b_4) * P(x, -\frac{a_1+b_2}{a_4+2b_5} - \frac{2a_3+b_4}{a_4+2b_5}x) + (a_4 + 2b_5) * Q(x, -\frac{a_1+b_2}{a_4+2b_5} - \frac{2a_3+b_4}{a_4+2b_5}x)}{\sqrt[2]{(2a_3 + b_4)^2 + (a_4 + 2b_5)^2} \sqrt[2]{P^2(x, -\frac{a_1+b_2}{a_4+2b_5} - \frac{2a_3+b_4}{a_4+2b_5}x) + Q^2(x, -\frac{a_1+b_2}{a_4+2b_5} - \frac{2a_3+b_4}{a_4+2b_5}x)}}$$

Entonces el ángulo θ que forma el campo con la normal a la recta será siempre menor o igual que $\frac{\pi}{2}$ si el polinomio cuadrático $p(x) = (2a_3 + b_4) * P(x, -\frac{a_1+b_2}{a_4+2b_5} - \frac{2a_3+b_4}{a_4+2b_5}x) + (a_4 + 2b_5) * Q(x, -\frac{a_1+b_2}{a_4+2b_5} - \frac{2a_3+b_4}{a_4+2b_5}x)$ tiene un mismo signo para toda x , es decir, si no tiene raíces reales distintas. Esto último se tiene en el caso de que el discriminante de $p(x)$ sea menor o igual que cero ($\text{disc}(p(x)) \leq 0$). Lo anterior nos lleva a concluir que el campo atraviesa a la recta $\text{div}(P, Q) = 0$ de lado a lado en cada punto y por lo tanto no puede ser intersectada por una órbita periódica pues obligaría a que existieran puntos de orientación contraria lo cual no permitimos en cuanto $\text{disc}(p(x)) \leq 0$.

A partir de lo anterior y del hecho de que toda órbita periódica debe intersectar en dos puntos a la recta $\text{div}(P, Q) = (a_1 + b_2) + (2a_3 + b_4)x + (a_4 + 2b_5)y = 0$ se tiene el siguiente teorema.

Teorema 43 *Dado un sistema cuadrático, consideremos la recta $\text{div}(P(x, y), Q(x, y)) = 0$. El sistema no tiene ciclos límite si el polinomio de grado 2*

$$p(x) = (2a_3 + b_4) * P(x, -\frac{a_1 + b_2}{a_4 + 2b_5} - \frac{2a_3 + b_4}{a_4 + 2b_5}x) + (a_4 + 2b_5) * Q(x, -\frac{a_1 + b_2}{a_4 + 2b_5} - \frac{2a_3 + b_4}{a_4 + 2b_5}x)$$

no tiene raíces reales o equivalentemente su discriminante es menor que cero.

Veamos la forma que toma el discriminante es

$$\begin{aligned} \text{disc}(p(x)) &= (-a_1 a_4^2 b_4 - 4a_2 a_3^2 a_4 - 2a_2 b_4^2 b_5 + 6a_4^2 b_1 b_5 - 8a_2 a_3^2 b_5 + 8a_3^2 a_5 b_1 + 8a_1 a_3^2 a_5 + 12a_4 b_1 b_5^2 \\ &\quad - a_2 a_4 b_4^2 + 4a_1 b_4 b_5^2 - 4a_3 a_4^2 b_2 - 3a_4^2 b_2 b_4 + 16a_1 a_3 b_5^2 + 2a_1 a_5 b_4^2 + 2a_5 b_2 b_4^2 - 4b_2 b_4 b_5^2 + 8a_1 a_3 a_4 b_5 \\ &\quad + 8a_1 a_3 a_5 b_4 + 8a_3 a_5 b_2 b_4 - 8a_3 a_4 b_2 b_5 - 4a_2 a_3 a_4 b_4 - 8a_2 a_3 b_4 b_5 - 8a_4 b_2 b_4 b_5 + a_4^3 b_1 \\ &\quad + 8b_1 b_5) (a_1 a_4^2 b_4 - 48a_3^2 a_5 b_4 - 4a_2 a_3^2 a_4 - 2a_2 b_4^2 b_5 + 6a_4^2 b_1 b_5 - 24a_3 a_5 b_4^2 - 16a_3 b_4 b_5 + 20a_3 a_4^2 b_4 \\ &\quad + 20a_4 b_4 b_5 - 8a_2 a_3 b_5^2 + 8a_3^2 a_5 b_2 + 8a_1 a_3^2 a_5 + 12a_4 b_1 b_5^2 - a_2 a_4 b_4^2 + 4a_1 b_4 b_5^2 - 4a_3 a_4 b_2 \\ &\quad - 24a_3^2 b_3 b_5 - 3a_4^2 b_2 b_4 + 16a_1 a_3 b_5^2 - 16a_3^2 a_4 b_5 + 2a_1 a_5 b_4^2 - 48a_4 b_3 b_5^2 + 2a_5 b_2 b_4^2 \\ &\quad - 4b_2 b_4 b_5^2 + 8a_1 a_3 a_4 b_5 + 8a_1 a_3 a_5 b_4 + 8a_3 a_5 b_2 b_4 - 8a_3 a_4 b_2 b_5 - 4a_2 a_3 a_4 b_4 - 8a_2 a_3 b_4 b_5 - 8a_4 b_2 b_4 b_5 \\ &\quad + 32a_3 a_4 b_4 b_5 + a_4^3 b_1 + 8b_1 b_5^3 + 8a_3^2 a_4^2 - 64a_3^2 b_5^2 - 32a_3^2 a_5 + 8a_4^2 b_4^2 - 4a_5 b_4^3 - 4a_4^3 b_3 \\ &\quad + 8b_4^2 b_5^2 - 32b_3 b_5^3) \left(\frac{1}{(a_4 + b_5)^4} \right) \end{aligned}$$

Corolario 44 *El sistema cuadrático homogéneo*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \\ \dot{y} &= b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

no tiene órbitas periódicas.

Demostración. Notemos que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, esto que el discriminante de $p(x)$ asociado a (2.9) sea cero. ■

Un problema que permanece aun abierto es encontrar una cota superior para la existencia de ciclos límite. Sin embargo tenemos el Teorema de Dulac que establece que un sistema polinomial tiene a lo más un número finito de ciclos límite, pero no se ha encontrado una cota ni siquiera para el caso cuadrático. Los matemáticos Petrovskii y Landis decían haber encontrado solución, y ésta era que a lo más existían tres ciclos límite, sin embargo el matemático chino Shi Songling encontró que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2 \\ \dot{y} &= x + x^2 + (8\varepsilon - 25 - 9\delta)xy\end{aligned}$$

donde

$$\delta = -10^{-13}, \quad \varepsilon = -10^{-52} \quad \text{y} \quad \lambda = -10^{-200}$$

tiene al menos cuatro ciclos límite. Consultar [10] para ver el desarrollo con detalle.

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1 Sistemas Hamiltonianos

Definición 45 Sea A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y sea $H(x, y)$ una función continua. Un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\tag{3.1}$$

es llamado **Sistema Hamiltoniano**. A la función H se le llama **Función Hamiltoniana**.

Denotaremos por $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)$ al **Campo Hamiltoniano** asociado a la función H .

En el caso cuadrático, la Función Hamiltoniana H debe ser un polinomio de grado 3, es decir, de la forma $H(x, y) = \frac{1}{3}a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + \frac{1}{3}a_4y^3 + \frac{1}{2}b_1x^2 + b_2xy + \frac{1}{2}b_3y^2 + c_1x + c_2y + d$, por lo tanto, un sistema Hamiltoniano cuadrático es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_2x^2 + 2a_3xy + a_4y^2 + b_2x + b_3y + c_1 \\ \dot{y} &= -a_1x^2 - 2a_2xy - a_3y^2 - b_1x - b_2y - c_2\end{aligned}\tag{3.2}$$

Veamos ahora algunas propiedades de estos sistemas:

Teorema 46 a) La función Hamiltoniana $H(x, y)$ del sistema Hamiltoniano (3.1) permanece constante a lo largo de toda solución $C : (x(y), y(t))$ de (3.1). Es decir H es una integral primera (**Conservación de la energía**).

b) Recíprocamente si S es un campo vectorial en el plano y posee una integral primera G , entonces S es de la forma $S = f \cdot X_G$ para alguna función real f .

c) La divergencia de todo sistema Hamiltoniano es cero y, recíprocamente, si la divergencia de un campo S es cero, entonces existen f y G tal que $S = f \cdot X_G$.

Demostración. a) Consideremos la derivada total de la función Hamiltoniana $H(x, y)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

De esta manera, $H(x, y)$ es constante a lo largo de cualquier curva solución de (3.1) y las órbitas de (3.1) están sobre $H(x, y) = \text{constante}$.

b) Supongamos que S es un sistema autónomo y G es una integral primera, consideremos entonces el sistema Hamiltoniano X_G . Entonces como ambos son perpendiculares al gradiente de G , tendremos que existe una función f tal que $S = f \cdot X_G$.

c) Sea $S = (P, Q)$ un campo con divergencia cero, y consideremos el campo $\bar{S} = (-Q, P)$, este campo es un campo gradiente correspondiente a la función $h(x, y) = \int_{\gamma} \bar{S} \cdot d\gamma$ donde γ es cualquier curva que va de $(0, 0)$ a (x, y) . Esta función está bien definida ya que $\text{div } S = 0$. ■

Remark 47 *Un sistema Hamiltoniano no puede tener ciclos límite. Este hecho se sigue del inciso b) del Teorema 19.*

Teorema 48 a) *Un punto singular no degenerado de un sistema Hamiltoniano cuadrático es punto silla o un centro;*

b) (x_0, y_0) es un punto silla de (3.2) si y solo si $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial H}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$;

c) *Un máximo o mínimo local estricto de la función $H(x, y)$ es un centro de (3.2).*

Demostración. a) Sin pérdida de generalidad supongamos que el punto singular es $(0, 0)$ y $H(0, 0) = 0$. De esta manera $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0$ y el nuevo sistema se ve de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_2 x^2 + 2a_3 xy + a_4 y^2 + b_2 x + b_3 y \\ \dot{y} &= -(a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2 + b_1 x + b_2 y) \end{aligned}$$

Así la linealización de (3.2) en el origen es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ -b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Obtenemos los valores propios de la linealización que son $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{b_2^2 - b_1 b_3} = \pm \sqrt{\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial H}{\partial y^2}(0, 0)}$. Se tiene entonces que $\lambda_{1,2}$ son reales de signo opuesto o imaginarios puros. Por lo tanto el sistema hamiltoniano cuadrático solo podrá tener en el origen un centro, un foco o un punto silla. Por otro lado, como la divergencia del campo es cero entonces el campo no puede tener puntos singulares que sean focos o nodos. Resumiendo, tenemos entonces que un sistema Hamiltoniano en el plano solo puede tener puntos singulares que sean silla o centro.

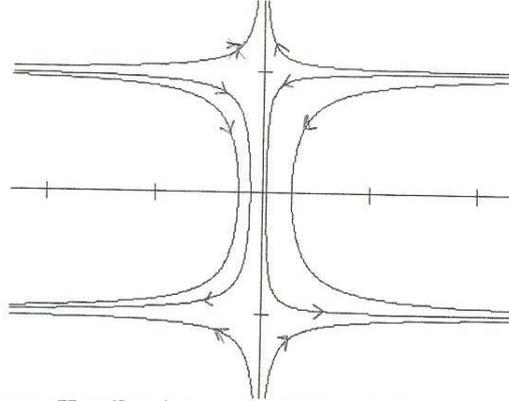
Finalmente, si el punto singular es un centro tendremos que $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial H}{\partial y^2}(0, 0) < 0$ y entonces el punto corresponderá a un máximo o mínimo

local de la función H . Por lo tanto si $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,0) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(0,0) > 0$ entonces $(0,0)$ es punto silla. ■

Ejemplo 49 *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2xy \\ \dot{y} &= y^2 - 1\end{aligned}$$

tiene como función Hamiltoniana a $H(x,y) = -xy^2 + x$. Los puntos singulares son $(0,1)$ y $(0,-1)$ y ambos son puntos silla.

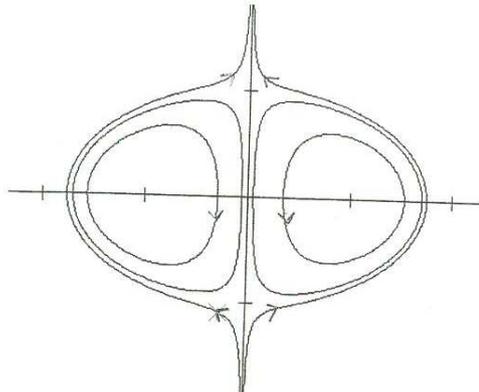


Sistema Hamiltoniano cuadrático con dos sillas.

Ejemplo 50 *Consideremos la función $H(x,y) = -xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + x$. De este obtenemos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2xy \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - 1\end{aligned}$$

que tiene puntos singulares en $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$. Los dos primeros son puntos silla y los otros dos son centros.



Sistema cuadrático con dos sillas y dos centros.

3.2 Sistemas Gradientes

Definición 51 Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $V \in C^2(E)$. Un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y)\end{aligned}\tag{3.4}$$

es llamado **sistema gradiente en E** . A la función V se le llama **función de potencial**.

En el caso cuadrático, consideremos un polinomio cúbico $V(x, y) = \frac{1}{3}a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + \frac{1}{3}a_4y^3 + \frac{1}{2}b_1x^2 + b_2xy + \frac{1}{2}b_3y^2 + c_1x + c_2y + d$, entonces los sistemas gradientes se ven de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + b_1x + b_2y + c_1 \\ \dot{y} &= a_2x^2 + 2a_3xy + a_4y^2 + b_2x + b_3y + c_2\end{aligned}$$

Teorema 52 *Un sistema gradiente no puede tener órbitas periódicas*

Demostración. Consideremos el sistema (3.4) y supongamos que existe una órbita periódica $\gamma(t) : (x(t), y(t))$. Como el valor en cada punto del campo es distinto de cero, entonces se tiene que $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t))\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))\right)^2 > 0$; es decir V es estrictamente creciente a lo largo de γ , lo cual no es posible pues γ es periódica. ■

Así, se tiene que los conjuntos límites de un sistema gradiente son puntos singulares.

Notemos que los puntos de equilibrio o puntos singulares del sistema gradiente (3.4) corresponden a los puntos singulares de la función $V(x, y)$ donde $\text{grad}V(x, y) = 0$. Los puntos donde $\text{grad}V(x, y) \neq 0$ son los puntos regulares de $V(x, y)$. En los puntos regulares de $V(x, y)$, el vector $\text{grad}V(x, y)$ es perpendicular a la superficie de nivel $V(x, y) = \text{constante}$ a través del punto.

Teorema 53 *En los puntos regulares de la función $V(x, y)$, las órbitas del sistema gradiente (3.4) cruzan las superficies de nivel $V(x, y) = \text{constante}$ ortogonalmente. Y los máximos locales estrictos de la función $V(x, y)$ son puntos de equilibrio del sistema (3.4) asintóticamente estables.*

Demostración. Dado que la linealización de (3.4) en un punto singular (x_0, y_0) de (3.4) tiene por matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

la cual es simétrica, y consecuentemente los valores propios de A son todos reales pudiéndose diagonalizar con respecto a una base ortonormal. Si el punto es singular y corresponde a un máximo local estricto de la función, los valores propios serán ambos menores que cero y el punto de equilibrio será asintóticamente estable. ■

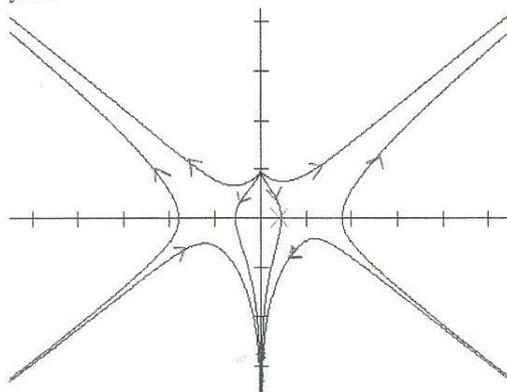
Resumiendo tenemos el siguiente Teorema

Teorema 54 *Un punto singular no degenerado de un sistema gradiente analítico (3.4) en \mathbb{R}^2 es un nodo o punto silla; aun más, si (x_0, y_0) es un punto silla de la función $V(x, y)$, este es un punto silla de (3.4) y si (x_0, y_0) es un máximo o mínimo local estricto de la función $V(x, y)$, es un nodo estable o inestable de (3.4) respectivamente.*

Ejemplo 55 *De la función $V(x, y) = x^2y - y + \frac{1}{2}y^2$, obtenemos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2xy \\ \dot{y} &= x^2 + y - 1\end{aligned}$$

cuyos puntos singulares son $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$; los dos primeros son puntos silla y el último es foco.



Ejemplo de sistema gradiente cuadrático.

3.3 Sistemas de tipo Lotka-Volterra

El sistema cuadrático

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 + a_1x + a_2y) = P(x, y) \\ \dot{y} &= y(b_0 + b_1x + b_2y) = Q(x, y)\end{aligned}$$

se dice que es de tipo **Lotka Volterra**. En particular, este sistema cuadrático incluye al sistema de Lotka-Volterra que describe la dinámica de un sistema

predador-presa.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(A - By) \\ \dot{y} &= y(Cx - D)\end{aligned}$$

Bautin probó un resultado importante acerca de estos sistemas

Teorema 56 (Bautin) *El sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_0 + a_1x + a_2y) \\ \dot{y} &= y(b_0 + b_1x + b_2y)\end{aligned}$$

no tiene ciclos límite

Demostración. Supongamos que existe una órbita periódica γ , entonces ésta no intersecta a los ejes ya que estos últimos está formados por órbitas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que γ está en el primer cuadrante. Como existe un punto singular en el interior de γ , entonces el sistema

$$\begin{aligned}a_0 + a_1x + a_2y &= 0 \\ b_0 + b_1x + b_2y &= 0\end{aligned}$$

tiene solución.

Sea $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Definamos

$$B(x, y) = x^{k-1}y^{h-1}$$

donde $k = \frac{b_2(b_1 - a_1)}{D}$ y $h = \frac{a_1(a_2 - b_2)}{D}$.

Se cumple entonces que $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = \frac{gB(x, y)}{D}$

donde $g = a_1b_0(a_2 - b_2) + a_0b_2(b_1 - a_1)$

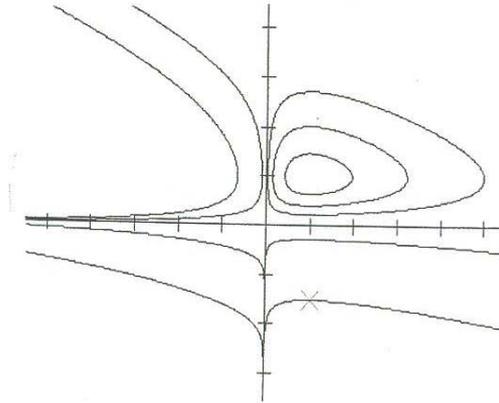
Ahora bien $0 = \int_{\gamma} B(\dot{y}x - \dot{x}y)dt = \int_{\gamma} (BQdx - BPdy) \underset{T. Green}{=} \int_{\Gamma} \frac{-gB(x, y)}{D}$

donde Γ es el interior de γ . Dado que $B > 0$ tenemos una contradicción, a no ser que $g = 0$. Pero si $g = 0$ el sistema la integral primera $x^k y^h (a_1 b_0 x + a_0 b_2 y + a_0 b_0) = \text{constante}$. Por lo tanto no puede haber ciclos límite. ■

Ejemplo 57 *El clásico modelo presa-depredador de Lotka-Volterra*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - y) \\ \dot{y} &= \frac{3}{10}y(x - 1)\end{aligned}$$

tiene puntos singulares en (0,0) y (1,1) de los cuales el primero es punto silla y el segundo es centro.



Modelo presa-depredador de Lotka-Volterra.

Conclusiones

Los sistemas cuadráticos muestran características propias en lo relativo al número y tipo de puntos singulares, así como respecto a la disposición, número y estabilidad de las órbitas periódicas y los ciclos límite; estas características las podemos resumir en

a) Puntos singulares. A lo más existen cuatro puntos singulares y tres de ellos no pueden estar sobre una misma recta. Se tiene también que no puede haber más de tres puntos silla y que no puede haber más de tres puntos que no sean puntos silla. Además se tiene el resultado que nos asegura que en una recta que une a dos puntos singulares, la dirección del campo en los segmentos infinitos definidos por dichos puntos, es opuesta a la dirección del campo en el segmento finito. Utilizando esto último se comprueba que si se tienen dos centros o focos entonces estos tienen orientación opuesta y por lo mismo a lo más puede haber dos centros o focos. Finalmente se dan criterios que determinan si un sistema cuadrático tiene centro.

b) Órbitas periódicas y ciclos límite. Una órbita periódica no puede ser fuertemente estable o fuertemente inestable. También se tiene el hecho de que dos órbitas periódicas que no tienen puntos en común tienen orientación opuesta; de esta manera, a lo más puede haber dos órbitas periódicas que no tengan puntos en común en su interior. Otro resultado importante es que una órbita periódica define una región convexa y dentro de ella existe uno y sólo un punto singular, el cual debe ser centro o foco. Respecto a ciclos límite, se tienen criterios que determinan la existencia de ellos. Un problema que permanece sin resolver es encontrar una cota para el número máximo, lo único que se puede asegurar es que existe a lo más un número finito de ellos.

Todas estas características descansan fuertemente en las características algebraicas del campo.

Los métodos utilizados se pueden adecuar a sistemas polinomiales pudiéndose dar resultados similares para los sistemas polinomiales de orden mayor.

La aproximación cuadrática alrededor del punto singular muestra una configuración evidentemente más rica que la de la aproximación lineal. Un problema importante sería determinar qué características del retrato fase alrededor de una órbita periódica o de un punto singular permanecen cuando se incluyen perturbaciones de orden superior. Vimos ya mediante un ejemplo que en el caso cúbico las órbitas periódicas no necesariamente deben ser convexas.

La teoría de los sistemas cuadráticos muestra ya dificultades importantes

en lo que respecta al conocimiento relacionado con el número de ciclos límite, lo que hace que la conjetura de Dulac del número de ciclos límite de sistemas polinomiales no haya sido aun resuelta.

Bibliografía

1. Lectures on Ordinary Differential Equations, Seventh printing. Witold Hurewicz. The M.I.T. press, Massachusetts Institute of Technology. 1975.
2. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas, Segunda Edición. George F. Simmons. McGraw-Hill. 1993.
3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Carlos Imaz, Zoenek Vorel. Editorial Limusa. 1975.
4. On General Properties of Quadratic Systems. American Mathematical Monthly. Carmen Chicone, Tiang Jinghuang. 1982.
5. A Survey of Quadratic Systems. W.A. Coppel. Department of Mathematics, Institute of Advanced Studies, Canberra, Australia. 1965.
6. Differential Equations and Dynamical Systems, Second Edition. Lawrence Perko. Texts in Applied Mathematics. Editorial Springer. 1998.
7. Linear Hamiltonian Systems and Symplectic Geometry. Rubén Flores Espinoza, Iouri Mikhailovich Vorobjev. Universidad de Sonora. 1997.
8. Algebraic and Geometric Aspects of the Theory of Polynomial Vector Fields, pag. 7-10. Dana Schlomiuk. Département de Mathématiques et Statistique, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada. 1993.
9. Sur la Théorie des Centres. J. Chazy. C. Royal Académie de Sciences de Paris. 1947.
10. A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems. Shi Songling. 1980.