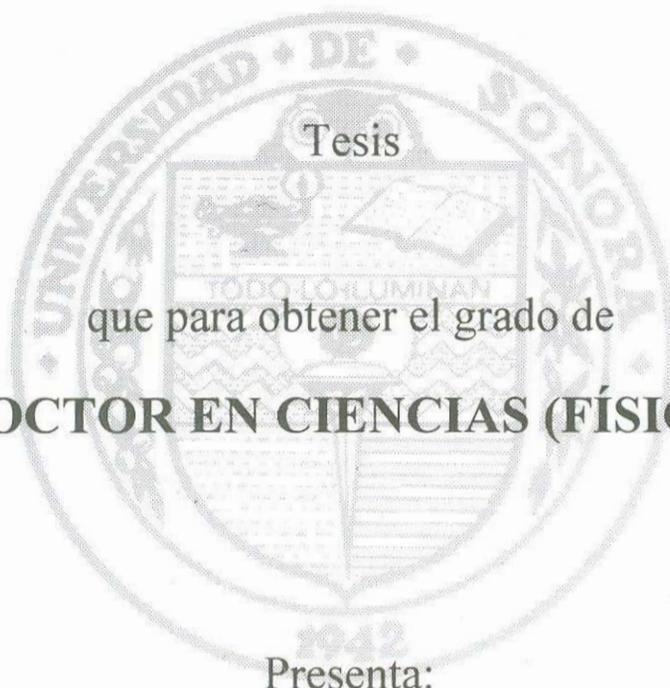


UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA

Ondas Elásticas en Medios Periódicos



Tesis

que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

Presenta:

María Betsabé Manzanares Martínez

Hermosillo, Sonora, Enero de 2004

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACION EN FISICA

"EL SABER DE MIS HIJOS
HARÁ MI GRANDEZA"

En la Ciudad de Hermosillo, Sonora, México, siendo las 17:00 horas del día dieciséis del mes de enero del año dos mil cuatro, se reunieron en el Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, los señores: Doctor Felipe Ramos Mendieta, Doctor Jorge Alberto Gaspar Armenta, Doctor Marcelino Barboza Flores, y como Sinodales Invitados por el Departamento, Doctor José Sánchez-Dehesa y Doctor Raúl Patricio Esquivel Sirvent, a fin de efectuar el examen oral de la tesis que para obtener el grado de **Doctor en Ciencias (Física)** sustentó la

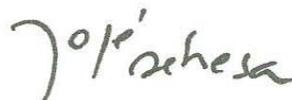
M.C. MARÍA BETSABÉ MANZANARES MARTÍNEZ

El título de la tesis es: "**Ondas elásticas en medios periódicos**", que fue desarrollada bajo la dirección del Doctor Felipe Ramos Mendieta.

Los sinodales replicaron a la sustentante y después de debatir entre sí reservada y libremente la declararon: aprobada por unanimidad, mención honorífica.
Como constancia se levanta la presente acta en donde firman los Miembros del Jurado.


Dr. Felipe Ramos Mendieta
Departamento de Investigación en Física, UNISON
Presidente

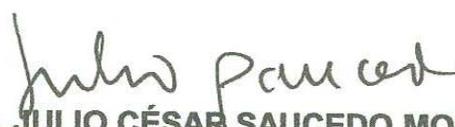

Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent
Instituto de Física, UNAM
Secretario


Dr. José Sánchez-Dehesa
Departamento Tecnología Electrónica
Universidad Politécnica de Valencia
Vocal


Dr. Jorge Alberto Gaspar Armenta
Departamento de Investigación en Física, UNISON
Vocal


Dr. Marcelino Barboza Flores
Departamento de Investigación en Física, UNISON
Vocal

El Coordinador del Posgrado en Física de la Universidad de Sonora, certifica que las firmas que anteceden son auténticas.


Dr. JULIO CÉSAR SAUCEDO MORALES



smlg.

EL SABER DE MIS HIJOS
HARÁ MI GRANDEZA
Centro de Investigación

Edificio 3 "I", Planta Baja

Apdo. Postal 5-88 C.P. 83190. Hermosillo, Sonora, México
Tel. (662) 750 71 42

Director de Tesis: Felipe Ramos Mendieta

Profesor-Investigador

Ondas Elásticas en Medios Periódicos

Autor: María Betsabé Manzanares Martínez

L.F., Departamento de Física de la Universidad de Sonora (1997)

M.C., Centro de Investigación en Física de la Universidad de Sonora (1999)

Tesis sometida al Centro de Investigación en Física de la
Universidad de Sonora como uno de los requisitos para obtener el grado de
Doctor en Física

Director de Tesis: Felipe Ramos Mendieta

Profesor-Investigador

Agradecimientos:

Primeramente a mis padres, que tan generosamente me han dado la oportunidad de salir adelante, muchas gracias.

Por su valiosa dirección en la realización de esta Tesis, al Dr. Felipe Ramos Mendieta. En especial por su continuo énfasis en la tenacidad, honradez y profesionalismo con que debe trabajarse.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología el financiamiento otorgado durante tres años y medio por medio de una beca de estudios doctorales.

Por su amistad, a mi hermanos Jesús y Sara, a María Elena, Susana, Diego, Efraín, Brenda y Jorge.

A mis sinodales: Dr. Jorge Alberto Gaspar Armenta, Dr. Marcelino Barboza Flores, Dr. Raúl Esquivel Sirvent y Dr. José Sánchez Dehesa. Por sus valiosas observaciones y preguntas acerca del contenido de esta Tesis.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Fundamentos teóricos	
1.2.1. Ecuación de onda elástica	5
1.2.2. Condiciones en la frontera del problema elástico	7
1.2.3. Líneas de sonido	9
1.3. Distribución de temas	10
2. Modos de vibración acústica en superredes	11
2.1. El Método de Desarrollo en Ondas Planas	12
2.2. Bandas elásticas transversales y sagitales	16
2.3. Características de la estructura de bandas elásticas	
2.3.1. Condición de Brewster elástica	19
2.3.2. Condición de nula reflectividad para una doble interface en el caso transversal	21
2.3.3. Condición de nula reflectividad para una doble interface en el caso sagital	22
2.3.4. Ejemplos de cierres de bandas prohibidas	24
2.3.5. Comportamiento asintótico de las bandas transversales	26
2.3.6. Comportamiento asintótico de las bandas sagitales	29
2.3.7. Convergencia de las bandas sagitales a los modos de interface tipo Stoneley	30
2.4. Conclusiones	32
3. Transmisión de ondas acústicas en superredes finitas	34
3.1. Transmisión acústica a través de interfaces	35
3.2. Relación entre espectro de transmisión y estructura de bandas	38
3.3. Estructura del espectro de transmisión	41
3.4. Conclusiones	47

4. Ondas elásticas de superficie en un sistema de periodicidad unidimensional	
4.1. Método de la Supercelda	48
4.2. Reproducción de las condiciones de vacío	49
4.3. Ejemplos de la aplicación del Método de la Supercelda	51
4.4. Modos de superficie y líneas de sonido	53
4.5. Conclusión	55
	56
5. Amplificación resonante de la transmisión de ondas	
5.1. Vibraciones de superficie y transmitividad	57
5.2. Resultados numéricos	58
5.3. Conclusiones	59
	64
6. Ondas acústicas de volumen y de superficie en cristales acústicos 2D	
6.1. Introducción	65
6.2. Bandas de volumen	66
6.3. Modos de superficie	67
6.4. Modos guiados en una capa sobrepuesta a un cristal fonónico	68
6.5. Conclusiones	72
Conclusiones Generales	78
Referencias	79
	82

A mis padres
A mi niña, Malenita

Capítulo 1

Introducción

En esta Tesis estudiamos la propagación de vibraciones mecánicas en los materiales sólidos conocidos como *cristales fonónicos* (CF's) o *cristales acústicos*; es la acústica física de medios con densidad periódica. El ejemplo más simple de estos materiales artificiales es la *superred* o *multicapa*, estructura de periodicidad unidimensional (1D) formada por láminas de dos materiales diferentes colocadas alternadamente. Se pueden construir también CF's de periodicidades bidimensional (2D) y tridimensional (3D). El primer caso se logra colocando barras cilíndricas paralelas en una matriz sólida. Los ejes de los cilindros cortan el plano perpendicular en sitios correspondientes a una red rectangular o hexagonal. El caso 3D se obtiene al situar esferas en puntos de alta simetría formando redes *fcc*, *bcc*, etc. inmersas en algún fluido u otro sólido. Los sistemas 3D, no serán materia del presente trabajo.

Nuestro objetivo principal es describir las propiedades físicas de las vibraciones elásticas de superficie en CF's 2D truncados. Son oscilaciones elásticas con vector de onda paralelo a la superficie con amplitud amortiguada hacia el interior del cristal. La Fig. 1-1 muestra esquemáticamente el perfil del desplazamiento elástico de un modo de superficie, máximo en el borde del cristal y ya prácticamente nulo en la tercera línea de cilindros.

Para entender la física de las ondas elásticas de superficie fue indispensable realizar varios estudios previos que tienen que ver principalmente con las vibraciones de volumen. La razón es que sólo una vez conocida la estructura de bandas de las ondas de volumen uno puede determinar los rangos de frecuencias accesibles para los estados acústicos localizados o de superficie. Los modos de superficie tienen frecuencias que corresponden a *bandas prohibidas* en el volumen. Por eso la vibración se confina en el borde cristalino sin penetrar.

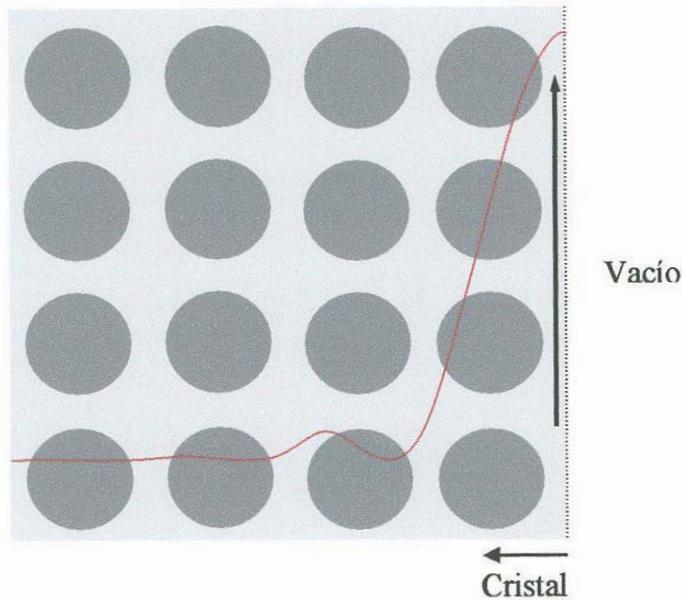


Figura 1-1. Cristal fonónico 2D truncado y perfil del desplazamiento elástico de una onda de superficie. El cristal es un arreglo cuadrado de cilindros paralelos de material A y radio r_A inmersos en otro medio B . El eje de los cilindros es perpendicular al plano de la hoja.

De forma similar a lo que pasa a los electrones en un cristal natural, en un CF los modos de propagación se agrupan en bandas. Las bandas de volumen son las curvas de dispersión $\omega(k)$ que definen a los modos oscilantes en el cristal. El punto interesante en estos cristales es la existencia de bandas prohibidas en donde no se permite la propagación de energía acústica. Esto no es un efecto de absorción; más bien se debe a la interferencia destructiva de las ondas en el cristal.

Este fenómeno hace de los CF's tema de interés tanto en la Física como en la Ingeniería de Materiales debido a sus posibles aplicaciones que van desde el aislamiento acústico de casas-habitación, industrias, y en general cualquier recinto cerrado [1] hasta la medicina[2]. Fue a principio de los años 80's cuando se comenzaron a diseñar dispositivos de componentes periódicas. Sabemos de un transductor donde el piezoeléctrico consiste de una multicapa periódica [3]. Mediante la aplicación de un campo sinusoidal es posible generar fonones que se propagan a lo largo del eje de la multicapa. El autor de la patente sugiere que los materiales de la multicapa deberían tener la menor diferencia de impedancia acústica para minimizar los efectos de difracción elástica del fonón a su paso por la misma.

Hasta donde sabemos el primer dispositivo que hace uso de la física de bandas prohibidas es un transductor tipo superred que filtra vibraciones mecánicas. [4] Este

dispositivo hace uso de un sistema GaAs/AlGaAs con capas de aproximadamente 50Å y filtra ondas con frecuencias del orden de 200-300 GHz.

Las aplicaciones de los CF's llegan hasta la protección sísmológica de estructuras. En 1998 Sheiba propuso una estructura formada por una matriz polimérica con orificios cilíndricos de 2 m de diámetro acomodados en una red cuadrada de constante 3.65 m [5]. Esta estructura diseñada para formar parte de los cimientos de construcción es capaz de atenuar vibraciones sísmicas y de tráfico (menores de 100 Hz). La atenuación de las oscilaciones sin duda tiene que ver con la difracción de ondas debida a la periodicidad.

1.1 Antecedentes

Todos los resultados que aquí presentamos son obtenidos mediante un tratamiento clásico: usaremos las leyes de Newton. Esto restringe el rango de validez de nuestros resultados; sólo se aplican cuando las longitudes de onda involucradas son mucho mayores que las distancias interatómicas.

Las leyes de Newton para el estudio de vibraciones mecánicas en medios sólidos o fluidos constituyen la *Mecánica del Medio Continuo*. Con este enfoque hay gran cantidad de estudios aplicados a medios sólidos, que datan desde principios del siglo XIX con Navier y Cauchy [6] estableciendo los principios de la Teoría de la Elasticidad. Inicialmente la aplicación de esta teoría estuvo más enfocada a las vibraciones sísmológicas, llegando al estudio de oscilaciones en multicapas para simular la propagación de terremotos en distintas capas de la Tierra. [7]

Nuevas técnicas de laboratorio hicieron posible el diseño de multicapas periódicas a pequeña escala. Esto trajo consigo un mayor interés por las características físicas de estos sistemas. La primera publicación teórica que tenemos registrada sobre bandas elásticas fue hecha en 1983 por Dobrzynski *et al.* [8] Estudiaron las vibraciones de ondas transversales en una superred W/Al dentro de la aproximación isotrópica de los materiales constituyentes utilizando el método de las funciones de Green.

Durante los últimos años el mayor interés por el estudio de vibraciones en medios periódicos está ligado al desarrollo de los *cristales fotónicos*. Éstos son a la luz lo que los CF's son al sonido. Antes que surgiera la teoría de los cristales fotónicos introducida por Yablonovich [9] en 1987, ya se conocían las bandas elásticas en superredes [8,10] pero el estudio no se había extendido a sistemas periódicos en dos y

en tres dimensiones. El desarrollo de los cristales fotónicos animó a diferentes grupos a retomar el caso elástico. Uno de los primeros trabajos y que podríamos considerar es punto de partida para esta Tesis fue publicada por Halevi *et al.* en 1994. [11] Utilizando el método de desarrollo en ondas planas calcularon los modos de polarización transversal de un sistema de cilindros de Al en una matriz de Cu.

Por otro lado Sánchez-Dehesa *et al.* reportaron la construcción de un interferómetro sónico en base a un CF 2D. [12] Es una cavidad Fabry-Perot de ondas de sonido. Se obtienen mínimos en el espectro de reflexión directamente relacionados con el número de capas de cilindros que conforman la estructura. Muy recientemente Lai y Zhang [13] probaron teóricamente la existencia de bandas prohibidas grandes en CF's de cilindros de aluminio inmersos en un epoxi con algunas inclusiones de cilindros de aire. Se trata de un CF 2D ternario.

Se ha llegado también al estudio de sistemas tridimensionales, uno de los artículos más recientes muestra la estructura de bandas para un cristal de esferas de acero en poliéster.[14] La principal característica de este tipo de sistemas es que manejando adecuadamente los parámetros estructurales se pueden obtener bandas prohibidas muy amplias. Por ejemplo, es posible obtener una banda de 0-400 kHz con una primera banda prohibida de 400-1200 kHz en un arreglo *fcc* de *factor de llenado* 0.55(volumen de la esfera entre volumen de la celda unitaria).

Un tópico menos estudiado es el de las vibraciones elásticas de superficie. Conocemos varios reportes sobre estas ondas en sistemas 1D. [8,15] No obstante por su mayor complejidad sólo recientemente pudo demostrarse la existencia de modos de superficie acústicos en estructuras 2D. El CF utilizado era de cilindros de Hg en una matriz de Al en un arreglo cuadrado. [16] El plano de truncamiento del cristal es paralelo al plano de la periodicidad (perpendicular al eje de los cilindros). Para un diámetro de cilindros de 2 mm, y parámetro de red de 2.8 mm se excitó una onda de superficie de frecuencia 0.75 MHz. La onda tiene un máximo en la frontera y desvanece a una profundidad de 9 mm.

Otros trabajos también han tratado este problema pero desde un punto de vista teórico. En uno de ellos, Tanaka *et al.* [17], reportan el desdoblamiento de la curva de dispersión de modos de superficie en un cristal de cilindros de AlAs en una matriz de GaAs. Por otra parte, Tartatovskaya [18] calcula los modos de superficie en un cristal de cilindros de Ni en Al, su principal aportación es la propuesta de un método de cálculo

que permite obtener de forma simplificada las primeras bandas de volumen y de superficie del sistema.

Hasta aquí hemos hecho un bosquejo acerca de lo que ya se ha hecho en el campo de los cristales acústicos. Nuestra contribución al campo la cual detallamos en esta Tesis la resumimos de la manera siguiente.

Hemos establecido los alcances del método de la supercelda para obtener los modos de superficie elásticos tanto de polarización transversal como mixta en cristales fonónicos de periodicidad 1D y 2D. Para el primer caso, 1D, el método es sumamente preciso. El caso 2D es muy demandante en tiempo de cómputo, pero aún así el método resulta suficiente.

También hemos reportado dos nuevos fenómenos en la física de los cristales elásticos. Primero, existe el Ángulo de Brewster Acústico el cual provoca cierres de bandas prohibidas, y segundo, la transmisión de ondas elásticas a través de superredes sólidas se amplifica debido a la resonancia con estados de superficie.

Los detalles de esta contribución y más son dados a lo largo del presente documento. Para empezar y sin afán de fastidiar al lector hacemos una breve discusión de la base teórica de la cual parte toda nuestra investigación.

1.2 Fundamentos teóricos

1.2.1 Ecuación de onda elástica

Al estudiar la dinámica de un objeto masivo sabemos que su movimiento general consiste en traslaciones, rotaciones y deformaciones. Aquí estamos interesados sólo en la física de las deformaciones.

Cuando un sistema se deforma la distancia entre pares de puntos adyacentes cambia. Sean $d\vec{x}$ y $d\vec{x}'$ los vectores que corresponden a estas distancias antes y después de una deformación, y $d\vec{u} = d\vec{x}' - d\vec{x}$ el vector de desplazamiento. Estas variables satisfacen la relación

$$dx'^2 = dx^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.1)$$

donde u_{ij} es el *tensor de deformación* el cual se define en términos de las derivadas del vector de desplazamiento como

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.2)$$

Esta expresión está dentro de la aproximación de Cauchy (desprecia términos de segundo orden).

La ecuación de onda elástica para estructuras periódicas la obtendremos a partir de la ecuación básica de la elasticidad de medios continuos

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.3)$$

la cual está escrita en términos del *tensor de esfuerzos* σ_{ij} y de la densidad ρ . En medios isotrópicos la ley generalizada de Hooke establece que

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2) u_{ii} \delta_{ik}, \quad (1.4)$$

donde c_t y c_l son las velocidades para la onda transversal y longitudinal en el medio homogéneo. Las ondas longitudinales son aquellas donde la amplitud de la perturbación coincide con la dirección de propagación, mientras que para una vibración transversal la amplitud de oscilación es perpendicular a la dirección de avance de la onda.

Introduciendo las expresiones (1.2) y (1.4) en la ec. (1.3) es posible obtener la siguiente ecuación de onda

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = & \nabla \cdot (\rho c_t^2 \nabla u_i) + \nabla \cdot \left(\rho c_t^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho c_l^2 - 2\rho c_t^2) \nabla \cdot u] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Asumimos que los parámetros materiales del sistema dependen de las coordenadas x y z [es decir, $\rho = \rho(x, z)$, $c_t = c_t(x, z)$, $c_l = c_l(x, z)$ en el caso 2D; $\rho = \rho(z)$, $c_t = c_t(z)$, $c_l = c_l(z)$ en el caso 1D]; si además restringimos la dirección de propagación de la vibración (es decir, el vector de onda) también al plano x - z la ecuación de onda se desdobra de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = & \vec{\nabla}_s \cdot (\rho c_t^2 \vec{\nabla}_s u_x) + \vec{\nabla}_s \cdot \left(\rho c_t^2 \frac{\partial \vec{u}_s}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [(\rho c_l^2 - 2\rho c_t^2) \vec{\nabla}_s \cdot \vec{u}_s] \end{aligned} \quad (1.6)$$

y

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \vec{\nabla}_s \cdot (\rho c_t^2 \vec{\nabla}_s u_y). \quad (1.7)$$

Las soluciones al sistema acoplado (1.6) corresponden a las vibraciones de polarización mixta con vector de desplazamiento $u_s = \hat{x}u_x + \hat{z}u_z$. Por su parte, la ec. (1.7) corresponde a vibraciones transversales en donde el vector de desplazamiento tiene dirección y .

Las ecs. (1.6) y (1.7) serán particularizadas para los casos periódicos en los capítulos siguientes.

1.2.2 Condiciones en la frontera del problema elástico

Una onda elástica que se transmite a través de la interface que separa dos medios debe cumplir con las condiciones de conservación de momento y de energía.

Consideremos entonces el flujo de momento por unidad de área \dot{m} que atraviesa una interface que tiene vector perpendicular unitario \hat{n} ; cada componente de \dot{m} está dado por

$$\dot{m}_i = \Pi_{ik} n_k, \quad (1.8)$$

en esta expresión n_k son las componentes de \hat{n} , y Π_{ik} es el *tensor de densidad de flujo de momento* que en términos del tensor de esfuerzos se escribe como $\Pi_{ik} = -\sigma_{ik}$. Ubicando la interface paralela al plano x - y ($\hat{n} = \hat{z}$) la conservación de momento lineal nos lleva a la continuidad de cada una de las componentes σ_{iz} ($i = x, y, z$) a través de la interface.

Para estudiar la conservación de la energía hacemos uso del *vector de Poynting elástico* \vec{P} , el cual se relaciona con la energía que atraviesa una superficie de la siguiente manera

$$\dot{E} = -\int_S P_i n_i dS. \quad (1.9)$$

Entonces P_i indica el flujo de energía por unidad de tiempo por unidad de área que viaja en la dirección i ; en términos del tensor de esfuerzos este se escribe como $P_i = -\sigma_{ik} \dot{u}_k$.

Nuevamente considerando la interface cuyo vector perpendicular es \hat{z} , la conservación del flujo de energía exige que

$$P_z = -\sigma_{zk} \dot{u}_k \quad (1.10)$$

sea continua. Esta ecuación en conjunto con la condición de conservación de momento nos lleva a la continuidad de las componentes \dot{u}_k a través de la interface. Podemos decir simplemente que las componentes del desplazamiento u_k deben ser continuas.

Por otra parte, en un sólido existen tanto ondas de tipo transversal como longitudinal, en un fluido ideal no se propagan ondas transversales mientras en el vacío ningún tipo de onda existe. En la Tabla 1.A se presentan las condiciones de frontera particularizadas para los casos de interfaces *sólido-sólido*, *sólido-fluido* y *sólido-vacío* para una interface paralela al plano xy .

	Interface Sólido-Sólido	Interface Sólido-Fluido	Interface Sólido-Vacío
Desplazamiento Normal	$(\vec{u}_{sólido_1})_z = (\vec{u}_{sólido_2})_z$	$(\vec{u}_{sólido})_z = (\vec{u}_{fluido})_z$	----
Desplazamiento Tangencial	$(\vec{u}_{sólido_1})_x = (\vec{u}_{sólido_2})_x$	----	----
Esfuerzo Normal	$(\sigma_{sólido_1})_{zz} = (\sigma_{sólido_2})_{zz}$	$(\sigma_{sólido})_{zz} = (\sigma_{fluido})_{zz}$	$(\sigma_{sólido})_{zz} = 0$
Esfuerzo Tangencial	$(\sigma_{sólido_1})_{xz} = (\sigma_{sólido_2})_{xz}$	$(\sigma_{sólido})_{xz} = 0$	$(\sigma_{sólido})_{xz} = 0$

Tabla 1.A Condiciones de frontera elásticas para diferentes interfaces.

Como consecuencia de las condiciones en la frontera, en el problema de la reflexión y transmisión de ondas elásticas en una interface ocurre el fenómeno de *conversión de modos*. Esto significa que una onda longitudinal incidente sobre una interface que separa dos medios materiales puede generar ondas reflejadas y transmitidas que contengan una componente de polarización transversal. Similarmente una onda incidente de tipo transversal (con amplitud paralela al plano de propagación) puede dar lugar a ondas reflejadas y transmitidas longitudinales. La razón de esto es que la condición de frontera mezcla componentes de ambas polarizaciones.

Por otro lado, los ángulos de transmisión y de reflexión están dados por la *ley de Snell acústica*

$$\frac{\text{sen}\theta_{li}}{c_{li}} = \frac{\text{sen}\theta_{ti}}{c_{ti}} = \frac{\text{sen}\theta_{lt}}{c_{lt}} = \frac{\text{sen}\theta_{tt}}{c_{tt}}, \quad (1.11)$$

la cual es consecuencia de la continuidad de fase de la onda. θ es el ángulo de incidencia o transmisión y c es la velocidad de sonido. Los subíndices li (lt) y ti (tt) significan longitudinal incidente (transmitida) y transversal incidente (transmitida).

1.2.3 Líneas de Sonido

La ecuación de onda (1.5) para el caso de medio homogéneo puede escribirse en la forma vectorial

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -c_t^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + c_l^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{u}). \quad (1.12)$$

Esta expresión tiene dos soluciones independientes. La primera tiene como resultado ondas longitudinales de velocidad de propagación c_l y requiere que $\nabla \times \vec{u} = 0$. La segunda, correspondiente a ondas transversales de velocidad c_t , exige que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. En

ambos casos la ecuación (1.12) se simplifica a la forma $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{u}$, cuya solución es $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{A} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$. Suponiendo que x - z es el plano de propagación se cumple la siguiente relación entre frecuencia y vector de onda:

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_\mu^2} \quad (1.13)$$

con $\mu = l, t$ para ondas longitudinales y transversales, respectivamente. Despejando la

componente z del vector de onda tenemos: $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_\mu^2} - k_x^2}$. Si queremos que la onda

tenga componente z del vector de propagación real, entonces es necesario que la cantidad dentro de la raíz sea positiva, esto implica que

$$\frac{\omega^2}{c_\mu^2} \geq k_x^2. \quad (1.14)$$

Un vector de onda k_z imaginario correspondería a una onda que decae en dirección z ; si k_z es real entonces se tendrá un comportamiento oscilatorio en esa dirección. La relación (1.14) define la recta que denominamos *línea de sonido*, dada por $\omega = c_\mu |k_x|$ que divide al espacio en dos regiones: los modos de oscilación correspondientes a frecuencias ubicadas por encima de la línea de sonido tienen comportamiento oscilatorio; por debajo de la línea las parejas (k_x, ω) sólo pueden corresponder a ondas que decaen (en la dirección z)

1.3 Distribución de temas

En la sección anterior hemos hecho una revisión de algunos temas fundamentales de la Teoría de la Elasticidad. Existen otros conceptos pertenecientes a la Física del Estado Sólido tales como red directa, red recíproca, Teorema de Bloch, etc., que también emplearemos. Sin embargo, por ser sumamente fundamentales y ampliamente tratados en los libros de texto no consideramos necesario presentarlos aquí.

Como es de esperarse la complejidad del estudio de los modos de vibración en su aspecto numérico y conceptual aumenta con la dimensionalidad. Conviene entonces estudiar primero el caso de periodicidad 1D obteniendo la mayor cantidad de conclusiones sobre la Física relacionada con los modos elásticos de volumen y de superficie. Iniciaremos nuestra exposición de temas introduciendo en el Capítulo 2 el Método de Desarrollo en Ondas Planas como nuestra herramienta básica de cálculo. Discutiremos las características de los modos de volumen de tipo transversal y sagital en una superred.

En el tercer Capítulo calculamos la transmitividad a través de una multicapa finita relacionándola con la estructura de bandas. Como veremos, no utilizamos ningún método establecido, sino que hicimos una aplicación sucesiva de condiciones de frontera en cada interface de la superred.

En el Capítulo 4 presentamos la metodología utilizada para el estudio de los modos de superficie, el *Método de la Supercelda*, el cual es una generalización del Método de Desarrollo en Ondas Planas presentado en el Capítulo 2.

Luego en el Capítulo 5 presentamos los principales resultados obtenidos en el estudio de los modos de superficie y sus implicaciones en la transmisión a través de sistemas finitos.

Toda esta investigación del caso unidimensional es el camino que hemos recorrido para llegar a nuestro objetivo que es el cálculo de modos de volumen y de superficie en sistemas de periodicidad bidimensional los cuales son tratados en el Capítulo 6.

Finalmente en el Capítulo 7 presentamos nuestras conclusiones generales.

Capítulo 2

Modos de vibración acústica en superredes

Utilizamos el *Método de Desarrollo en Ondas Planas* para determinar los modos de vibración elástica en sistemas de periodicidad 1D. Mostramos que las soluciones se agrupan en bandas de frecuencias cuya anchura y frecuencia media dependen tanto de los parámetros estructurales (constante de red a y factor de llenado f) como de los parámetros materiales (densidad ρ , velocidades de sonido longitudinal c_l y transversal c_t). Presentamos el concepto de proyección de bandas a lo largo de la dirección de homogeneidad el cual es una herramienta importante para el estudio de las ondas de superficie. Se discuten algunas características físicas de las bandas proyectadas como es el cierre de bandas prohibidas por efecto de ángulo de Brewster elástico así como también su comportamiento asintótico en el límite de vector de onda grande.¹

¹ Parte de contenido de este Capítulo fue publicado en *Physical Review B* [19].

Existen diferentes métodos para resolver la ecuación de elasticidad en sistemas periódicos. Casi todos ellos han sido traídos de las teorías desarrolladas para obtener los estados electrónicos en los cristales naturales o bien los estados electromagnéticos en cristales fotónicos. Entre esos métodos podemos mencionar el de las funciones de Green [20], el de expansión en ondas planas [21], el variacional [22] y el de la Matriz de Transferencia [23]. Hemos dicho en el capítulo anterior que las funciones de Green fueron una herramienta importante para el estudio inicial de las ondas elásticas en superredes. Por su parte el método variacional [22] (y otros como el de múltiple scattering [24] y de diferencias finitas [25]) se han desarrollado en los últimos años para estudiar estructuras 2D y 3D, de mayor complejidad.

El método de expansión en ondas planas ha sido muy utilizado en la teoría de los cristales fotónicos. Nosotros lo hemos adaptado para el cálculo de bandas acústicas tanto de volumen como de superficie en arreglos 1D y 2D. En las páginas siguientes presentamos el sustento teórico de este método y hacemos varias aplicaciones a lo largo del capítulo.

2.1 El Método de Desarrollo en Ondas Planas

En las Figs. 2-1 y 2-2 mostramos el sistema de periodicidad 1D a resolver. Definimos la celda unitaria consistente de una capa de material A de anchura d centrada entre dos capas de material B de anchura $(a-d)/2$. Es nuestro bloque unitario cuya repetición a lo largo del eje z da lugar a la superred. Los parámetros de densidad, velocidades de sonido longitudinal y transversal son denotados con $\rho_a, \rho_b, c_{la}, c_{lb}, c_{ta}$ y c_{tb} , para los materiales A y B , respectivamente.

El Método de Desarrollo en Ondas Planas consiste en escribir los parámetros materiales de la estructura en series de Fourier, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \sum_z \rho(G_z) e^{iG_z z}, \\ \rho(z)c_l^2(z) &= \sum_z \tau(G_z) e^{iG_z z} \\ \rho(z)c_t^2(z) &= \sum_z \Lambda(G_z) e^{iG_z z}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

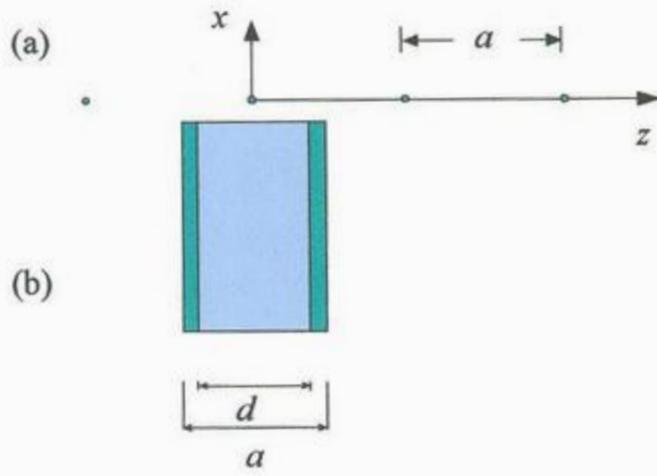


Figura 2-1 (a) Red directa para estructuras de periodicidad unidimensional de constante de red a . (b) Celda unitaria.

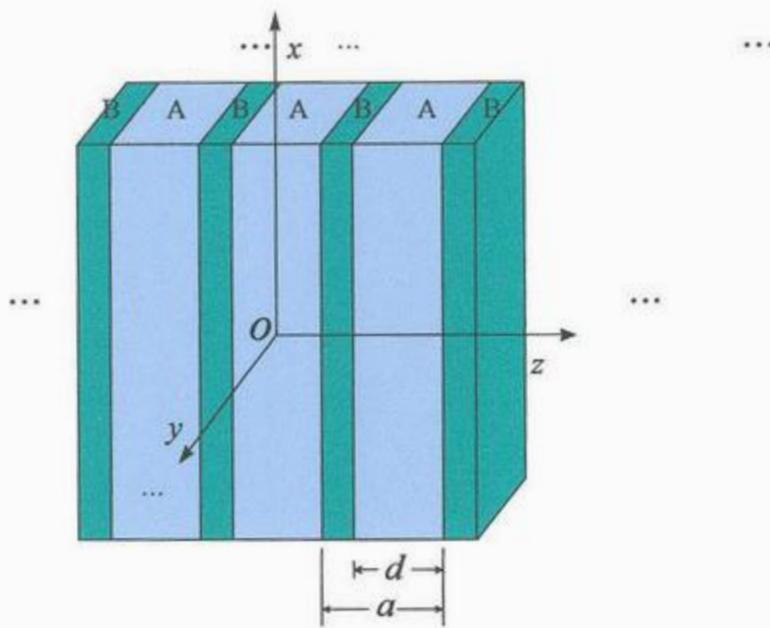


Figura 2-2 Superred binaria compuesta de capas alternadas de dos materiales isotrópicos.

Donde $\vec{G} = G_z \hat{z} = \frac{2\pi}{a} n \hat{z}$ es el vector de la red recíproca unidimensional. Estos desarrollos serán sustituidos en las ecuaciones de onda (1.6) y (1.7).

Debido a la periodicidad del sistema buscamos soluciones que cumplan con el teorema de Bloch. Es decir, el desplazamiento elástico tendrá la forma

$\vec{u}(\vec{x}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{x})$, donde $\vec{u}_{\vec{k}}(\vec{x}) = \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{x} + a\hat{z})$ y k_z es el vector de Bloch. Desarrollando $\vec{u}_{\vec{k}}$ en ondas planas la solución final toma la forma:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = e^{i(k_x x - \omega t)} \sum_{G_z} \vec{u}_{\vec{k}}(G_z) e^{i(k_z + G_z)z}. \quad (2.2)$$

Hemos introducido la componente k_x del vector de onda lo cual nos permitirá describir ondas con propagación oblicua.

Este proceder hace innecesaria la aplicación de condiciones de frontera, pues la información estructural del sistema se encuentra implícita en los coeficientes de Fourier. El método permite encontrar el desplazamiento elástico en cada punto del espacio; si evaluáramos el valor de éste en ambos lados de cada interface encontraríamos que estos valores satisfacen las condiciones en la frontera. Esto es porque las condiciones en la frontera son consistentes con las ecuaciones de movimiento, las mismas ecuaciones sobre las cuales estamos haciendo los desarrollos en series.

Introduciendo las expresiones (2.1) y (2.2) en la Ec. (1.6) obtenemos para la polarización sagital la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{xx} & \mathbf{M}_{xz} \\ \mathbf{M}_{zx} & \mathbf{M}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix} = \omega^2 \mathbf{N} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_z \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Similarmente haciendo las sustituciones en la ec. (1.7) encontramos la siguiente relación para las ondas de polarización transversal

$$\mathbf{M}_{yy} \mathbf{u}_y(G'_z) = \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{u}_y. \quad (2.4)$$

En estas ecuaciones \mathbf{M}_{ij} y \mathbf{N} son matrices infinitas cuyos elementos son:

$$\begin{aligned} M_{xx}(G_z, G'_z) &= k_x^2 \Lambda(G_z - G'_z) + \tau(G_z - G'_z)(k_z + G'_z)(k_z + G_z), \\ M_{xz}(G_z, G'_z) &= k_x(k_z + G'_z)[\Lambda(G_z - G'_z) - 2\tau(G_z - G'_z)] + k_x(k_z + G_z)\tau(G_z - G'_z), \\ M_{zx}(G_z, G'_z) &= [\Lambda(G_z - G'_z) - 2\tau(G_z - G'_z)]k_x(k_z + G_z) + \tau(G_z - G'_z)(k_z + G'_z)k_x, \\ M_{zz}(G_z, G'_z) &= \tau(G_z - G'_z)k_x^2 + \Lambda(G_z - G'_z)(k_z + G'_z)(k_z + G_z), \\ M_{yy}(G_z, G'_z) &= \tau(G_z - G'_z)[(k_z + G'_z)(k_z + G_z) + k_x^2] \\ N(G_z, G'_z) &= \rho(G_z - G'_z). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Los vectores \mathbf{u}_i ($i = x, y, z$) corresponden a arreglos infinitos cuyas componentes son los coeficientes de Fourier de la expresión (2.2). Las ecuaciones (2.3) y (2.4) pueden verse como relaciones matriciales de la forma $\mathbf{M}\mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{N}\mathbf{u}$ las cuales pueden llevarse a un problema de eigenvalores al multiplicar ambos lados de la ecuación por la matriz inversa \mathbf{N}^{-1} .

Para el cálculo de los coeficientes de Fourier requeridos en las igualdades (2.5) es necesario establecer las funciones que describan las $\rho(z)$, $\rho c_1^2(z)$ y $\rho c_2^2(z)$. La densidad de masa la escribimos como $\rho(z) = \rho_b + (\rho_a - \rho_b)\Theta(d/2 - |z|)$, donde $\Theta(\chi)$ es la función de Heaviside ($\Theta = 1$ para $\chi \geq 0$, $\Theta = 0$ para $\chi < 0$). El coeficiente de Fourier correspondiente tiene la expresión integral

$$\rho(G_z) = \frac{1}{a} \int_c \rho(z) e^{-iG_z z} dz. \quad (2.6)$$

Realizando la integral obtenemos:

$$\rho(G_z) = \begin{cases} \rho_b + (\rho_a - \rho_b) \frac{d}{a} & G_z = 0 \\ (\rho_a - \rho_b) \frac{d}{a} \frac{\text{sen} \frac{G_z d}{2}}{\frac{G_z d}{2}} & G_z \neq 0 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Al sustituir $\rho_a \rightarrow \rho_a c_{1a}^2$, $\rho_a c_{1a}^2$ y $\rho_b \rightarrow \rho_b c_{1b}^2$, $\rho_b c_{1b}^2$ llegamos similarmente a los coeficientes de Fourier $\tau(G_z)$ y $\Lambda(G_z)$.

El problema entonces se resuelve numéricamente; el tamaño de las matrices involucradas será tan grande como la convergencia del problema específico lo requiera, lo cual depende del tipo de polarización y del contraste de impedancias ($\Delta Z = Z_B / Z_A = \rho_a c_a / \rho_b c_b$) de los dos materiales involucrados. Los programas numéricos los elaboramos utilizando el lenguaje FORTRAN90, haciendo uso de las paqueterías públicas LINPACK [26] y LAPACK, [27] así como algunas subrutinas del Numerical Recipes.[28]

2.2 Bandas Elásticas Transversales y Sagitales

Presentamos resultados para una superred de capas alternadas de aluminio (Al) y tungsteno (W), con $a = 2d$. Fueron requeridas 601 ondas en los desarrollos. Los parámetros materiales para este sistema y todos los manejados en esta Tesis pueden consultarse en la Tabla 2.A. Consideramos inicialmente propagación a lo largo del eje de la superred (la dirección z).

En la Fig. 2-3 graficamos los modos (k_z, ω) . Como sabemos el vector de Bloch toma valores correspondientes a la primera zona de Brillouin $(0, \pi/a)$. El lado izquierdo de la figura representa las soluciones transversales y el lado derecho las soluciones sagitales. Las frecuencias son presentadas en unidades normalizadas $\Omega = \omega a / c_{Al}$.

Material	Densidad de masa	Velocidad de sonido	Velocidad de sonido
	ρ (gr/cm ³)	longitudinal c_l (10 ⁵ cm/s)	transversal c_t (10 ⁵ cm/s)
Al	2.69	6.45	3.22
W	19.3	5.21	2.88
Ge	5.32	5.41	3.55
Pb	11.34	1.96	1.12
Polietileno	0.89	1.9	0.5
Epoxi	1.18	2.54	1.16
Cu	8.95	4.33	2.89
Au	19.5	3.36	1.47
Si	2.32	8.45	5.86
Mo	10.2	6.64	3.5
Pt	21.5	4.01	1.88

Tabla 2.A Densidades, velocidades de sonido longitudinal y transversal en diferentes materiales.

Notamos en la Fig. 2-3 que las curvas en las dos partes (a) y (b) son las mismas, sólo que en (b) aparecen curvas adicionales. Esto es porque las ondas de volumen de tipo sagital están constituidas por una combinación transversal-longitudinal. Las ondas transversales y las ondas longitudinales se propagan por la superred sin recombinarse.

Obtenemos la misma solución para la componente transversal de la onda sagital que para la onda transversal pura.

En la Fig. 2-3 (a) la primera banda se extiende de 0 a 1.4 en las unidades normalizadas y corresponden a k_z de 0 a $\pi/2$; la segunda banda con frecuencias de 4.5 a 5.7 corresponde a k_z de $\pi/2$ a π , y la tercera tiene un rango de 6.2 a 7.4 que corresponde a k_z de π a $3\pi/2$. Entonces estamos llevando todas las soluciones de la ecuación de onda a la primera zona de Brillouin (en Física del Estado Sólido se dice que esta forma de presentación de las soluciones es el esquema de zona reducida).

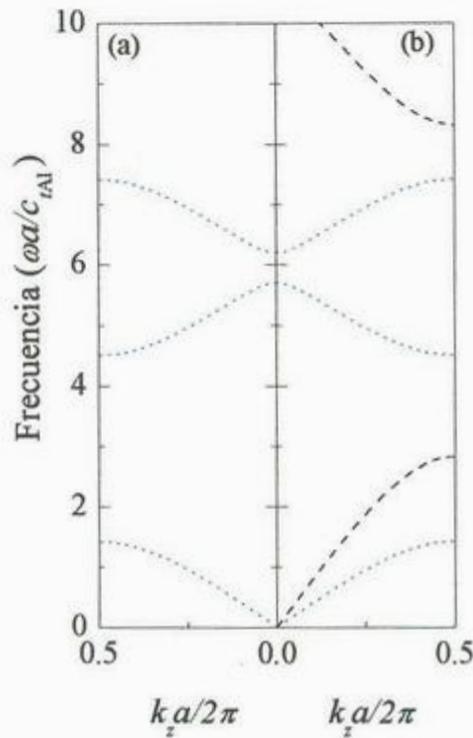


Figura 2-3 Bandas de volumen para una superred Al/W. Las partes (a) y (b) muestran las curvas de dispersión para ondas que viajan a lo largo del eje z , para polarización transversal y sagital, respectivamente.

Si nos desviamos de la propagación normal, es decir, si introducimos una componente k_x al vector de propagación, obtenemos soluciones que también se agrupan en bandas. De igual forma todas estas soluciones pueden representarse en un esquema de zona reducida. Llamamos a este proceso *proyección de bandas*. Con k_x arbitrario las soluciones se obtienen con vectores k_z de Bloch dentro de la zona irreducible

La Fig. 2-4 (a) muestra las bandas proyectadas de ondas polarización transversal. En el eje horizontal de la gráfica tenemos $k_x a$ y en la ordenada la frecuencia. Los bordes de

cada una de las bandas corresponden a los bordes de la primera zona. Por otro lado el panel (d) de la misma figura presenta las bandas de tipo sagital.

En la Fig. 2-4 también presentamos las líneas de sonido (Secc. 1.2.3) de los materiales que constituyen a la superred. Cada línea define el comportamiento de las componentes de desplazamiento de polarización longitudinal o transversal dentro del material respectivo; para frecuencias por encima de cada una el comportamiento es oscilatorio y por debajo evanescente en la dirección z .

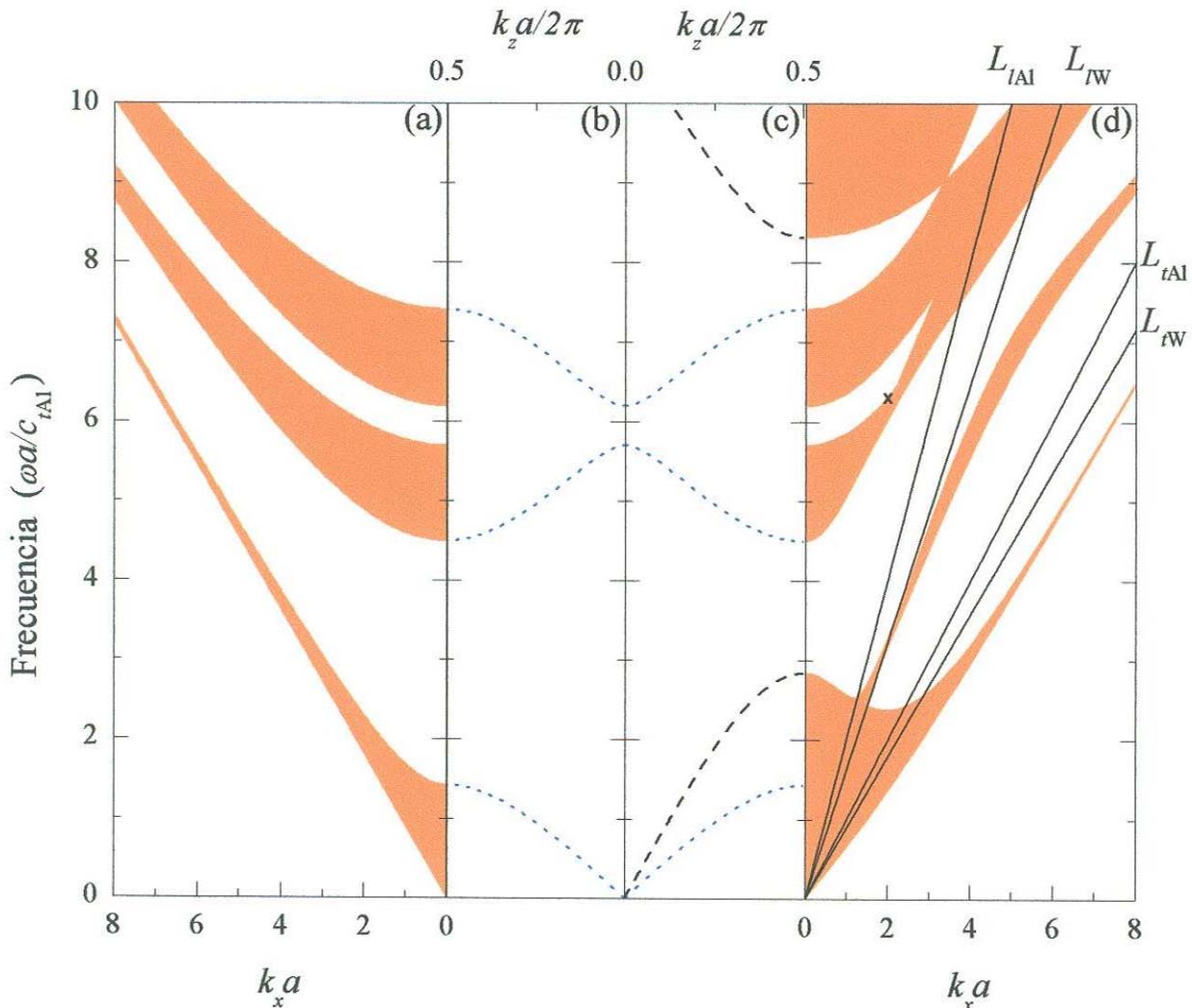


Figura 2-4 Estructura de bandas de volumen para una superred igual a la Fig. 2-1. Los paneles (a) y (d) representan las frecuencias de vibración con vector de onda k_x finito, los paneles (b) y (c) muestran las curvas de dispersión para ondas que viajan a lo largo del eje z .

Por otra parte es posible obtener los perfiles de onda de los modos de volumen al sustituir los eigenvectores \mathbf{u} obtenidos al resolver las ecs. (2.3) y (2.4) en el desarrollo (2.2).

En la Fig. 2-5 presentamos como ejemplo el perfil de un modo de volumen perteneciente a la tercera banda de volumen mostrada en la Fig. 2-2(d). Se requirió una base de 801 ondas.

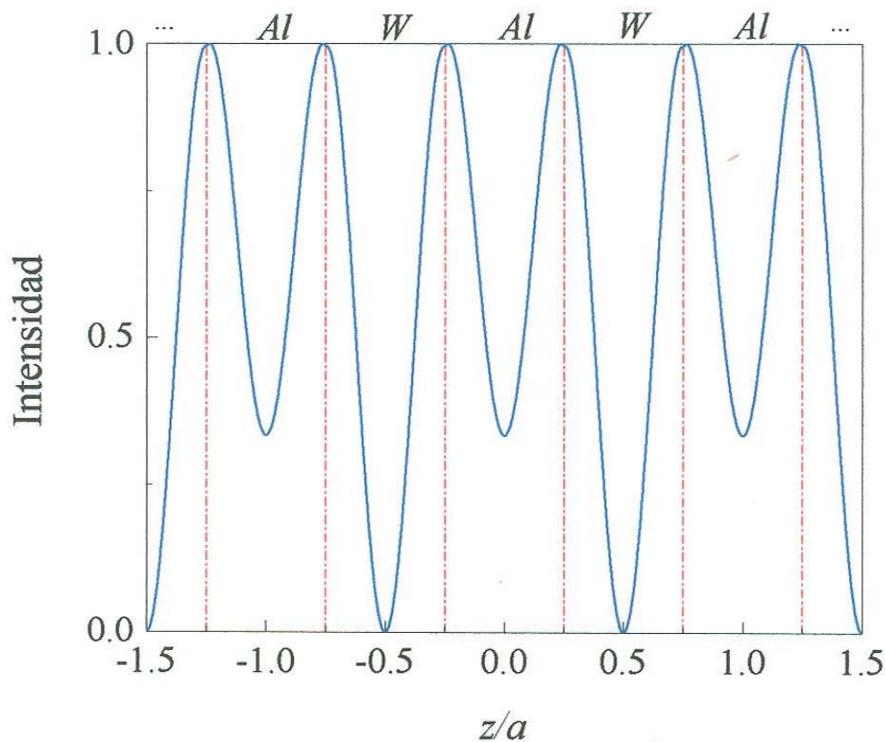


Figura 2-5 Perfil de intensidad de una onda de polarización sagital de la tercera banda de volumen. La gráfica corresponde al punto con $k_x a = 2$ y $\omega a / c_{tAl} = 6.3$ del panel (d) de la Fig. 2-2.

2.3 Características de la estructura de bandas elásticas

2.3.1 Condición de Brewster elástica

Sabemos que las bandas de frecuencia prohibida resultan de los efectos de interferencia de las ondas reflejadas y transmitidas en las interfaces de la superred. Tal como en el caso de las bandas fotónicas, [29,30] para el problema transversal elástico también existe una condición de Brewster para el ángulo de incidencia (entre dos medios subsecuentes) que elimina estos efectos. Esto significa que la frecuencia y vector de onda de un modo acústico que satisface tal condición no puede existir dentro de una banda prohibida. Entonces las bandas prohibidas deben cerrarse a lo largo de la línea $\omega = \omega(k_x)$ cuya pendiente está definida por la condición de Brewster.

Para obtener una expresión para el ángulo de Brewster elástico θ_{ab} consideremos el problema de la reflexión de una onda elástica en la interface plana entre dos medios

homogéneos semiinfinitos. La incidencia es desde un medio A transmitiéndose a un medio B . Aplicando las condiciones de continuidad de la amplitud y tensor de esfuerzos (Secc. 1.2.2) obtenemos el par de ecuaciones

$$A_i + A_r - A_t = 0 \quad (2.8)$$

y

$$\rho_a c_{ta}^2 k_a (A_i - A_r) \cos \theta_i - \rho_b c_{tb}^2 k_b A_t \cos \theta_t = 0, \quad (2.9)$$

donde A_α con $\alpha = i, r, t$ son las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente; θ_i y θ_t son los ángulos de incidencia y transmisión, los vectores de onda tienen magnitudes $k_a = \omega / c_{ta}$ y $k_b = \omega / c_{tb}$. Resolviendo estas ecuaciones encontramos que la condición de reflectividad nula se obtiene cuando el ángulo de incidencia es el ángulo de Brewster:

$$\theta_{aB} = \cos^{-1} \left| \frac{(c_{ta} / c_{tb})^2 - 1}{(\rho_a c_{ta}^2 / \rho_b c_{tb}^2)^2 - 1} \right|^{1/2}. \quad (2.10)$$

Cuando $\rho_a = \rho_b$ esta expresión se reduce a $\theta_{aB} = \tan^{-1}(c_{ta} / c_{tb})$ que se asemeja a la bien conocida relación para el ángulo de Brewster para ondas de polarización transversal magnética en óptica [$\theta_{aB} = \tan^{-1}(n_B / n_A) = \tan^{-1}(v_A / v_B)$, donde n_A , v_A y n_B , v_B son los índices de refracción y las velocidades de onda en los medios A y B , respectivamente]. En este punto podemos introducir la línea de Brewster como aquella recta cuya pendiente es

$$\frac{\omega}{k_x} = c_{ta} \left[\frac{1}{1 - \alpha} \right]^{1/2}, \quad (2.11)$$

donde α está dada por

$$\alpha = \frac{(c_{ta} / c_{tb})^2 - 1}{(\rho_a c_{ta}^2 / \rho_b c_{tb}^2)^2 - 1}. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.11) se obtiene directamente de la definición $k_a = \omega / c_{ta}$ tomando en cuenta la condición de Brewster (ec. 2.10).

Cuando los parámetros materiales se introducen en las ecuaciones (2.10) - (2.12) tendremos una de las siguientes tres posibilidades: (a) $-\infty < \alpha \leq 0$, θ_{aB} compleja y $\omega / k_x \leq c_{ta}$; (b) $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \theta_{aB} \leq \pi/2$ y $\omega / k_x \geq c_{ta}$; y (c) $1 < \alpha < \infty$, θ_{aB} complejo con

ω/k_x imaginario. Las condiciones (a) y (c) no representan una onda de incidencia real. Es decir, para estos dos casos no se puede obtener reflectividad cero pues no representan una solución físicamente posible. Hemos escogido el medio A como el medio desde el que la onda incide. Si la onda incide desde un medio B las ecuaciones obtenidas siguen siendo válidas. Solamente se requiere cambiar $a \rightarrow b$ y $b \rightarrow a$ en las Ecs. (2.10) – (2.12). Por supuesto el valor de θ_{aB} depende del medio desde el cual la onda incide. Sin embargo, la pendiente de la línea de Brewster es independiente de esta condición. La posibilidad (b) establece que $\omega^2/k_x^2 \geq 0$. Esto es que la ecuación (2.11) puede ser escrita como

$$\frac{\omega}{k_x} = \left| \frac{(\rho_a c_{ta}^2)^2 - (\rho_b c_{tb}^2)^2}{(\rho_a c_{ta}^2)^2 + (\rho_b c_{tb}^2)^2} \right|^{1/2}, \quad (2.13)$$

la cual es una expresión simétrica que muestra que la pendiente la línea de Brewster solo depende de la diferencia entre los parámetros de los materiales involucrados.

Es conveniente mencionar que no hemos encontrado una condición similar al ángulo de Brewster para ondas de polarización sagital.

2.3.2 Condición de reflectividad cero para una doble interface en el caso transversal

Además del ángulo de Brewster existe otra condición que también elimina los efectos de interferencia en la superred cerrando las bandas prohibidas. Esta segunda condición toma en cuenta los parámetros estructurales de la superred, es decir, las anchuras de las capas.

La onda incide oblicuamente desde un medio semiinfinito A y se transmite a un medio semiinfinito C , a través de una capa de material B y espesor d . La amplitud de la onda reflejada tiene la siguiente expresión:

$$r = \frac{r_{ab} + r_{bc} \exp(2ik_{bz}d)}{1 + r_{ab}r_{bc} \exp(2ik_{bz}d)}. \quad (2.14)$$

En esta ecuación k_{bz} es la componente perpendicular del vector de onda en la capa B , mientras que r_{ab} y r_{bc} tienen la forma

$$r_{\alpha\beta} = \frac{\rho_{\alpha a} c_{t\alpha}^2 k_{\alpha z} - \rho_{\beta a} c_{t\beta}^2 k_{\beta z}}{\rho_{\alpha a} c_{t\alpha}^2 k_{\alpha z} + \rho_{\beta a} c_{t\beta}^2 k_{\beta z}} \quad (2.15)$$

La reflectividad toma valores máximos o mínimos dependiendo de los parámetros materiales, el grosor de la capa, el ángulo y frecuencia de la onda incidente. Para el caso simétrico ($\rho_c = \rho_a$ y $c_{tc} = c_{ta}$) el valor mínimo de la energía reflejada es cero cuando la frecuencia y el vector de onda satisfacen la relación $\omega_n = c_{tb} \sqrt{(n\pi/d)^2 + k_x^2}$, donde $n=1,2,3,\dots$. Este efecto resulta de la interferencia de las ondas dentro de la capa y es completamente similar al problema de la reflexión y transmisión de luz por una capa de dieléctrico. Así se espera que la condición de cero reflectividad para doble interface, como el caso de Brewster para una sola interface, también afecte las propiedades de la estructura de bandas de la superred.

2.3.3 Condición de reflectividad cero para una doble interface en el caso sagital

Si la onda incidente en el sistema definido en la sección anterior es transversal, pero con el vector de desplazamiento paralelo al plano de propagación, entonces ocurre conversión de modos. Por esta razón tendremos tanto ondas longitudinales como transversales en la reflexión y en la transmisión, cuyas amplitudes las representamos como A_t, A_l y C_t, C_l ; dentro de la capa tendremos 4 ondas de amplitudes B_{t+}, B_{t-}, B_{l+} y B_{l-} , en donde los índices significan transversal (t) y longitudinal (l), hacia la dirección positiva del eje z (+) y hacia la dirección negativa del eje z (-).

Aplicando la condición de frontera de continuidad de los desplazamientos en dirección x para la primera frontera obtenemos

$$(-A_o + A_t)\cos\beta_a + A_l\text{sen}\alpha_a + (B_{t+} - B_{t-})\cos\beta_b - (B_{l+} + B_{l-})\text{sen}\alpha_b = 0. \quad (2.16)$$

En esta ecuación A_o es la amplitud de la onda incidente; β_a es el ángulo de incidencia (y de reflexión) de la onda transversal en el material A y, β_b es el ángulo de transmisión de la onda transversal en el material B . La variable α_a corresponde al ángulo de reflexión de la onda longitudinal en el material A y, α_b es el ángulo de transmisión de la onda longitudinal

en el material B . Aplicando ahora la condición de frontera para la continuidad de los desplazamientos en el eje z obtenemos:

$$(A_o + A_t) \operatorname{sen} \beta_a - A_l \cos \alpha_a - (B_{t+} - B_{t-}) \operatorname{sen} \beta_b + (-B_{t+} + B_{t-}) \cos \alpha_b = 0 \quad (2.17)$$

Por su lado la condición de continuidad de las componentes normales del tensor de esfuerzos aplicada en la primera interface nos lleva a:

$$\begin{aligned} & \rho_a c_{at}^2 (\operatorname{sen}^2 \beta_a - \cos^2 \beta_a) (A_o + A_t) + \\ & \rho_a c_{at}^2 (c_{at} / c_{al}) 2 \operatorname{sen} \alpha_a \cos \alpha_a A_l + \\ & \rho_b c_{bt}^2 (c_{at} / c_{bl}) (\operatorname{sen}^2 \beta_b - \cos^2 \beta_b) (-B_{t+} - B_{t-}) + \\ & - \rho_b c_{bt}^2 (c_{at} / c_{bl}) 2 \operatorname{sen} \alpha_b \cos \alpha_{ba} (-B_{t+} + B_{t-}) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Y finalmente la continuidad de las componentes tangenciales del tensor de esfuerzos se expresa como:

$$\begin{aligned} & 2 \rho_a c_{at}^2 \operatorname{sen} \beta_a \cos \beta_a (A_o - A_t) + \\ & [\rho_a (c_{at}^2 - 2c_{at}^2) \operatorname{sen}^2 \alpha_a + \rho_a c_{at}^2 \cos^2 \alpha_a] (c_{at} / c_{al}) A_l + \\ & [2 \rho_b c_{bt}^2 (c_{at} / c_{bl}) \operatorname{sen} \beta_b \cos \beta_b] (-B_{t+} + B_{t-}) + \\ & [\rho_b (c_{bt}^2 - 2c_{bt}^2) \operatorname{sen}^2 \alpha_b + \rho_b c_{bt}^2 \cos^2 \alpha_b] (c_{at} / c_{bl}) (-B_{t+} - B_{t-}) = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

De igual manera obtenemos cuatro ecuaciones para la segunda interface:

$$\begin{aligned} & (-B_{t+} e^{ik_{bt}d} + B_{t-} e^{-ik_{bt}d}) \cos \beta_b + (B_{t+} e^{ik_{bt}d} + B_{t-} e^{-ik_{bt}d}) \operatorname{sen} \alpha_b + \\ & C_t e^{ik_{at}d} \cos \beta_a - C_l \operatorname{sen} \alpha_a e^{ik_{at}d} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & (B_{t+} e^{ik_{bt}d} + B_{t-} e^{-ik_{bt}d}) \operatorname{sen} \beta_b + (B_{t+} e^{ik_{bt}d} - B_{t-} e^{-ik_{bt}d}) \cos \alpha_b + \\ & - C_t e^{ik_{at}d} \operatorname{sen} \beta_a - C_l e^{ik_{at}d} \cos \alpha_a = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & \rho_b c_{bt}^2 (c_{at} / c_{bl}) (\operatorname{sen}^2 \beta_b - \cos^2 \beta_b) (e^{ik_{bt}d} B_{t+} + e^{-ik_{bt}d} B_{t-}) + \\ & \rho_b c_{bt}^2 (c_{at} / c_{bl}) 2 \operatorname{sen} \alpha_b \cos \alpha_{ba} (e^{ik_{bt}d} B_{t+} - e^{-ik_{bt}d} B_{t-}) - \\ & \rho_a c_{at}^2 (\operatorname{sen}^2 \beta_a - \cos^2 \beta_a) e^{ik_{at}d} C_t - \\ & \rho_a c_{at}^2 (c_{at} / c_{al}) 2 \operatorname{sen} \alpha_a \cos \alpha_a e^{ik_{at}d} C_l = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho_b c_{bt}^2 (c_{at}/c_{bt}) \text{sen}\beta_b \cos\beta_b (e^{ik_{bt}d} B_{t+} - e^{-ik_{bt}d} B_{t-}) + \\
& [\rho_b (c_{bt}^2 - 2c_{bt}^2) \text{sen}^2\alpha_b + \rho_b c_{bt}^2 \cos^2\alpha_b] (c_{at}/c_{bt}) (e^{ik_{bt}d} B_{t+} + e^{-ik_{bt}d} B_{t-}) - \\
& 2\rho_a c_{at}^2 \text{sen}\beta_a \cos\beta_a e^{ik_{at}d} C_t - \\
& [\rho_a (c_{at}^2 - 2c_{at}^2) \text{sen}^2\alpha_a + \rho_a c_{at}^2 \cos^2\alpha_a] (c_{at}/c_{at}) e^{ik_{at}d} C_t = 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Estamos interesados en conocer bajo qué condiciones es posible obtener un cero de energía reflejada. Podemos comenzar por limitarnos a ondas transversales que incidan a un ángulo β_a mayor que el ángulo crítico β_c $[\beta_c = \sin^{-1}(c_{at}/c_{al})]$ en que las ondas longitudinales dejan de propagarse. Con la onda longitudinal reflejada evanescente y la onda transversal reflejada minimizada, lograremos un máximo de energía transmitida.

Este sistema de 8 ecuaciones normalizadas con A_o se escribe en forma matricial $Ax = B$, cuya solución se obtiene evidentemente de forma numérica.

2.3.4 Ejemplos de cierres de bandas prohibidas

La Fig. 2-6 presenta las bandas transversales correspondientes a una superred de germanio y plomo (Ge/Pb). La recta L_{aB} representa todos los pares (k_x, ω) que satisfacen la condición de Brewster [ec. (2.11)]. Las dos curvas en línea continua resultan de la condición de reflectividad cero de una onda incidente sobre una capa de Ge de grosor d rodeada de Pb (los parámetros materiales pueden consultarse en la Tabla 2.A). Con $k_x = 0$ estas curvas tienen los valores de frecuencias $\omega_n = \pi c_{Ge} n/d$. En unidades normalizadas ω_1 y ω_2 toman los valores numéricos 9.96 y 19.91. También estamos graficando las líneas de sonido L_{Ge} y L_{Pb} .

La Fig. 2-6 muestra que los cierres de bandas prohibidas se explican claramente por las condiciones de reflexión cero de una y doble interface. Se observa además que es posible obtener dos o más cierres en la misma banda prohibida.

Este ejemplo fue escogido por presentar cierres de bandas originados tanto por la condición de Brewster como de doble interface. Sin embargo, puede presentarse una sola de estas condiciones o ninguna, dependiendo de los parámetros materiales y estructurales del sistema, así como del rango de frecuencias de interés.

El efecto de cierres de bandas prohibidas de tipo sagital se muestra en la Fig. 2-7. La superred está constituida por capas alternadas de polietileno y resina de epoxi con $a=2d$. Las curvas discontinuas sobrepuestas corresponden a los valores (k_x, ω) que anulan la energía reflejada en el sistema *polietileno/epoxi/polietileno* lo cual explica que toda la energía se propague a través de la superred (no hay efectos de interferencia que den lugar a bandas prohibidas).

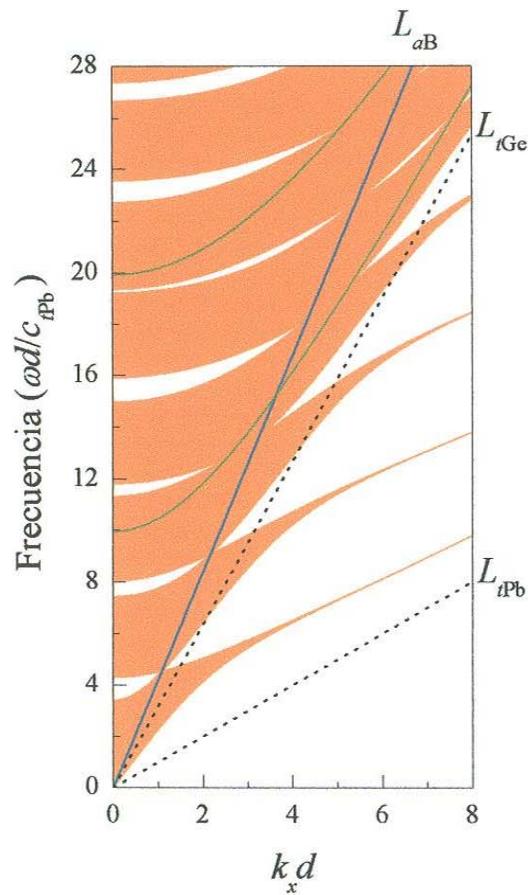


Figura 2-6 Estructura de bandas elásticas transversales de una superred Pb/Ge, con $a=1.5d$. Para el cálculo de estas bandas se requirió una base de 441 ondas.

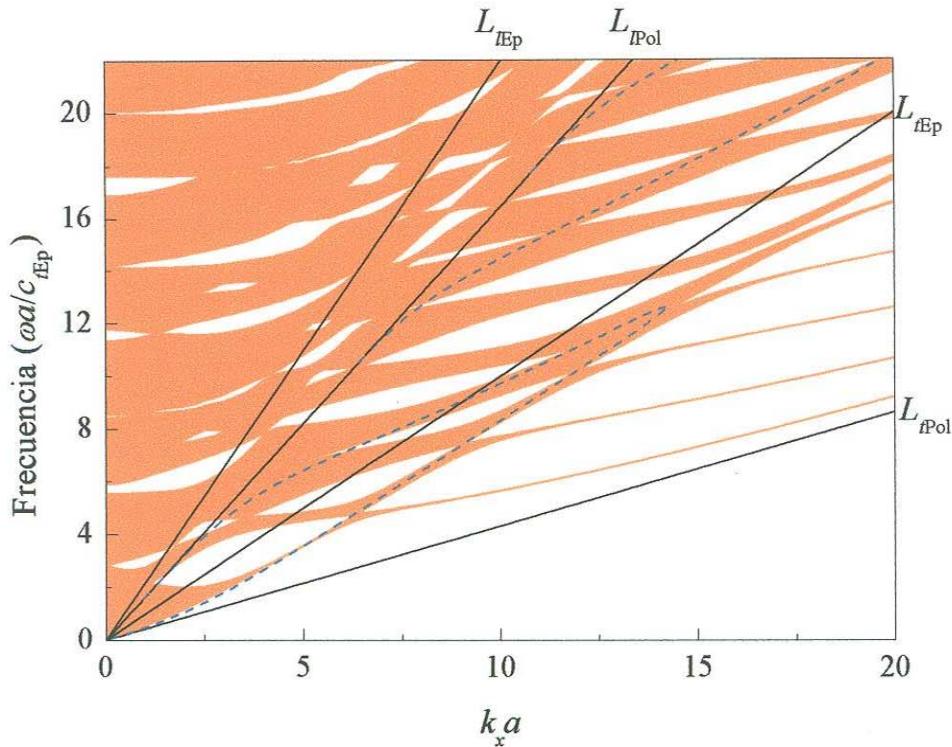


Figura 2-7 Bandas de volumen para una superred Epoxi/Polietileno con $a=2d$; superpuestas las líneas discontinuas representan los máximos de transmisión a través de una capa de polietileno rodeada de epoxi.

Es importante mencionar que esta aproximación es más válida para vectores de onda más alejados hacia la derecha de la línea de sonido L_{IPol} . Esto se debe a que cerca de esta línea las ondas longitudinales en el polietileno decaen muy lentamente; por consecuencia no sería adecuada la interpretación de las características de las bandas de la superred con fenómenos de doble interface.

2.3.5 Comportamiento asintótico de las bandas transversales

En las gráficas de proyección de bandas que hemos presentado notamos que para k_x grande las bandas permitidas se estrechan a una recta con pendiente paralela a la línea de sonido más baja del sistema. Probaremos ahora que estas bandas convergen precisamente a la curva de dispersión de las ondas guiadas por una capa del material B de anchura d rodeada por dos medios semiinfinitos A , siendo A y B materiales de la superred tales que $c_{IA} > c_{IB}$.

Ubiquemos el origen $z=0$ en la interface izquierda del sistema antes descrito. Sean entonces

$$u_1 = A_1 \exp(ik_x x + k_a z), \quad (2.24)$$

$$u_2 = B_+ \exp(ik_x x + ik_b z) + B_- \exp(ik_x x - ik_b z), \quad (2.25)$$

$$u_3 = A_3 \exp(ik_x x - k_a z), \quad (2.26)$$

las amplitudes del desplazamiento elástico en $z < 0$, $0 < z < d$ y $z > d$, respectivamente. En estas ecuaciones k_i ($i = a, b$) es el vector de onda en dirección del eje z para A y B , cuyos valores son $k_a = \sqrt{k_x^2 - \omega^2 / c_{ta}^2}$ y $k_b = \sqrt{\omega^2 / c_{tb}^2 - k_x^2}$. En la región de interés k_a y k_b son números reales.

Después de aplicar la condición de continuidad de la amplitud en las dos interfaces obtenemos:

$$A_1 = B_+ + B_-, \quad (2.27)$$

$$B_+ \exp(ik_b d) + B_- \exp(-ik_b d) = A_3 \exp(-k_a d). \quad (2.28)$$

Aplicando la condición de continuidad de la componente tangencial del tensor de esfuerzos σ_{yz} en $z = 0$ y $z = d$:

$$\rho_a c_{at}^2 k_a A_1 = i \rho_b c_{bt}^2 k_b (B_+ - B_-), \quad (2.29)$$

$$i \rho_b c_{bt}^2 k_b [B_+ \exp(ik_b d) - B_- \exp(-ik_b d)] = -\rho_a c_{at}^2 k_a A_3 \exp(-k_a d). \quad (2.30)$$

Directamente de las ecuaciones 2.27-2.30 obtenemos que la condición de guía en el sistema es

$$\tan k_b d = \frac{2\beta_a \beta_b}{\beta_b^2 - \beta_a^2}. \quad (2.31)$$

donde $\beta_a = \rho_a c_{ta}^2 k_a$ y $\beta_b = \rho_b c_{tb}^2 k_b$.

Dado que la tangente es una función periódica, la ec. (2.31) nos da un número infinito de ramas para los modos guiados, dadas por la siguiente expresión:

$$k_b d = \arctan\left(\frac{2\beta_a \beta_b}{\beta_b^2 - \beta_a^2}\right) + n\pi, \quad (2.32)$$

donde n es un entero.

En la Fig. 2-8 estamos superponiendo las soluciones de onda guiada del sistema Ge/Pb/Ge a la estructura de bandas de la superred Pb/Ge, ambas estructuras con la misma anchura para la capa Pb. Resulta claro de la figura que para valores grandes del vector de onda las bandas tienden a los modos asociados a la guía. Conforme el vector de onda aumenta esta correspondencia mejora y las bandas se estrechan aproximándose a la curva

de dispersión para la guía. Entonces las bandas en el límite de k_x grande resultan del acoplamiento de un número infinito de guías de onda.

En la Fig. 2-9 presentamos el perfil de onda para el modo de volumen señalado con una cruz en la Fig. 2-8 perteneciente a la segunda banda. El perfil muestra claramente que la onda oscila solo en las capas de Pb.

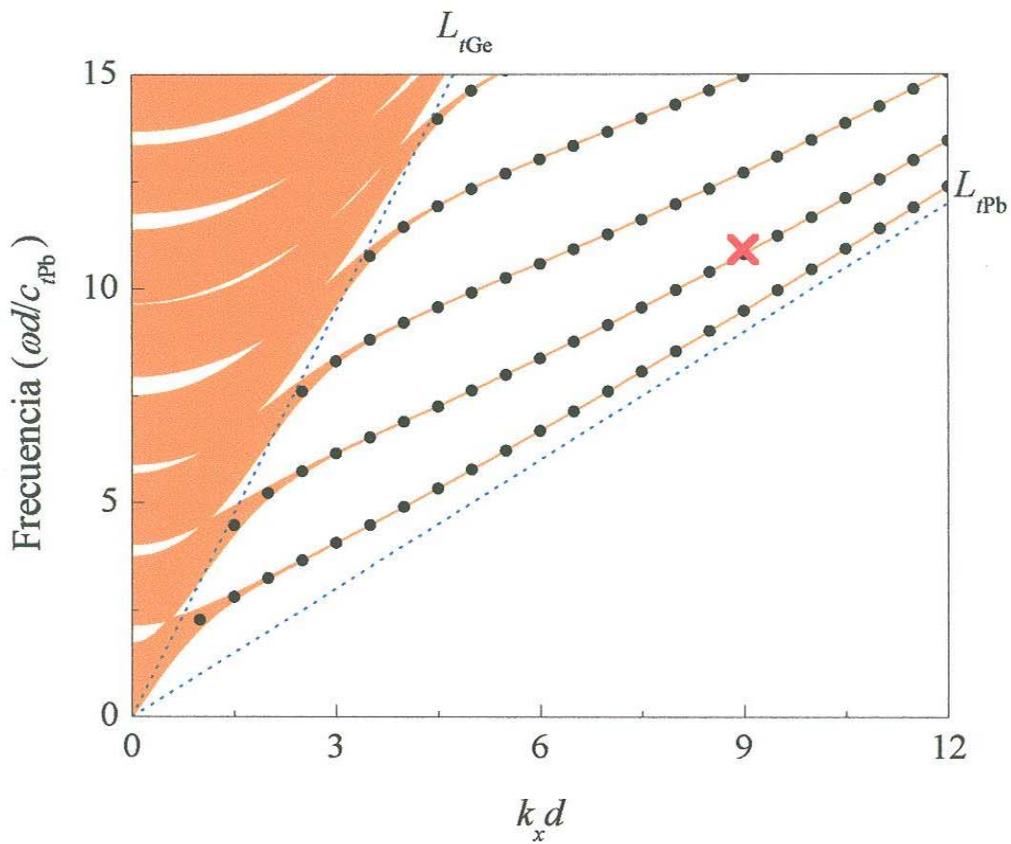


Figura 2-8 Estructura de bandas para el sistema Pb/Ge con $a = 1.5 d$. Los puntos representan la relación de dispersión para los modos guiados de sistema Ge/Pb/Ge.

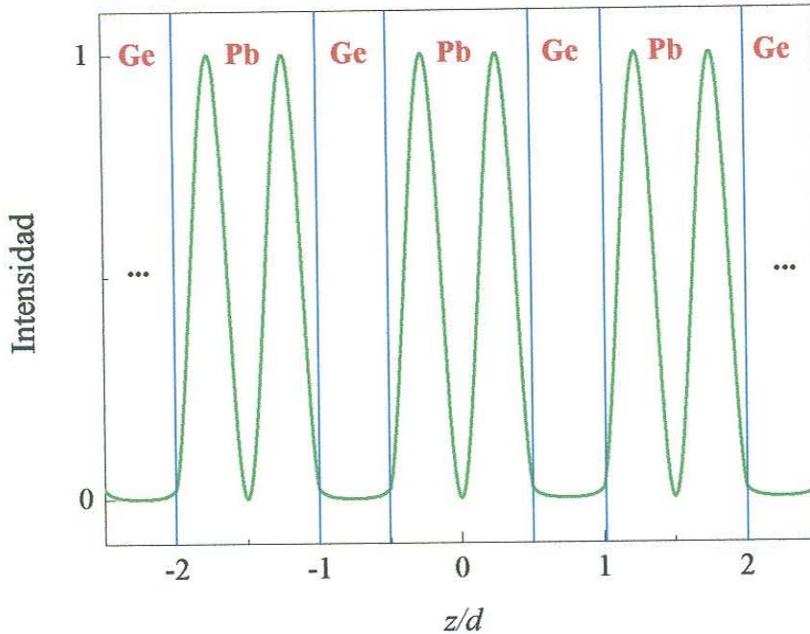


Figura 2-9 Intensidad $|u_y|^2$ de la onda transversal señalada en la Fig. 2-8, ubicado en $(k_x d, \omega d / c_{tpb}) = (9, 10.8)$.

2.3.6 Comportamiento asintótico de las bandas sagitales

Tal como el problema de la guía de onda transversal sirve como herramienta de interpretación para las bandas de volumen transversales, el problema de la guía de ondas sagitales sirve para interpretar el comportamiento asintótico de las bandas de volumen sagital. Esto lo mostramos en la Fig. 2-10. Son las bandas sagitales de una superred epoxi/polietileno y las curvas de dispersión de la guía epoxi/polietileno/epoxi.

La física es equivalente al problema de las ondas transversales discutida en la sección anterior, nada más que en este caso se manejan cuatro velocidades de sonido diferentes lo cual hace más complicada la aplicación de las condiciones en la frontera para obtener los modos guiados. Los detalles de cálculo no los damos aquí pues son similares a los expuestos en secciones anteriores.

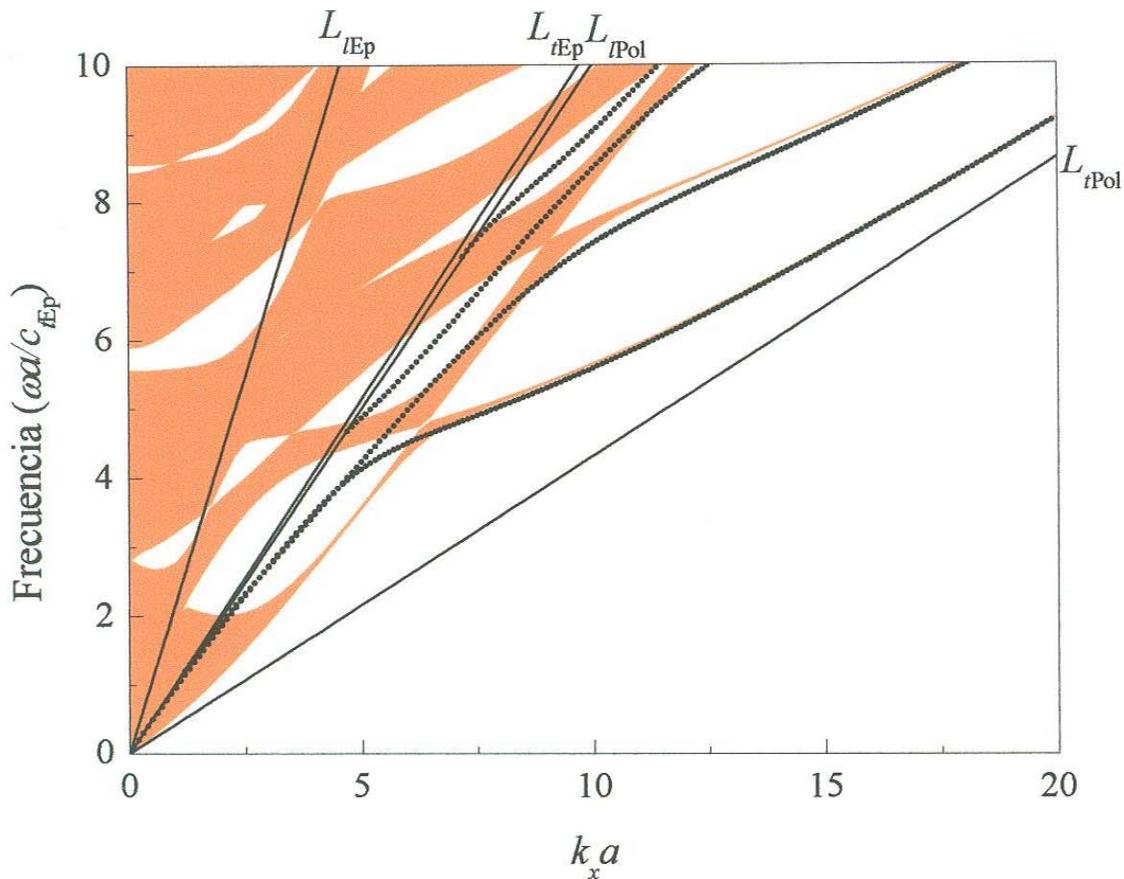


Figura 2.10 Correspondencia de la relación de dispersión de los modos guiados con la estructura de bandas sagital. En sombreado: bandas de volumen para un sistema Ep/Pol con $a=2d$. Las líneas punteadas representan la relación de dispersión para una guía de ondas de polietileno rodeado de epoxi.

2.3.7 Convergencia de las bandas sagitales a los modos de interface tipo Stoneley

El modo guiado tipo Stoneley existe en la interface A/B de dos materiales sólidos homogéneos. Su amplitud decae al penetrar al interior de ambos medios y posee una velocidad de fase ($v_f = \omega / k_x$) menor que las velocidades de sonido de los materiales A y B y por tanto su relación de dispersión está ubicada por debajo de las cuatro líneas de sonido L_{tA} , L_{lA} , L_{tB} y L_{lB} . El desplazamiento elástico de estos modos tiene amplitudes de la forma:

$$\begin{aligned}
 u_{1t} &= A_1 \exp[i(k_x x + \omega t)] \exp(\chi_{At} z), \\
 u_{1l} &= B_1 \exp[i(k_x x + \omega t)] \exp(\chi_{Al} z), \\
 u_{2t} &= A_2 \exp[i(k_x x + \omega t)] \exp(-\chi_{Bt} z), \\
 u_{2l} &= B_2 \exp[i(k_x x + \omega t)] \exp(-\chi_{Bl} z).
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Al aplicar las condiciones en la frontera en la interface obtenemos un conjunto de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas el cual se resuelve de forma numérica.

Podemos decir que los modos Stoneley resultan del acoplamiento de dos ondas tipo Rayleigh, una a cada lado de la interface. Un modo Rayleigh es una onda de superficie que existe en la frontera de un medio homogéneo semiinfinito con el vacío. Su velocidad de fase v_R es una constante de valor menor que las velocidades de sonido transversal y longitudinal del medio. Para que dos ondas tipo Rayleigh se acoplen para conformar una onda tipo Stoneley es necesario que las dos velocidades v_R de cada material se encuentren por debajo de las cuatro líneas de sonido del sistema. Esta condición se cumple cuando las velocidades de sonido de los materiales constituyentes no son demasiado contrastantes.

El punto importante y por lo cual presentamos aquí este tipo de modos es que hemos encontrado situaciones en las cuales las bandas proyectadas convergen a su curva de dispersión, como lo muestra la Fig. 2-11(a). Se trata de bandas de volumen para una superred Al/Cu y modos Stoneley de la interface Al/Cu. En el panel (b) de la figura tenemos el perfil de decaimiento de cada una de las amplitudes en el modo Stoneley en $k_x a = 6$ y $\omega a / c_{Al} = 5.506$. La amplitud de cada una de las componentes está normalizada a la unidad. El decaimiento para la componente transversal en el cobre está dada por $\exp(-\chi_{Cu} z)$. La distancia de decaimiento está graficada en unidades de d . Puede observarse que las amplitudes que decaen más fuertemente son aquellas correspondientes a velocidades de sonido más altas.

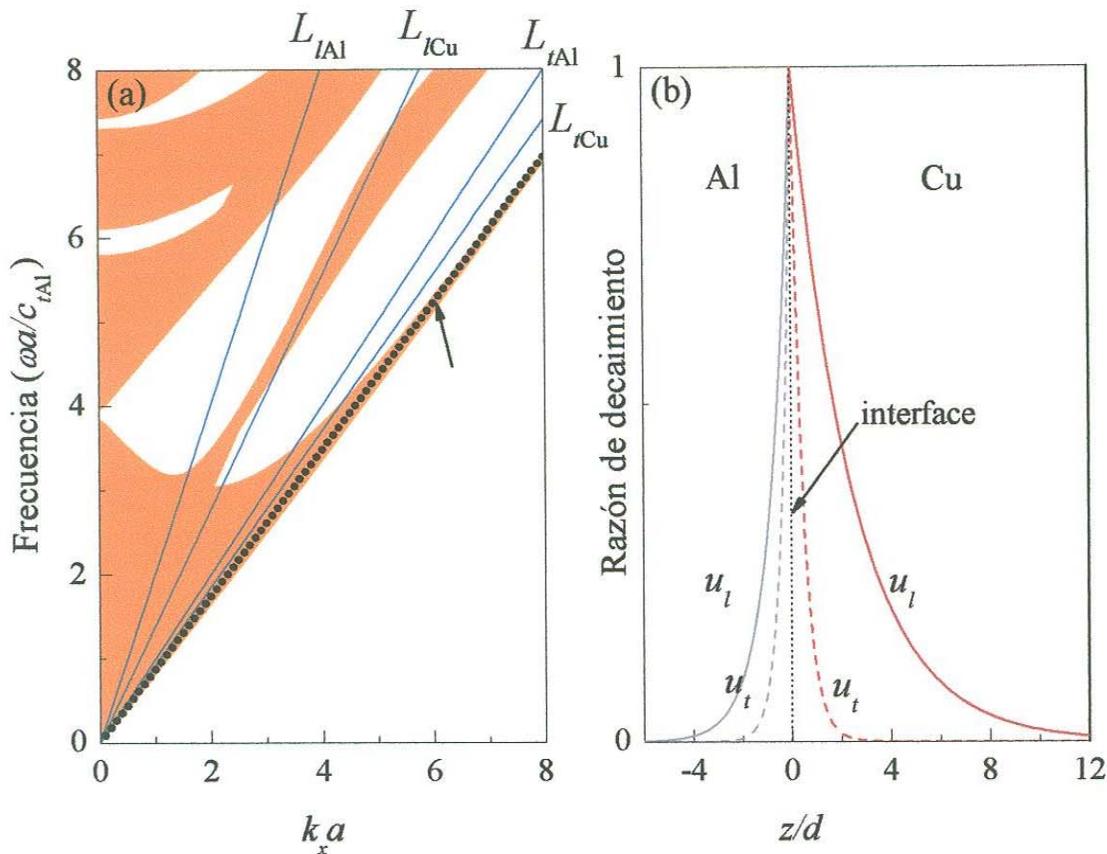


Figura 2-11 Relación del modo Stoneley con la estructura de bandas. (a) Sombreado: Bandas de volumen correspondientes a una superred Al/Cu con $a=2d$. Línea de puntos: relación de dispersión para los modos tipo Stoneley en una interface Al/Cu. (b) Decaimiento de las componentes longitudinales (u_l) y transversales (u_t) en el modo Stoneley señalado en el panel izquierdo, correspondientes a $k_x a=6$ y $\omega a/c_{tAl}=5.506$.

2.4 Conclusiones

Hemos calculado la estructura de bandas elásticas en una superred utilizando el Método de Expansión en Ondas Planas obteniendo tanto las curvas de dispersión $\omega(\vec{k})$ como los perfiles de desplazamiento elástico de los modos de vibración.

Explicamos la naturaleza de los cierres de bandas prohibidas en términos del ángulo de Brewster elástico para polarización transversal y de reflexión minimizada por una capa tanto para ondas transversales como sagitales. Ambas condiciones son incompatibles con la existencia de bandas prohibidas pues eliminan los efectos de interferencia en la superred.

El comportamiento asintótico de las bandas de volumen para k_x grande puede ser interpretado en términos de una tendencia del medio a comportarse como un conjunto de guías de ondas acopladas. Hemos demostrado que dichas bandas convergen a las curvas de

dispersión de una guía de ondas $A/B/A$, donde A y B son los materiales de la superred tales que $c_A > c_B$. En el caso de las bandas sagitales, cuando los materiales de la superred (velocidades de sonido y densidad) son poco contrastantes, la primera banda tiende a la curva de dispersión de los modos Stoneley correspondiente a una interface A/B de los materiales que constituyen la superred.

Capítulo 3

Transmisión de ondas acústicas en superredes finitas

Una estructura de bandas está asociada a sistemas periódicos infinitos. Entonces se espera que la transmisión de ondas a través de multicapas finitas sea consistente con las bandas cuando el número de capas es suficientemente grande. En este Capítulo presentamos los espectros de transmisión acústica a través de sistemas finitos. Como es esperado hay transmisión significativa sólo cuando la frecuencia y el vector de onda de la onda incidente caen dentro de alguna banda permitida. Estudiamos la transmisión en función del contraste de impedancias entre el medio externo y la multicapa. Como ejemplo se discuten soluciones para una multicapa Al/W con medios externos fluidos como Hg, agua o aire. Se estudia también el caso de un sólido como medio de incidencia.

Hemos mencionado que existen varios métodos para el cálculo de las bandas acústicas en CF's. Algunos de esos métodos se han adaptado para estudiar los espectros de transmisión en sistemas finitos. Por ejemplo, el método de la matriz de transferencia permite el cálculo del espectro de transmisión, mientras que en conjunto con el teorema de Bloch es útil para el cálculo de las bandas de energía. [23,31] El método de las funciones de Green, inicialmente utilizado en la obtención de relaciones de dispersión en cristales naturales, cristales fotónicos y en problemas del estado sólido, es útil también para calcular tanto la transmisión como la estructura de bandas asociados a un sistema acústico periódico [20,32].

Para calcular la transmisión de ondas a través de sistemas multicapas nosotros aplicamos directamente las condiciones en la frontera en las interfaces entre las capas que forman la superred y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante. No haremos alusión a ningún método en particular.

3.1 Transmisión acústica a través de interfaces

Resolvemos el problema de la transmisión de ondas a través de multicapas utilizando las condiciones en la frontera: continuidad de las componentes normales y tangenciales del desplazamiento elástico y del tensor de esfuerzos en cada interface.

Con la finalidad de explicar nuestra forma de proceder presentamos el caso de una interface fluido-sólido inicialmente con la onda incidiendo desde el medio fluido [Fig. 3-1(a)]. La onda reflejada (u_r^l) es de tipo longitudinal, y en la transmisión al medio sólido tenemos ondas tanto de tipo longitudinal (u_t^l), como transversal (u_t^t). La aplicación de las condiciones de frontera (ver Tabla 1.A) nos lleva a las siguientes expresiones:

$$(u_i^l - u_r^l) \cos \alpha_o = -u_t^l \sin \beta_t + u_t^t \cos \beta_t, \quad (3.1)$$

$$\rho_t c_{tt} (u_i^l + u_r^l) = -\rho_t c_{tt} u_t^l \sin(2\beta_t) + \left(\rho_t c_{tt} - 2\rho_t \frac{c_{tt}^2}{c_{tt}} \sin^2 \beta_t \right) u_t^t, \quad (3.2)$$

$$u_t^l \cos(2\beta_t) + \frac{c_{tt}}{c_{tt}} u_t^t \sin(2\beta_t) = 0. \quad (3.3)$$

Son tres ecuaciones con tres incógnitas (normalizadas a la onda incidente u_i^l). Con las soluciones obtenidas y haciendo uso del vector de Poynting acústico [ec. (1.10)] es posible obtener el flujo de energía reflejada y transmitida través de la interface.

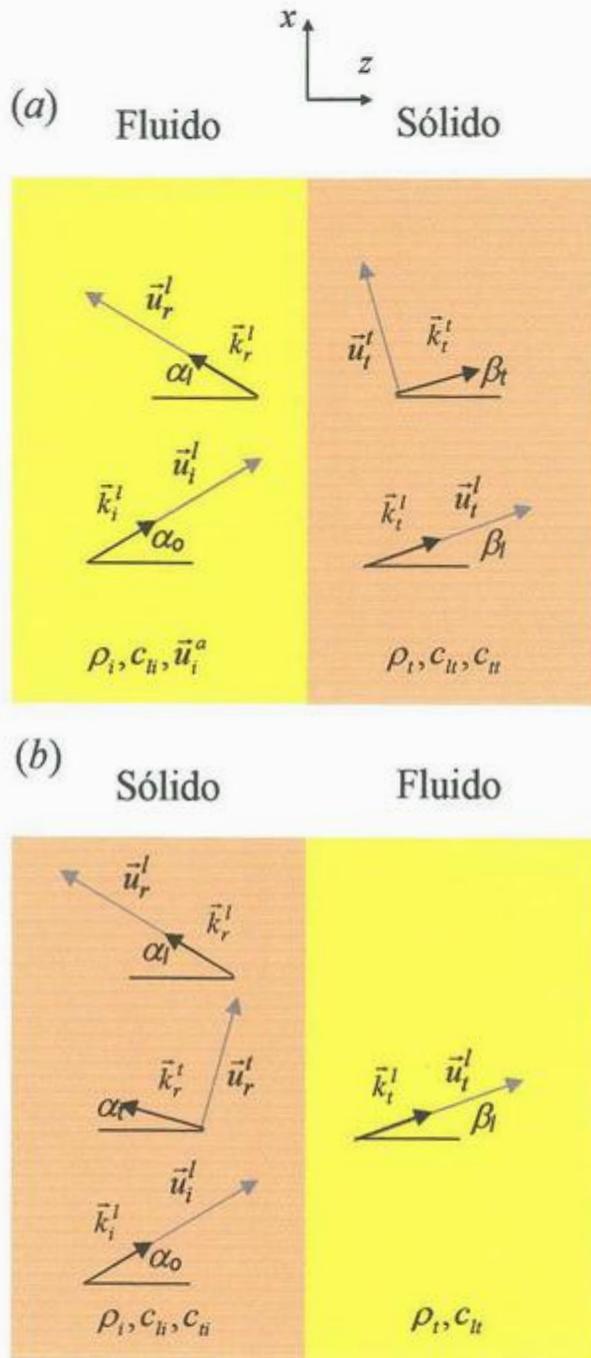


Figura 3-1. Las variables y parámetros involucrados en el cálculo de ondas reflejadas y transmitidas en la interface fluido-sólido.

Ahora consideramos que la onda longitudinal incide desde el medio sólido [ver Fig.3-1(b)]; las ecuaciones correspondientes son:

$$u_i^l \cos \alpha_o + u_r^l \operatorname{sen} \alpha_t - u_r^l \cos \alpha_t = u_t^l \cos \beta_t, \quad (3.4)$$

$$\left(\rho_i c_{li} - 2\rho_i \frac{c_{li}^2}{c_{li}} \operatorname{sen}^2 \alpha_o \right) u_i^l - \rho_i c_{li} \operatorname{sen}(2\alpha_t) u_r^l + \left(\rho_i c_{li} - 2\rho_i \frac{c_{li}^2}{c_{li}} \operatorname{sen} \alpha_t \right) u_r^l = \rho_i c_{li} u_t^l, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha_o) u_i^l - \frac{c_{li}}{c_{li}} \cos(2\alpha_t) u_r^l - \operatorname{sen}(2\alpha_t) u_r^l = 0. \quad (3.6)$$

Pueden plantearse también ecuaciones de este tipo para ondas transversales o longitudinales en el plano sagital incidiendo en la interface plana sólido-sólido. La Tabla 1.A muestra que en esta caso las condiciones en la frontera nos conducen a un sistema de cuatro ecuaciones acopladas.

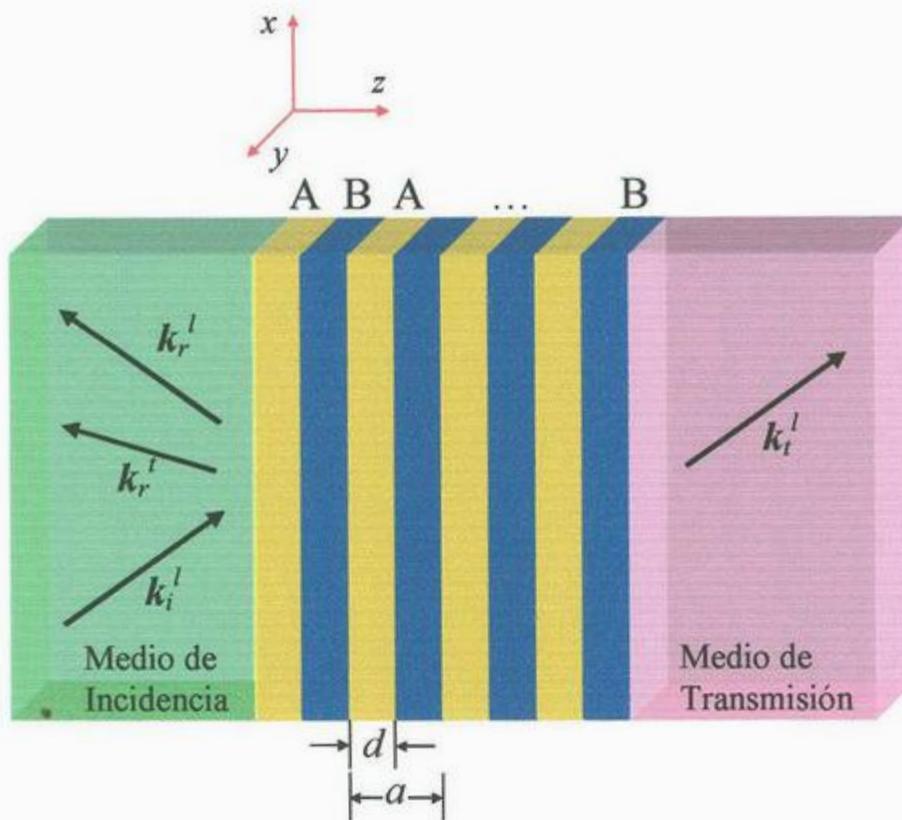


Figura 3-2. Multicapa finita limitada por los medios de incidencia y transmisión con una onda longitudinal incidente. Una parte de la energía acústica es transmitida a través de la multicapa. La onda reflejada longitudinal comparte la energía total reflejada con una onda transversal sólo cuando el medio de incidencia es un sólido. La anchura de la multicapa es $L_s = na$ donde n es un número entero.

En estructuras de más de una interface (ver Fig. 3-2) la amplitud de la onda en interfaces subsecuentes cambia sólo en fase. Las condiciones de frontera nos permiten ligar la onda longitudinal incidente con la onda transmitida. Por ejemplo, para la estructura *fluido-ABAB...AB-fluido* (un conjunto de n celdas completas limitadas por dos medios fluidos), la trasmisión se calcula para un sistema de $8n+2$ ecuaciones. Similarmente, para la estructura *sólido-ABAB...AB-fluido*, se requiere un total de $8n+3$ ecuaciones. Estas ecuaciones se ven de la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, donde \mathbf{x} es una matriz columna que contiene las amplitudes de las ondas involucradas en el problema.

3.2 Relación entre espectro de transmisión y estructura de bandas

Ahora presentamos dos resultados numéricos. Utilizamos como sistema una multicapa de 6 celdas unitarias del mismo tipo de la superred Al/W manejada en la Secc. 2.2. En un caso el medio de incidencia es mercurio y en otro caso tungsteno; para ambos el medio de transmisión es mercurio. Los parámetros del Hg son: $\rho = 13.6 \text{ gr/cm}^3$ y $c_l = 1.45 \times 10^5 \text{ cm/s}$.

En la Fig. 3-3 mostramos la transmitividad obtenida para el sistema *Hg-multicapa-Hg* cuando una onda longitudinal incide normalmente. Al comparar con la estructura de bandas observamos claramente que la transmisión se anula en las regiones de frecuencias prohibidas. También notamos que sólo son excitadas las bandas de volumen de origen longitudinal. Esto se debe a que en incidencia normal sólo se pueden excitar ondas del mismo tipo que la onda incidente.

Esto último se concluye directamente al aplicar las condiciones a la frontera. Para ejemplificar la idea volvamos de momento al problema de la interface fluido-sólido (Ecs. 3.1-3.3); con $\alpha_o = 0^\circ$, $\beta_l = 0^\circ$ y $\beta_t = 0^\circ$, se obtiene que

$$u_i^l - u_r^l = u_t^l, \quad (3.7)$$

$$\rho_i c_u (u_i^l + u_r^l) = \rho_t c_u u_t^l, \quad (3.8)$$

$$u_t^t = 0. \quad (3.9)$$

Se tienen ondas longitudinales en la transmisión y la reflexión, sin embargo, las ondas transversales no se excitan (Ec. 3.10).

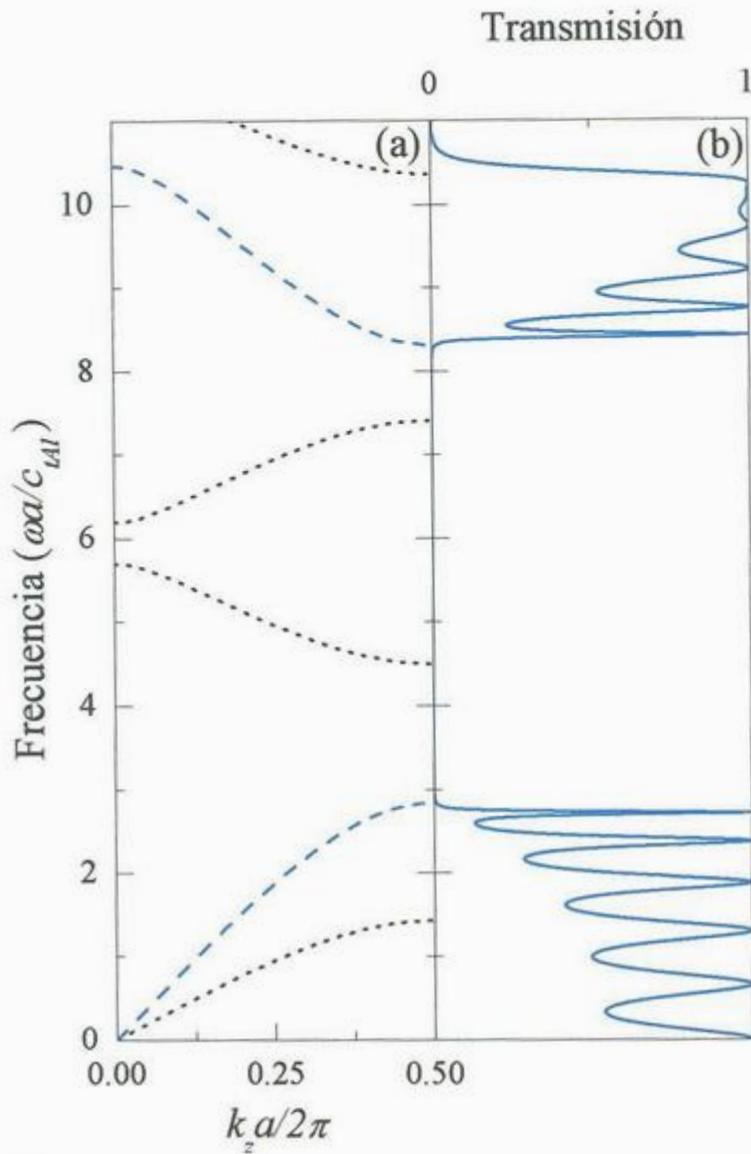


Figura 3-3 (a) Bandas de volumen sagitales para el sistema Al/W. Con línea a rayas (punteada) tenemos las bandas de origen longitudinal (transversal). (b) Transmisión para una onda longitudinal de incidencia normal sobre una multicapa de seis celdas unitarias. El medio de incidencia y transmisión es Hg.

Para ejemplificar el caso con incidencia oblicua requerimos definir el concepto de *línea de incidencia*. Supongamos una onda que incide desde un medio homogéneo con un vector de onda $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$, cuya magnitud se relaciona con la frecuencia como $k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, donde c es la velocidad de sonido en el medio de incidencia (longitudinal o transversal dependiendo del tipo de onda incidente). El ángulo de incidencia cumple

entonces la relación $\text{sen}\alpha_o = \frac{k_x}{\omega/c}$; de esto obtenemos $\frac{\omega}{k_x} = \frac{c}{\text{sen}\alpha_o}$. Entonces la relación

entre la frecuencia y el vector de onda se puede representar como una recta en el plano (k_x, ω) . Los modos excitados en una superred serán aquellos donde la línea de incidencia se superponga a las bandas de volumen.

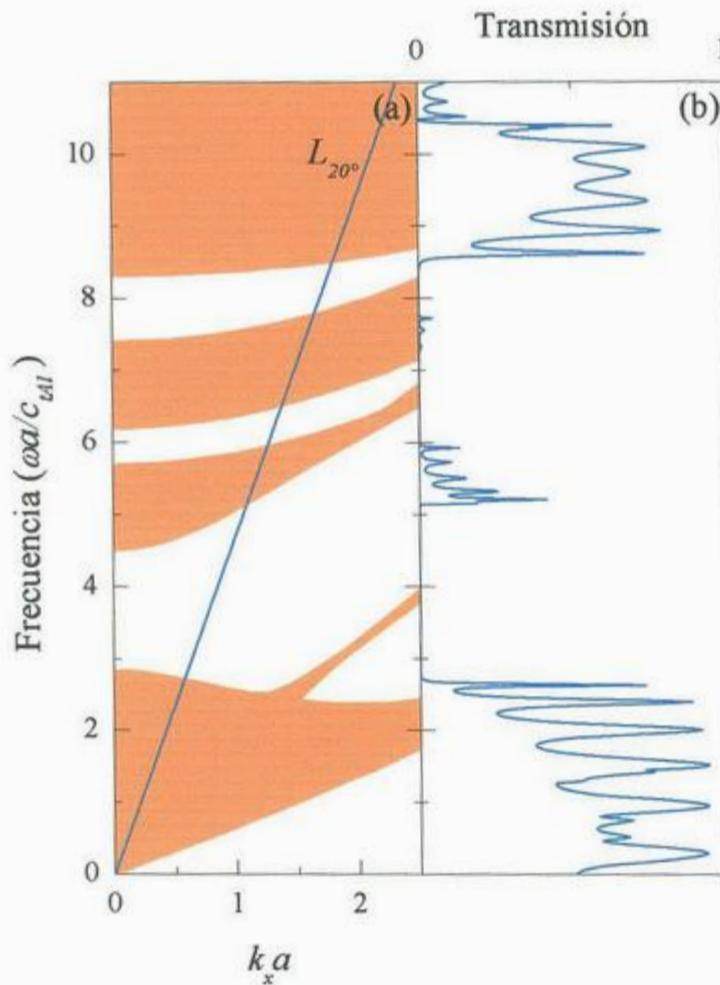


Figura 3-4 (a) Bandas de un sistema Al/W, la recta L_{20° es la línea de incidencia de una onda longitudinal incidiendo desde W a un ángulo de 20° . (b) Transmisión para una onda longitudinal incidente a 20° sobre una multicapa de seis celdas unitarias.

En la Fig. 3-4(a) presentamos las bandas de volumen de un sistema Al/W y sobre ella la línea de incidencia para la onda longitudinal a 20° con respecto al eje de la superred desde un substrato de tungsteno. La Fig. 3-4 (b) muestra el espectro de transmisión en el sistema W-multicapa-Hg para una onda longitudinal que tiene un ángulo de incidencia de 20° . De nueva cuenta las bandas definen las regiones de transmisión.

Como puede observarse, hay una mayor transmisión en aquellas bandas de origen longitudinal en $k_x = 0$ (la polarización de ondas a propagación normal puede verse en la Fig. 3-3). A lo largo de la línea de incidencia, la tercera y cuarta bandas presentan aun una naturaleza mayormente transversal lo que hace difícil su acoplamiento con una onda incidente de tipo longitudinal. Para k_x mayores (ángulos de incidencia mayores), donde la conversión de modos se intensifica y con ello el carácter sagital de la onda, se presentará una transmisión mayor en estas bandas.

3.3 Estructura del espectro de transmisión

Independientemente de la impedancia del medio externo, encontramos que siempre hay transmisión al menos para los valores discretos de frecuencia correspondientes a los modos normales de vibración del sistema finito. A continuación demostramos que una multicapa finita puede soportar modos normales sagitales con frecuencia ω_n correspondientes a superficies libres (interface con el vacío) los cuales definen en mucho las características del espectro de transmisión.

Consideremos una multicapa finita que se extiende desde $z = 0$ a $z = na + d$, donde n es un número entero y a es el ancho de la celda unitaria y d el grosor de una de las capas (ver Fig. 3-2). Dentro de cada capa tenemos las siguientes dos componentes de la deformación elástica:

$$u_x = A_{t+} \text{sen} \alpha_t \exp[i(k_x x + k_z z)] + A_{t-} \text{sen} \alpha_t \exp[i(k_x x - k_z z)] + A_{l+} \text{cos} \alpha_l \exp[i(k_x x + k_z z)] + A_{l-} \text{cos} \alpha_l \exp[i(k_x x - k_z z)], \quad (3.10)$$

$$u_x = A_{l+} \text{cos} \alpha_l \exp[i(k_x x + k_z z)] - A_{l-} \text{cos} \alpha_l \exp[i(k_x x - k_z z)] - A_{t+} \text{sen} \alpha_t \exp[i(k_x x + k_z z)] + A_{t-} \text{sen} \alpha_t \exp[i(k_x x - k_z z)]. \quad (3.11)$$

Estas expresiones representan ondas con componentes longitudinales y transversales propagándose en la dirección positiva y negativa del eje z . α_l y α_t son los ángulos de propagación de las componentes longitudinal y transversal, respectivamente (Ver. Fig. 3-2). [No hemos escrito el subíndice j en las variables y amplitudes para hacer referencia explícita a las capas j , con $j = 1, 2, \dots, 2n + 1$].

De la aplicación de las condiciones de frontera resultan cuatro ecuaciones por cada interface. Por otro lado, en las superficies de la multicapa [$z=0$ y $z=na+d$] la colindancia con el vacío hace que estas interfaces tengan condición de esfuerzo nulo. De este requerimiento resultan dos condiciones de frontera para cada interface. En términos de las componentes de la deformación estas se escriben como

$$2\rho c_i^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \rho(c_i^2 - 2c_i^2) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$\rho c_i^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.13)$$

La aplicación sistemática de las condiciones de frontera nos permite escribir dos ecuaciones para la primera interface vacío sólido, $8n$ ecuaciones para las $2n$ interfaces internas sólido-sólido y dos ecuaciones para cada última interface sólido-vacío. Un total de $4(2n+1)$ ecuaciones acopladas cuya solución serán los modos normales del sistema.

Es importante señalar que estos modos vibracionales pueden tener amplitud finita en las superficies libres de la multicapa y por tanto pueden acoplarse con ondas incidentes. Evidencia de tal acoplamiento se encuentra aun si tenemos un material sólido como sustrato. La transmisión que resulta del acoplamiento de los modos del sistema es del tipo Fabry-Perot[12].

En la Fig. 2-3 hemos presentado los modos vibracionales de una superred infinita Al/W. La forma del perfil de transmisión y su relación con los modos normales de la multicapa se presentan en la Fig. 3-5. Se trata de una multicapa de 10 celdas unitarias inmersas en diferentes fluidos.

Los modos de la multicapa se muestran en el panel (a) de esta figura, los cuales por supuesto caen dentro de una banda permitida. Los siguientes tres recuadros muestran el comportamiento de la intensidad de la onda transmitida en tres fluidos diferentes. Una transmisión finita para cualquier frecuencia de la banda ocurre cuando la muestra está sumergida en Hg, el fluido de impedancia más alta aquí considerado ($Z = 6.12 \times 10^5$ gr/cm²s). Con agua como medio circundante se observan una serie de *mini bandas* prohibidas, las ondas se propagan a través de la multicapa sólo para frecuencias dentro de

rangos angostos en la vecindad de cada ω_n . Finalmente, con aire ($Z = 43.3 \text{ gr/cm}^2\text{s}$) como medio externo se encuentra que la transmisión se da justamente en los modos de frecuencias normales ω_n .

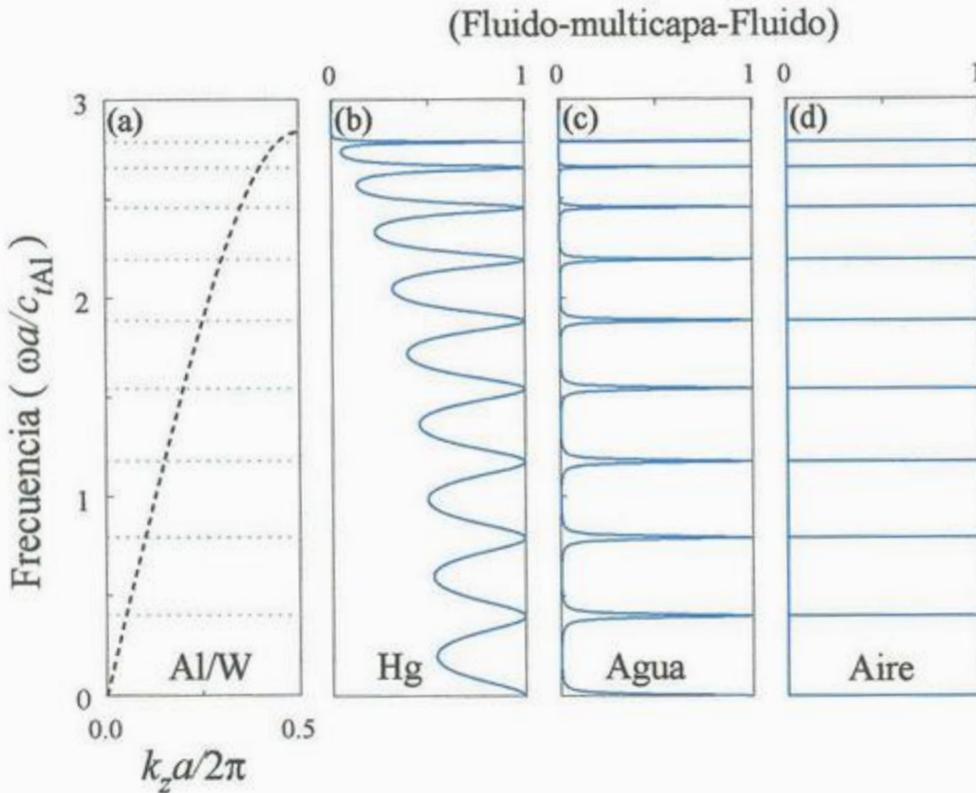


Figura 3-5 Dependencia del coeficiente de transmisión con el contraste de impedancias. La multicapa que consta de 10 celdas unitarias (20 capas) correspondientes a la superred Al/W rodeada de un medio fluido. El contraste de impedancias entre la superred y los tres medios Hg, agua y aire son 9.6, 39.2 y 1.36×10^5 , respectivamente. Una serie de 9 regiones prohibidas aparece en las gráficas para agua y aire.

De la Fig. 3-5 aprendemos que las bandas permitidas no tienen siempre asociada una transmisión finita. Bajo condiciones de alto contraste de impedancias ($\Delta Z > 10$) aparecen nuevas regiones de frecuencias prohibidas para la transmisión (entre más alto contraste de impedancias entre la superred y el medio externo, las ventanas de transmisión de ondas se hacen más y más angostas). Entonces una relación de dispersión continua (una banda) puede no corresponder al espectro de transmisión aún para muestras de tamaño razonable.

Por otro lado, hemos encontrado que todos los picos de transmisión están claramente relacionados a las frecuencias ω_n de los modos normales de la muestra. Los

modos se comportan como ondas estacionarias dando lugar a un efecto tipo Fabry-Perot en la multicapa permitiendo transmisión de ondas.

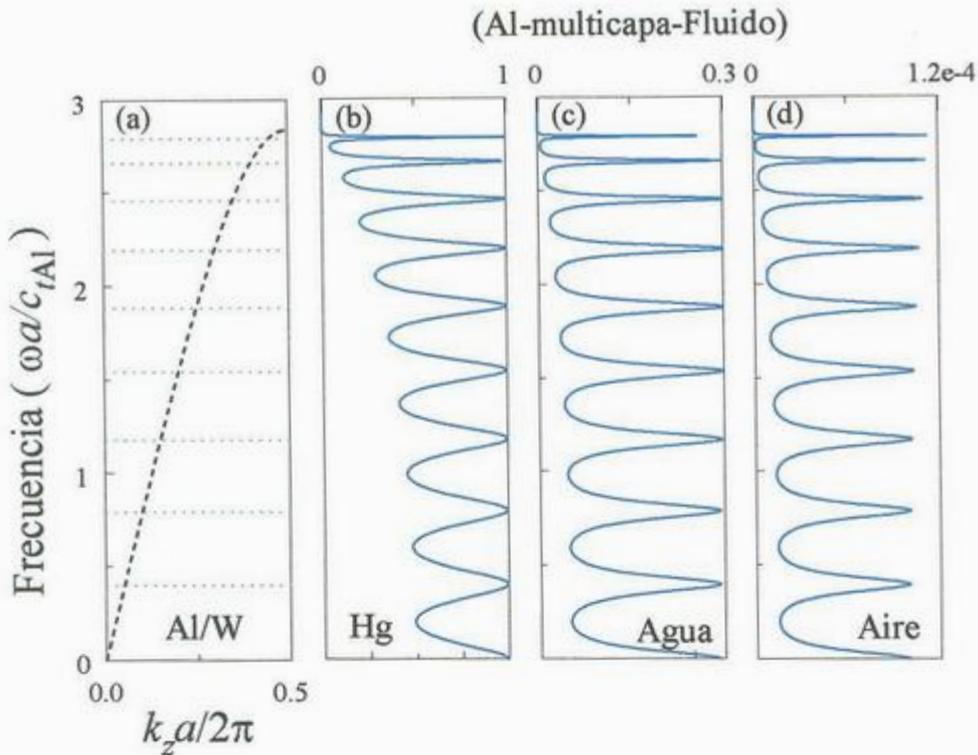


Figura 3-6 Lo mismo que la Fig. 3-5, pero dejando fluido solo como medio de transmisión. Las ondas ahora inciden de un substrato de Al. Los picos siguen coincidiendo con las frecuencias de los modos normales en la multicapa y su intensidad decae drásticamente para agua y aire.

Para incidencia normal la transmisión a través de la superred rodeada de un fluido (fluido-multicapa-fluido) tiene la particularidad de que sus picos alcanzan un máximo de $T = 1$ (ver Fig. 3-5). En general para las ondas con incidencia normal existe una función envolvente T que delimita la altura de los picos. Esta función tiene la forma $T = 4Z_i Z_t / (Z_i + Z_t)^2$, donde Z_i y Z_t son las impedancias del medio de incidencia y transmisión, respectivamente. Una evidencia de este límite para la altura de los picos se muestra en la Fig. 3-6, la cual corresponde al mismo sistema de la Fig. 3-5 pero sustituyendo el fluido del medio incidente por Al. Los picos ahora alcanzan los valores máximos $T = 1.0$, $T = 0.3$ y $T = 1.0 \times 10^{-4}$ cuando el medio de transmisión es Hg, agua y aire, respectivamente. Rigurosamente hablando, la condición $T = 1$ que permite la transmisión total en las frecuencias seleccionadas, corresponde a un resonador de Fabry-Perot. Otro efecto que puede observarse en la Fig. 3-6 es que las *mini bandas* prohibidas de

la transmisión desaparecen porque ahora la impedancia del medio externo se ha incrementado, sin embargo, la estructura general de la transmisión permanece.

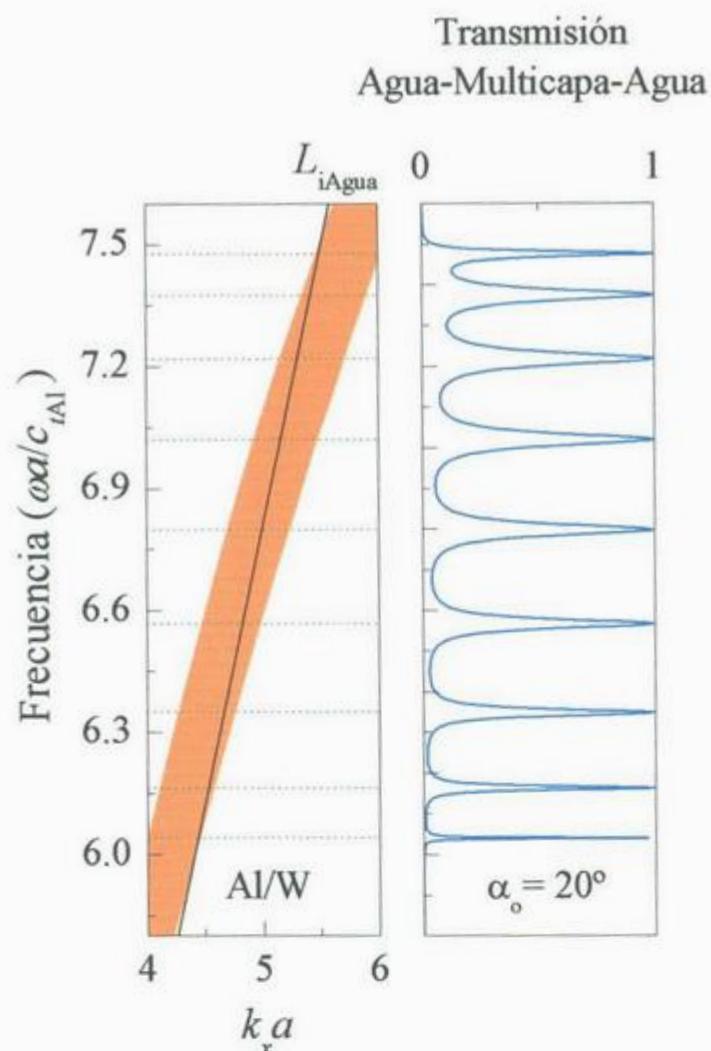


Figura 3-7 Máximos de transmisión para incidencia oblicua. (a) La región sombreada corresponde a parte de la segunda banda de volumen en la Fig. 2-4. La línea continua es la línea de incidencia para 20° y las líneas punteadas corresponden a las frecuencias para los modos normales de vibración en la superred de 10 celdas unitarias. (b) Las *mini bandas* prohibidas para la transmisión desaparecen [comparar con la Fig. 3-5(c) para incidencia normal] pero la posición de los picos continua coincidiendo con los modos normales de la multicapa finita.

Hemos estudiado también la transmisión de ondas longitudinales para incidencia oblicua. Ahora las ondas dentro de la superred tienen componente transversal y se espera que el espectro de transmisión tenga más estructura. La Fig. 3-7 muestra la transmisión de ondas incidentes en una multicapa Al/W desde agua con un ángulo de incidencia $\alpha_0 = 20^\circ$. Sobre el lado izquierdo de esta figura hemos superpuesto tres resultados: una sección de la segunda banda sagital (región sombreada) ya presentada en la Fig. 2-4; la línea de incidencia (línea continua) y las frecuencias ω_n (líneas punteadas horizontales)

correspondientes a los modos sagitales en la multicapa finita a lo largo de la dirección z . La multicapa consta de 10 celdas. En el lado derecho de la figura graficamos el espectro de transmisión correspondiente. Como puede observarse, las *mini bandas* prohibidas de transmisión prácticamente desaparecen. Esto se debe a la presencia de un nuevo canal para la transmisión de energía: la componente transversal dentro de la multicapa que es excitada por la onda incidente.

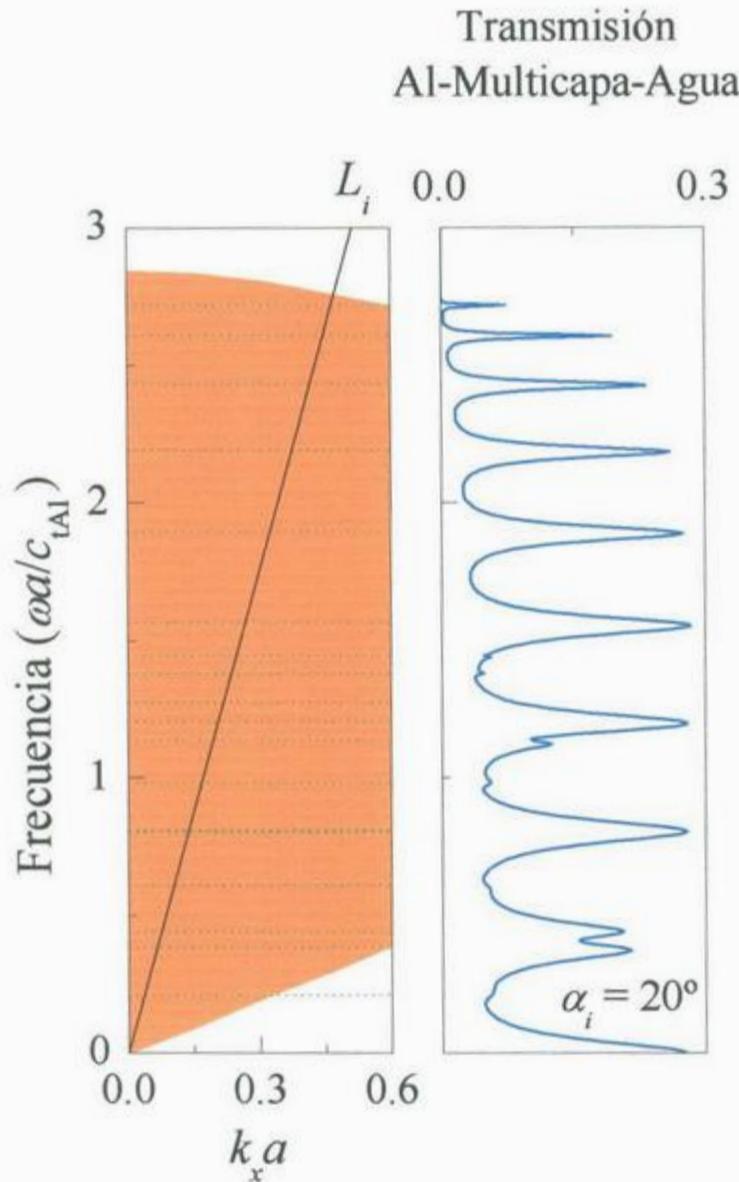


Figura 3-8 Excitación de modos transversales por una onda incidente de polarización oblicua con ángulo de incidencia $\alpha_o = 20^\circ$. Comparando con la Fig. 3-6 (c) para ondas normales, ahora el acoplamiento de la onda incidente y los modos transversales dentro de la capa finita modifica el perfil de transmisión.

Una componente de onda transversal lo suficientemente grande introduce estructura adicional al espectro de transmisión como muestra la Fig. 3-8. En el lado izquierdo de esta

figura se ha graficado en un rango corto del vector de onda la primera banda sagital de la Fig. 2-4(d). Estas bandas resultan del traslape de dos bandas componentes. En $k_x = 0$, la primera se ubica en el rango $0 \leq \omega a / c_{Al} < 2.82$ y tiene polarización longitudinal mientras que la segunda, una banda transversal, se extiende desde 0 hasta $\omega a / c_{Al} = 1.5$. Cuando k_x se incrementa las dos bandas pierden su polarización longitudinal y transversal específica. Sin embargo, es posible seguirlas conforme k_x se incrementa porque tal pérdida de polarización es gradual. La curva discontinua representa la parte superior de la banda originalmente transversal. En la figura también identificamos las frecuencias de los modos normales en una muestra de 10 celdas, con Al como medio incidente y un ángulo de incidencia $\alpha_o = 20^\circ$. Como ocurre en los sistemas que acabamos de discutir, los modos sagitales (definidos por los puntos de cruces de las líneas punteadas horizontales y la línea sólida $L_{|Al}$) preservan la naturaleza inicial de la banda en la que se ubican y definen la posición de los máximos. Comparando con la Fig. 3-6 se encuentra que el coeficiente de transmisión tiene estructura adicional en la región de bajas frecuencias. La incidencia oblicua a $\alpha_o = 20^\circ$ excita las componentes transversales dentro de la muestra y esto resulta relevante en la transmitividad.

3.4 Conclusiones

Se han presentado varios espectros de transmisión de ondas acústica en multicapas finitas. Se introdujo el concepto de línea de incidencia que en conjunto con la estructura de bandas define las parejas (\vec{k}, ω) para las cuales obtendremos transmisión apreciable. Por otra parte, para frecuencias dentro de las bandas permitidas, se pueden presentar *mini-bandas* prohibidas en la transmisión. Cuando las ondas inciden desde un substrato, los máximos de intensidad están limitados por la transmisión correspondiente a una interface entre el medio de incidencia y el fluido de transmisión. Las frecuencias de cada uno de los picos de transmisión corresponden a los modos normales de vibración calculada para la multicapa finita de superficies libres.

Capítulo 4

Ondas elásticas de superficie en un sistema de periodicidad unidimensional

Cuando una superred infinita se trunca surgen modos de oscilación adicionales a los modos de volumen: son los *modos de superficie*. Estos se propagan por la frontera superred/vacío disminuyendo su amplitud exponencialmente hacia el interior de la estructura. Utilizamos el Método de la Supercelda para determinar sus propiedades. Se muestran resultados para una superred Al/W para las dos polarizaciones transversal y sagital.¹

¹ Parte del contenido de este Capítulo fue publicado en *Physical Review B* [33].

Presentamos el Método de la Supercelda como herramienta de cálculo de las ondas de superficie en CF's truncados. Estos modos, como su nombre lo indica, viajan a lo largo de la superficie de truncamiento, como guiados por ella penetrando poco a la estructura. Este método de cálculo es una generalización del Método de Desarrollo en Ondas Planas y permite determinar tanto la relación de dispersión como el perfil de intensidad de las ondas.

4.1 Método de la supercelda

La estructura para la cual queremos determinar los modos de superficie se muestra en la Fig. 4-1. Es una superred truncada con vacío en el exterior. El corte se hace con un plano paralelo al plano de las capas.

El método que estamos utilizando para el cálculo de los modos de volumen, tal como lo establecimos en el segundo capítulo, es el de desarrollo en ondas planas. Debido a la periodicidad espacial las soluciones las escribimos de acuerdo con el teorema de Bloch. Entonces, para utilizar la teoría ya desarrollada definiremos una celda unitaria constituida por una placa de la superred original rodeada de vacío [Fig. 4-2 (a)]. La placa de anchura C consiste de n (n impar) capas de material A alternadas con $n-1$ capas de material B . A este bloque unitario lo llamamos *supercelda*. Al repetirlo infinitamente sobre los puntos de una red con espaciamento D , formamos la *superestructura* ficticia mostrada en la Fig. 4-2 (b).

El método de la supercelda consiste en determinar los estados acústicos de esta superestructura. Las soluciones se agrupan en bandas. Algunas de estas bandas corresponden a aquellas obtenidas para la superred infinita. Sin embargo, debido a la presencia de las interfaces superred-vacío aparecen bandas adicionales que se ubican en las regiones de frecuencias prohibidas de la superred. Estos modos representan vibraciones ligadas a las superficies de la multicapa. Mientras más anchas sean tanto la multicapa y la región de vacío en la supercelda, más angostas serán estas bandas "de superficie". En el límite de supercelda muy grande estas bandas convergen a la curva de dispersión de las ondas de superficie de la superred semiinfinita.

Dentro de la supercelda la densidad de masa se expresa como

$$\rho(z) = \rho_v + [\rho'(z) - \rho_v] \theta\left(\frac{C}{2} - |z|\right), \quad (4.1)$$

donde ρ_v es el valor de la densidad en el medio V y ρ' es la función de densidad en la parte cristalina de espesor C .

12/5 + 206

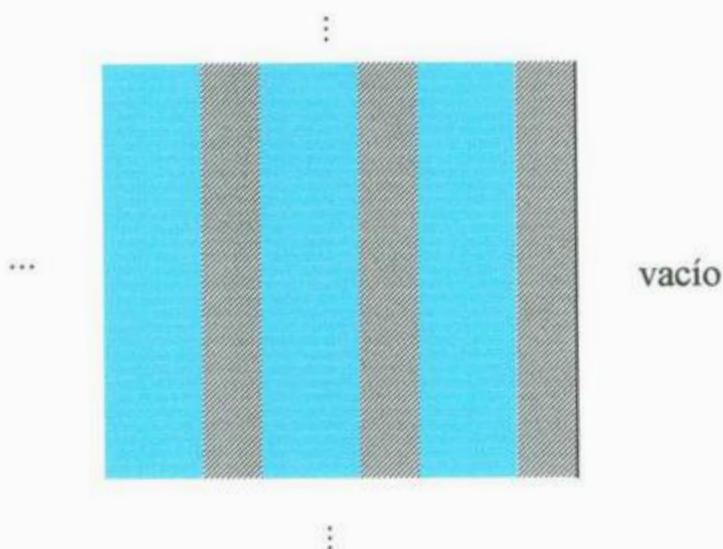


Figura 4-1 Estructura de estudio. Superred troncada. Los modos de superficie se propagan en la interface multicapa-vacío.

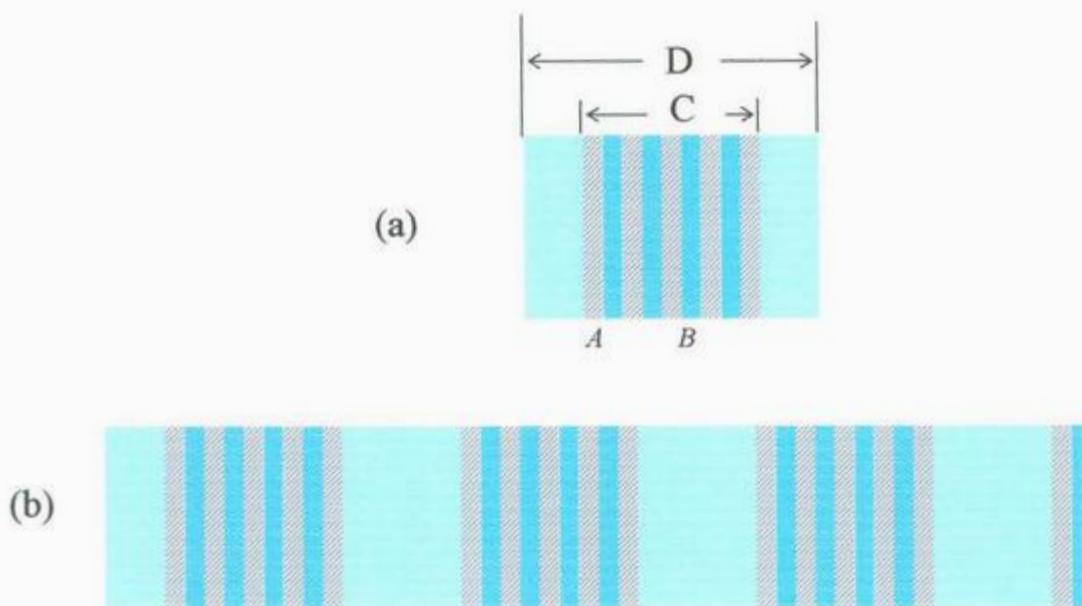


Figura 4-2 (a) Supercelda adaptada para el estudio del sistema. (b) Superestructura formada de la repetición infinita de la supercelda.

$$\rho'(z) = \rho_b + (\rho_a - \rho_b) \sum_j^n \theta\left(\frac{d}{2} - |z - z_j|\right). \quad (4.2)$$

En esta ecuación d es el ancho de las capas de material A . Recordemos que la parte “cristalina” de la supercelda esta conformada de un número n impar de capas de material A y un número $n-1$ de capas de material B . En este caso z_j representa la posición de los centros de las capas de material A .

Los coeficientes de Fourier están definidos por la expresión

$$\rho(G_z) = \frac{1}{D} \int_D \rho(z) e^{-iG_z z} dz. \quad (4.3)$$

Utilizando las ecuaciones (4.1)-(4.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(G_z) = & \left[\rho_v + (\rho_b - \rho_v)C + (\rho_a - \rho_b) \frac{na}{D} \right] \delta_{G_z,0} \\ & + \left[(\rho_b - \rho_v) \frac{C \operatorname{sen}(G_z C / 2)}{D G_z C / 2} \right. \\ & \left. + (\rho_a - \rho_b) \frac{d \operatorname{sen}(G_z d / a)}{D G_z d / 2} \sum_j^n \exp(-iG_z z_j) \right] (1 - \delta_{G_z,0}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Así el problema de calcular los modos de superficie consiste en resolver las mismas ecuaciones que hemos tratado en el caso de volumen pero con los coeficientes de Fourier un tanto más complicados.

4.2 Reproducción de las condiciones de vacío

La supercelda que representa al problema real debería construirse de placas de superred alternadas de capas de vacío que es el medio que dejamos cuando truncamos la superred infinita. Al aplicar el teorema de Bloch deberíamos obtener las bandas de la superestructura que resulta [ver la Fig. 4-2(b) con el medio V como vacío]. Así el método de la supercelda consiste en obtener los modos de oscilación para una serie infinita de placas de superred acopladas. Si utilizamos vacío, donde ningún tipo de onda elástica existe, dicho acoplamiento se hace imposible por la falta de conexión de las placas subsecuentes. Para obtener dicha conectividad proponemos sustituir el vacío por otro medio que sí lo permita.

Al momento de seleccionar los parámetros de este material sustituto es necesario pensar primeramente que estos valores deben ser tales que las condiciones de frontera en la interface superred-“medio auxiliar” sea lo más parecida posible a la de una interface superred vacío. Entonces debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Los parámetros del material V deben ser tales que las ondas elásticas no puedan propagarse en este medio.

2. En la interface con el medio V las condiciones de frontera deben de semejarse a las condiciones de frontera con el vacío, esto es, que las componentes normales y tangenciales del tensor de esfuerzos tiendan a cero.
3. La anchura de la placa de superred tiene que ser lo suficientemente grande para que las ondas de superficie que se exciten en cada lado no interactúen a través de la superred.
4. Las capas de material V tienen que ser lo suficientemente gruesas para que las ondas de superficie de placas de superred vecinas no interactúen.

En la obtención de los modos de superficie la condición 3 se satisface fácilmente. Como se verá en los ejemplos el desplazamiento elástico decae rápidamente al interior de la superred (a la tercera a cuarta celda el desplazamiento se hace prácticamente nulo). Respecto al punto cuatro también será posible satisfacer la condición de rápido decaimiento de tal manera que la separación entre las capas de superred no requiere ser demasiado grande.

Respecto al punto 2, la continuidad de la componente tangencial del tensor de esfuerzos [Tabla 1.A] se expresa como

$$\left[2\rho_a c_{at}^2 \frac{\partial u_{az}}{\partial z} + \rho_a (c_{at}^2 - 2c_{at}^2) \left(\frac{\partial u_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial u_{az}}{\partial z} \right) \right]_A = \left[\rho_v c_{vt}^2 \frac{\partial u_{vz}}{\partial z} + \rho_v (c_{vt}^2 - 2c_{vt}^2) \left(\frac{\partial u_{vx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{vz}}{\partial z} \right) \right]_V, \quad (4.5)$$

mientras que la continuidad de la componente normal del tensor de esfuerzos es

$$\left[\rho_a c_{at}^2 \left(\frac{\partial u_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial u_{az}}{\partial z} \right) \right]_A = \left[\rho_v c_{vt}^2 \left(\frac{\partial u_{vx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{vz}}{\partial z} \right) \right]_V. \quad (4.6)$$

En estas ecuaciones es evidente que al hacer

$$\rho_v c_{vt}^2 \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

y

$$\rho_v c_{vt}^2 \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

(4.5) y (4.6) tienden a las ecuaciones de la condición de frontera del medio A con vacío. Hay una infinidad de parejas ρ_v y $c_{v,t}$ que cumplen (4.7)-(4.8), pero no todas nos acercan a la realidad física que estamos describiendo. Una primera estrategia consiste en recordar que lo queremos semejar es vacío, de manera que lo más lógico es seleccionar

un medio de densidad extremadamente baja. Por otra parte, las ondas elásticas no deben oscilar en medio auxiliar V (consideración 1), pues en el vacío real las ondas no se propagan, por lo que nuestro modelo consiste en tener una onda elástica que aunque sí penetra, no oscila y decae rápidamente.

Se requiere entonces que la amplitud de desplazamiento sea fuertemente amortiguada en este medio auxiliar. Recordando que la línea de sonido de un material separa las regiones de frecuencia en donde el desplazamiento decae exponencialmente. Un tamaño grande de la velocidad produce una línea de sonido de muy alta pendiente (de hecho la línea casi paralela al eje de frecuencias). Entonces los resultados que representan la situación física se ubican al lado derecho de ésta línea. En nuestros cálculos hemos utilizado $\rho = 10^{-10}$ gr/cm³ y $c_N = c_{TV} = 10^7$ cm/s. Con el valor alto asignado a la velocidad las ondas en el material V se topan con una barrera que las amortigua fuertemente.

Como hemos dicho el método de la supercelda permite el cálculo de las estructuras de bandas asociadas a la superestructura con algunas de ellas correspondientes a modos de superficie. Además permite la visualización de los perfiles de las ondas. Esta herramienta es altamente confiable para el cálculo de las relaciones de dispersión, pero para observar los perfiles de los modos tenemos mejor precisión cuanto más alejados nos encontremos de la línea de sonido (ver Fig. 4-3) del medio auxiliar. Esto es debido a que las frecuencias ubicadas en regiones más lejanas a esa línea son menos penetrantes en el material V . Entre más nos acercamos más penetrantes son las ondas en el medio V aunque siguen decayendo. De hecho una vez traspasada la línea los modos comienzan a oscilar en V , perdiendo por completo las condiciones física exigidas para el cálculo.

4.3 Ejemplos de aplicación del Método de Supercelda

En esta parte se muestran la relación de dispersión y perfiles de onda obtenidos para la superred Al/W presentada en los Capítulos 2 y 3. Las curvas de dispersión tanto para modos sagitales como para modos transversales aparecen en la Fig. 4-3. Hemos utilizado 9 capas de aluminio y 8 capas de tungsteno y esto corresponde a dejar capas de aluminio en las superficies. El ancho de la capa de la superred es 0.7 veces el ancho

de la supercelda. Los resultados se obtuvieron con 601 ondas para el caso longitudinal y 801 ondas para el caso sagital.

Como puede observarse en la figura existen una serie de soluciones que arroja el método de la supercelda que caen fuera de la región de oscilaciones de volumen, ubicándose en las bandas prohibidas. Esas soluciones tienen desplazamiento elástico que decae hacia el interior de la placa de superred contenida en la supercelda. Además la figura muestra que una serie de soluciones producidas por el método de la supercelda ocupa la región de las bandas de volumen. En el resto del trabajo solo graficaremos los modos de superficie omitiendo las soluciones del interior de las bandas y la línea de vacío L_V .

En la Fig. 4-4 se muestra el perfil de onda transversal de los modos de superficie del sistema de la Fig. 4-3, para el punto en $k_x a = 6$ y $\omega a / c_{tAl} = 6.51$. El perfil muestra la oscilación del desplazamiento en el interior de la supercelda. También nos dejan ver el rápido decaimiento de los campos tanto en el interior como el exterior de la placa de superred.

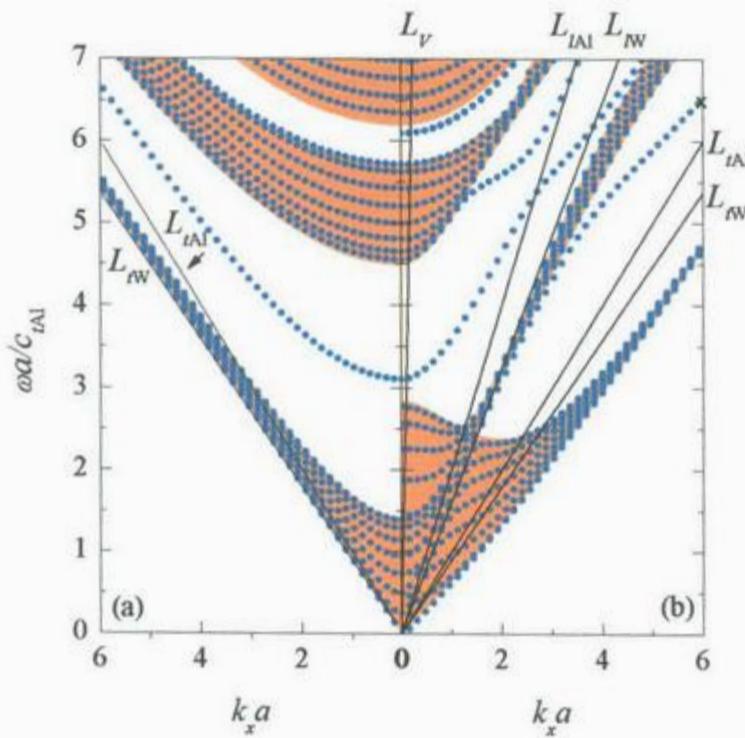


Figura 4-3 Estructura de bandas para una superred Al/W con $a=2d$. Se están sobreponiendo los resultados del método de la supercelda (puntos) a las bandas de volumen (zona sombreada). Resultados para (a) polarización transversal y (b) polarización sagital.

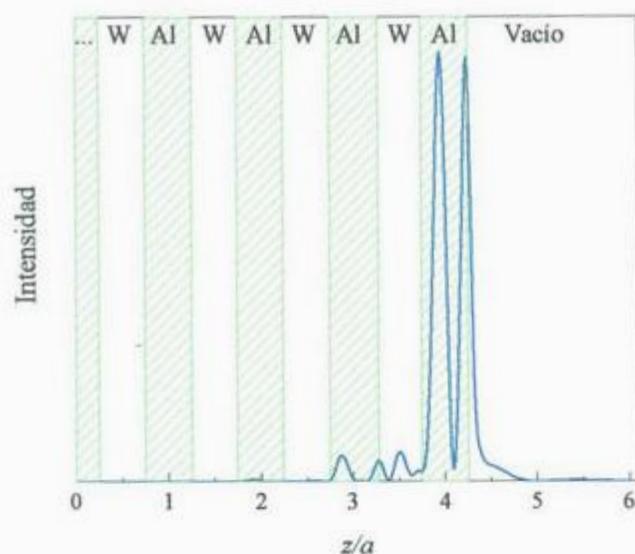


Figura 4-4 Perfil de onda para el modo de superficie señalado en la Fig. anterior. En esta figura puede observarse el decaimiento drástico en la región de "vacío". La onda de superficie de decae oscilando a una profundidad de una celda unitaria, guardando la periodicidad de la superred.

4.4 Modos de superficie y líneas de sonido

Los modos de superficie, como los que hemos mostrado en la sección anterior, son fuertemente dependientes del material de terminación de la multicapa. Para evidenciar esta dependencia y como un primer análisis de los modos de superficie obtenidos con el método de la supercelda, se muestra en la Fig. 4-5 el comportamiento de los modos de superficie de tipo transversal calculados en una estructura Au/Si con $a = 2d$ (los parámetros materiales pueden consultarse en la Tabla 2.A).

Cuando el material de la última capa es Au las curvas de dispersión de los modos de volumen adquieren una pendiente paralela a la línea de sonido del oro conforme k_x se incrementa. Cuando el material de terminación es Si, los modos de superficie se definen solo para vector de onda k_x finito, de tal manera que su velocidad de fase tiende al valor de la velocidad de sonido transversal en Si.

En general, para k_x grande las curvas de dispersión de los modos de superficie tienden a la línea de sonido del material de la última capa. Esto significa que los modos de superficie están estrechamente relacionados con los modos vibracionales de la capa en la superficie.

Los modos de superficie de tipo sagital y su influencia en la transmisión de ondas serán estudiados en el Capítulo siguiente.

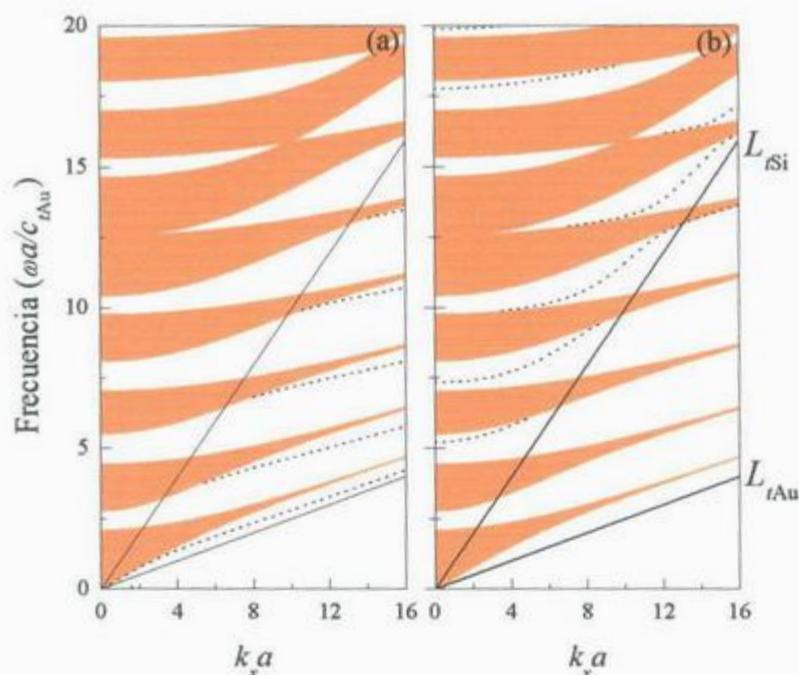


Figura 4-5 Ondas elásticas de superficie en función de la terminación de la superred. Bandas de volumen para una superred Au/Si, las líneas punteadas corresponden a los modos de superficie para terminación (a) en Au y (b) Si.

4.5 Conclusión

La contribución principal de este Capítulo es la propuesta del Método de la Supercelda para el cálculo de los modos de superficie de CF's de periodicidad 1D. En estos medios estudiamos el corte paralelo a las capas. La aplicación del método, tiene un inconveniente el cual no existe que en otros casos como es el electromagnético, y es que las ondas elásticas no se propagan en vacío. Fue entonces necesaria la definición de un material auxiliar V que semeje las condiciones de vacío: esfuerzo nulo en las superficies. Se seleccionó un medio de densidad extremadamente baja ($\rho_V = 10^{-10} \text{ gr/cm}^3$) y velocidad de sonido dos órdenes de magnitud mayor que las velocidades de sonido en el medio. De esta manera obtenemos una onda que aunque si penetra en el medio auxiliar, decae sin oscilar a una corta distancia de la superficie.

Por otra parte, como una aplicación del método y primer estudio de las propiedades de los modos de superficie, estudiamos la dependencia de los mismos con el material de terminación de la multicapa. Encontramos que los modos de superficie están fuertemente relacionados con los modos vibracionales de la última capa de la superred. Por consecuencia, para k_x grande la pendiente de cada uno de los modos de superficie tiende a la línea de sonido del material en la superficie.

Capítulo 5

Amplificación resonante de la transmisión de ondas acústicas en superredes

Presentamos el fenómeno de la amplificación resonante de la transmisión de ondas acústicas a través de superredes finitas inmersas en un medio fluido. El coeficiente de transmisión se incrementa significativamente cuando el vector de onda \vec{k} y la frecuencia ω satisfacen la relación de dispersión de una excitación de superficie. Encontramos amplificación de la transmisión tanto para ondas de propagación normal como para ondas de propagación oblicua. Este efecto se muestra en multicapas Al/W, Mo/W y Pt/Mo inmersas en agua. También se muestran resultados para casos donde se tiene un sólido como sustrato.¹

¹ El contenido de este capítulo fue publicado en *Physical Review* [33].

Recientemente se ha reportado una peculiaridad en la transmisión de ondas en superredes finitas: La intensidad de las ondas transmitidas en las frecuencias correspondientes a las bandas prohibidas puede amplificarse debido a la excitación resonante de vibraciones de superficie.[34,35] La amplificación fue demostrada teóricamente para sistemas GaAs-GaAs/AlAs-H₂O y GaAs-GaAs/AlAs-⁴He. En estos trabajos se concluye que la intensidad de las ondas penetrantes en la región de transmisión (H₂O o ⁴He) se amplifica cuando la onda longitudinal incidente (desde GaAs) se acopla con los modos vibracionales localizados en la interface multicapa-fluido. El campo de desplazamiento atraviesa la multicapa como una onda que decae exponencialmente alcanzando la interface opuesta con suficiente amplitud para excitar una vibración de superficie. Entonces este modo superficial transfiere una vibración amplificada al fluido.

A continuación demostramos la conexión entre los estados de superficie acústicos y los picos de transmisión extraordinaria. La relación de dispersión de los modos de superficie claramente define la posición de estos máximos en el eje de las frecuencias. Como veremos la amplificación ocurre no sólo para ondas de incidencia normal sino también para ondas de transmisión oblicua.

5.1 Vibraciones de superficie y transmitividad

Hay dos tipos de modos de vibración de carácter superficial:

- (1) *Ondas de superficie*. Estas vibraciones se caracterizan por que la amplitud de su oscilación decae con una envolvente exponencial en la dirección perpendicular a la superficie. Son los modos que hemos estudiado en el Cap. 4.
- (2) *Resonancias de superficie*. Estas excitaciones son esencialmente vibraciones de superficie cuyas frecuencias se encuentran en la región de las bandas permitidas. La coexistencia de las bandas de volumen y estas ondas de superficie resultan de su diferencia en polarización y simetría. Una onda de volumen principalmente transversal puede coexistir con una onda de superficie (resonancia) de polarización principalmente longitudinal, y viceversa, porque tienen un acoplamiento débil. Las resonancias de superficie tienen relación de dispersión para k_x finita y también pueden existir para $k_x = 0$.

resonancia de superficie. En el lado derecho de la figura observamos que la transmisión de las ondas longitudinales en el agua presenta dos máximos significativos. Las frecuencias de estos máximos están relacionadas claramente con las curvas de dispersión de las dos vibraciones de superficie en $k_x = 0$.

El sistema de interés lo mostramos en la Fig. 3-2. Una onda longitudinal incide desde un substrato (sólido o fluido) y es transmitido a un medio fluido. Ya hemos mencionado que para ondas de incidencia oblicua las oscilaciones dentro de la multicapa adquieren un carácter sagital porque aparece una componente transversal adicional. También hemos dicho que la transmitividad T presenta máximos tipo Fabry-Perot en frecuencias correspondientes a bandas permitidas. Ahora demostramos que existen excepciones, pues además de los máximos ocasionados por los modos de volumen, las oscilaciones de superficie constituyen un mecanismo auxiliar para la transmisión de energía acústica a través de la multicapa. Se encuentra además que bajo condiciones favorables (parámetros materiales y estructurales apropiados) estos máximos son de mayor intensidad que aquellos asistidos por vibraciones de volumen.

La relación de dispersión de las ondas de superficie la evaluamos de la forma descrita en el Capítulo anterior. Por otro lado las resonancias de superficie las identificamos al graficar los perfiles de las ondas cuyas frecuencias caen dentro de las bandas permitidas. La búsqueda la hicimos en las regiones de frecuencia donde aparentemente penetra una curva de dispersión de ondas de superficie a una banda permitida. En otras palabras, una resonancia de superficie corresponde a ondas de superficie una vez que su curva de dispersión penetra a la banda de volumen. Entonces a diferencia de un modo de superficie, la amplitud de una resonancia de superficie decae hacia el interior de la multicapa, pero no a cero, sino a un modo de volumen.

5.2 Resultados numéricos

En la Fig. 5-1 presentamos la transmitividad de una onda longitudinal a incidencia normal a través de una multicapa de seis celdas unitarias de Pt/Mo. El medio de incidencia es Mo y el medio de transmisión es agua. En el lado izquierdo de la figura presentamos las bandas sagitales y las curvas de dispersión de ondas de superficie en la interface superred-vacío. La última capa de la superred en contacto con el vacío es Mo. La línea a rayas corresponde a ondas de superficie y la curva a raya-punto representa la resonancia de superficie. En el lado derecho de la figura observamos que la transmisión de las ondas longitudinales en el agua presenta dos máximos significativos. Las frecuencias de estos máximos están relacionadas claramente con las curvas de dispersión de las dos vibraciones de superficie en $k_x = 0$.

Los máximos de transmisión asociados a modos de volumen de la superred finita se encuentran bajo la envolvente igual al valor de la transmisión asociada al problema de una interface entre el medio de incidencia y el de transmisión. La característica más importante de la transmisión asistida por vibraciones de superficie es que los máximos de intensidad asociados a ellas son mayores a esta envolvente. En la Fig. 5.1 (b), el límite para la transmisión ordinaria, asociada a modos de volumen, es $T = 0.1$. Como consecuencia de la asistencia del modo de superficie, el máximo en $\omega a / c_{Mo} = 4.62$ alcanza un valor de 0.68.

Este tipo de transmisión resonante ha sido tratado previamente [34] sólo para ondas de incidencia normal en frecuencias correspondientes a bandas prohibidas (ver el máximo en $\omega a / c_{Mo} = 8.75$ de la Fig. 5-1) pero el fenómeno no fue relacionado con una curva de dispersión de ondas de superficie. La Fig. 5-1 muestra además que la energía transmitida es también amplificada por las resonancias de superficie (ver máximo de transmisión en $\omega a / c_{Mo} = 4.62$).

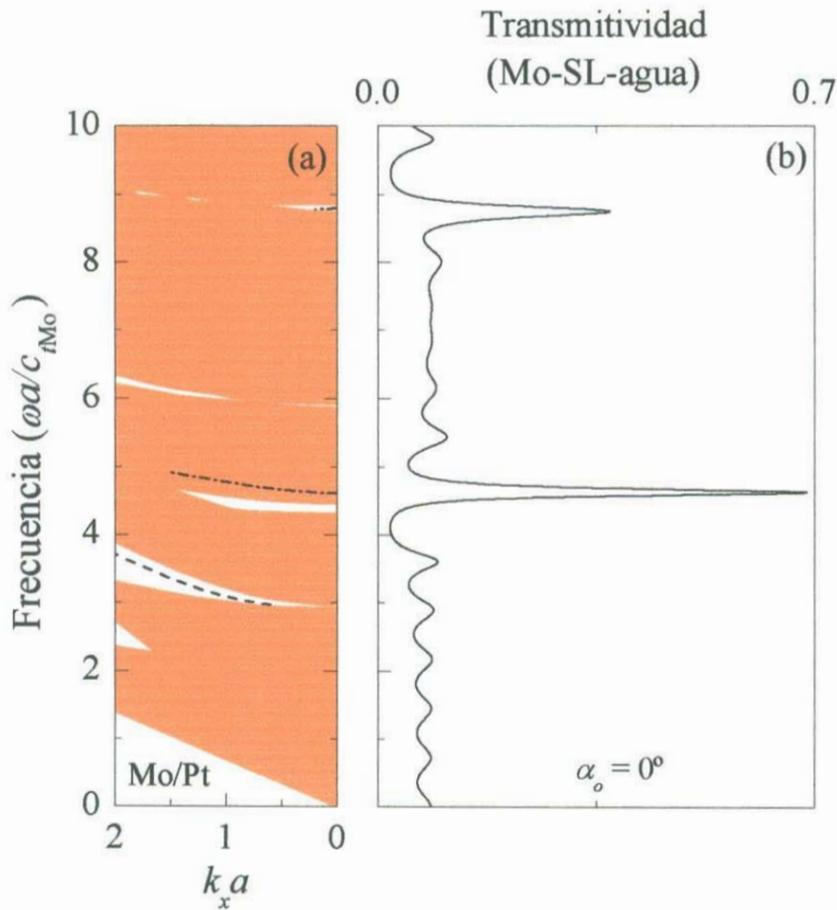


Figura 5-1 (a) Estructura de bandas de una superred infinita Pt/Mo con $a = 2d$ (región sombreada) y las curvas de dispersión de las vibraciones de superficie. (b) Transmisión a través de una superred de 13 capas colocadas sobre un sustrato de Mo desde donde inciden las ondas. La última capa (en contacto con el agua) es Mo.

Es importante recalcar que los modos de superficie aquí considerados corresponden a multicapas en vacío. El hecho de que los modos de superficie sean un canal de transmisión aun cuando la multicapa esté rodeada de medios materiales y no vacío se debe a que las características de las vibraciones de superficie del problema superred-vacío se mantienen cuando se sustituye el vacío por un fluido. La razón es que en los medios fluidos ideales, al igual que en el vacío, las ondas transversales no se propagan. Además, en general la impedancia de los fluidos es baja provocando que el valor de las componentes del tensor de esfuerzos en la interface sea pequeño, semejando así las condiciones de frontera con el vacío. [Es fácil mostrar que entre dos medios elásticos la continuidad del esfuerzo normal lleva a la identidad $Z_A(A_i - A_r) = Z_B(A_t)$, donde Z_A y Z_B son las impedancias de los medios y A_i , A_r y A_t son las amplitudes incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. Cuando $Z_A \gg Z_B$, como es nuestro caso si consideramos Z_A como la impedancia promedio de la superred, las soluciones con amplitud finita dentro de la superred son obtenidas aproximadamente de la condición sólido-vacío $Z_A(A_i - A_r) = 0$.]

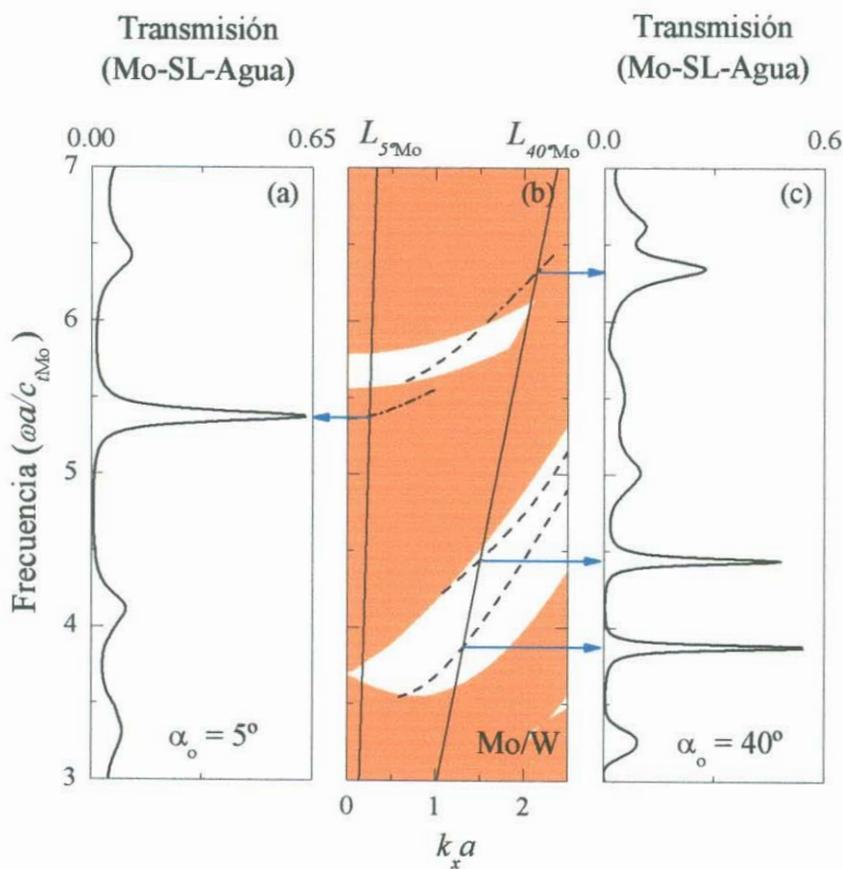


Figura 5-2 Amplificación de la transmisión a incidencia oblicua. Los cálculos corresponden a una superred Mo/W con $a = 2d$. Los paneles (a) y (c) muestran la amplificación de la transmisión a frecuencias correspondientes a las vibraciones de superficie. El panel (b) muestra la estructura de bandas de la superred infinita.

La transmisión extraordinaria no está restringida a incidencia normal. La Fig. 5-2 muestra como este efecto permanece para ondas de propagación oblicua. Las líneas de incidencia para $\alpha_o = 5^\circ$ y para $\alpha_o = 40^\circ$ [líneas continuas en el panel (b)] cruzan la relación de dispersión de cuatro excitaciones produciendo amplificación de la transmisión en las frecuencias respectivas. Este ejemplo corresponde a una superred Mo/W y la muestra para la transmisión está conformada por seis celdas unitarias con Mo como sustrato. Después de la última capa que es de Mo el medio de transmisión es agua. Mientras el máximo de menor frecuencia en el panel (b) tiene un perfil bien definido, el pico señalado de más alta frecuencia en este mismo panel tiene intensidad baja. La razón es que este máximo es producido por una resonancia de superficie débil que se ubica casi en el límite derecho de la curva de dispersión correspondiente, donde tal resonancia se desvanece transformándose en modo de volumen. Los otros tres picos (uno en el panel de la izquierda y los dos de menor frecuencia en el panel de la derecha) corresponden a excitaciones bien definidas.

Hemos encontrado picos agudos de transmisión total sólo cuando la superred finita esta sumergida en un fluido. La Fig. 5-3 muestra los picos para un sistema agua-superred-agua. Las bandas de volumen en el panel (a) corresponden a una superred Pt/Mo. Las líneas discontinua y punteada son las relaciones de dispersión de los estados de superficie en una superred truncada terminada con Mo y Pt, respectivamente. Esta figura muestra como la posición de la curva de dispersión cambia cuando la multicapa termina con una u otra capa en la superficie. La línea continua es la línea de incidencia a 17° . Las dos flechas indican los puntos (k_x, ω) dentro de la banda prohibida donde la amplificación ocurre. Los paneles (b) y (c) muestran los coeficientes de transmisión de estas dos frecuencias en una muestra de diez celdas unitarias. Como puede observarse, los modos de superficie abren un rango finito (muy angosto) de frecuencias de transmisión dentro de la banda prohibida. Los otros máximos en estos paneles corresponden a los modos oscilatorios (tipo Fabry-Perot) que la superred soporta, como fue discutido previamente.

La amplificación de la transmisión es fuertemente dependiente de n , el número de celdas unitarias en la multicapa. En la Fig. 5-4 (b) mostramos como varía el máximo de la Fig. 5-3(c) con el número celdas. La transmisión mayor se presenta para $n = 10$, mientras que para $n > 10$ la transmisión es cada vez menor pues amplitud del desplazamiento que mediante tunelamiento excita el modo de superficie va

disminuyendo. En general, si se tiene una la distancia de decaimiento β para la onda, la amplificación óptima se obtendrá para muestras de grosor $L_s = 2\beta$.

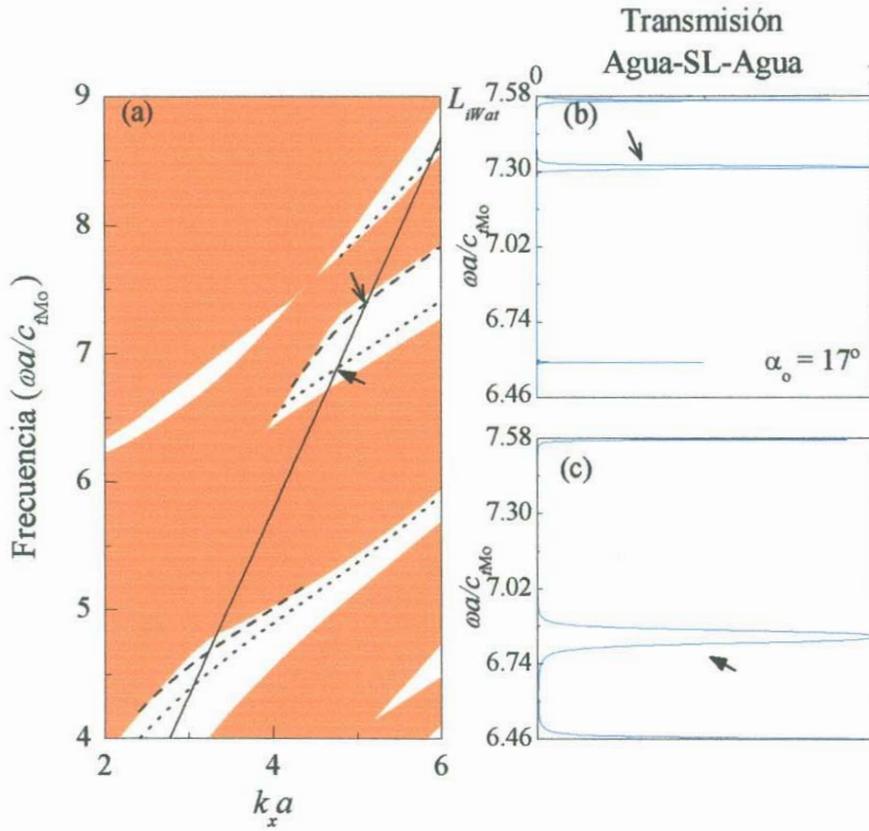


Figura 5-3 Dependencia de los máximos de transmisión con la terminación de la multicapa. (a) La misma estructura de bandas de la Fig. 5-1 pero graficada en un rango diferente. La línea de incidencia del agua a 17° cruza las líneas punteada y a rayas que corresponden a vibraciones superficiales cuando la multicapa termina con Pt o Mo, respectivamente. Los paneles (b) y (c) muestran la transmisión correspondientes a los máximos de frecuencias indicadas por las dos flechas en el panel (a).

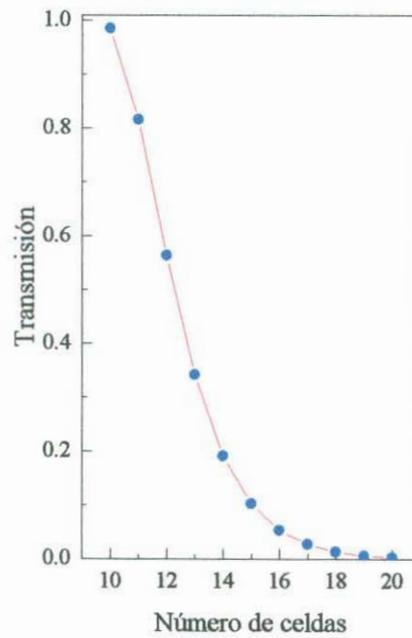


Figura 5-4. Estudio del máximo de transmisión de la Fig. 5-3(c) con el número de celdas.

5.3 Conclusiones

Hemos demostrado la amplificación resonante de la transmisión de ondas longitudinales que atraviesan una superred sólida. Este fenómeno es causado por la asistencia de excitaciones de superficie las cuales pueden ser de dos tipos: (a) ondas de superficie, cuya relación de dispersión cae dentro de una banda prohibida, y (b) resonancias de superficie, con frecuencias contenidas en una banda de volumen.

La amplificación resonante se mantiene aún para ondas de incidencia oblicua. Se encuentra que los máximos de la transmisión tienen un valor mayor que los asociados a las oscilaciones tipo Fabry-Perot de los modos de la superred finita. Siendo además su intensidad fuertemente dependiente del número de capas que constituyen la superred. Hemos concluido que la transmisión asistida es máxima cuando la multicapa tiene un grosor del doble de la distancia de decaimiento de la excitación de superficie.

Transverse elastic waves in superlattices: The Brewster acoustic angle

B. Manzanares-Martínez

Programa de Posgrado en Ciencias (Física) de la Universidad de Sonora, Calle Rosales y Boulevard Luis Encinas, Hermosillo, Sonora 83000, México

F. Ramos-Mendieta

Centro de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, Apartado Postal 5-088, Hermosillo, Sonora 83190, México

(Received 22 September 1999)

We use a plane wave basis to study the transverse acoustic waves in elastic superlattices—artificial binary structures of periodic mass density $\rho(z)$ and periodic transverse elastic velocity $c_t(z)$. The bulk frequency bands for oblique propagation support minigaps that can close due to the edge crossing of subsequent bands. Some of these crossings are explained in terms of the acoustic Brewster angle θ_{aB} that is a function of the material parameters only. A second condition for the complete shrinking of the gaps that involves the structural parameters is also discussed. The surface waves in the corresponding truncated superlattices are obtained by use of the supercell method. The dispersion curves of these waves are strongly dependent on the material of the layer at the surface—the surface waves that appear for a selected layer at the surface can completely disappear when the last layer is the other one. Specific applications are given for Zn/Fe, Pb/Ge, and Si/Au superlattices.

It is known that in periodic composite media the propagation of acoustic waves satisfies a band structure—the interference of the scattered waves opens up frequency gaps where the propagation of acoustic energy is forbidden. Several theoretical and experimental works have been performed to obtain the dispersion curves (wave vector vs frequency) of bulk and surface waves in structures of one-dimensional,^{1–3} two-dimensional,^{4–8} and three-dimensional⁹ periodicity. In particular for semi-infinite layered structures (truncated superlattices) the existence of surface waves has been shown. These waves are caused by interference effects of the waves scattered by all the layers and have no counterpart in a homogeneous medium.¹

Transverse surface waves (waves of shear horizontal polarization) are elastic vibrations with maximum particle displacement at the surface. In truncated superlattices, with the surface plane parallel to the interfaces between the layers, such waves propagate with the displacement \vec{u} perpendicular to both the wave vector k_{\parallel} (which is parallel to the surface) and the direction of periodicity. The intensity of the waves is damped with an envelope exponential function inside the superlattice in the perpendicular direction away from the surface, which means that the dispersion curves of the surface waves lie inside the gaps of the bulk bands of real k_{\parallel} . Thus, in order to obtain the frequency regions in which the surface waves can exist, it is necessary to calculate initially such bulk bands. The band structure can support edge crosses of subsequent bands. It depends on the material and structural parameters of the superlattice. As a consequence, the dispersion curves of the surface waves could have limits for the wave vector.

In this paper we have a double purpose. On the one hand, in analogy with the electromagnetic problem we introduce the Brewster acoustic angle θ_{aB} as a new element to be considered for the physical interpretation of the bulk acoustic bands in superlattices. When the wave vector component k_{\parallel} satisfies the Brewster condition stationary waves in the di-

rection of periodicity—and frequency gaps—cannot exist because the zero reflection of the waves at the interfaces of the superlattice eliminates the interference effects. A second condition that produces similar effects as the Brewster angle is introduced. This other condition involves the structural parameters of the superlattice. On the other hand, we demonstrate the applicability of the supercell method^{10,11} to calculate transverse acoustic surface waves. As we shall see, the method requires that we replace the outside air region, where transverse acoustic oscillations cannot exist, with another auxiliary medium in which the waves are strongly damped.

Let us consider an infinite periodical structure of mass density $\rho(z)$ and transverse speed of sound $c_t(z)$. It consists of alternated layers of homogeneous materials with parameters ρ_a, c_{ta} and ρ_b, c_{tb} of thicknesses a and b , respectively. With the particle displacement $\vec{u}(x, z)$ parallel to the y axis, we look for solutions for the scalar equation⁴

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot (\rho c_t^2 \vec{\nabla}_u), \quad (1)$$

where the operator $\vec{\nabla}$ has components only in the x and z directions. By use of the Bloch theorem and making the Fourier expansion of the periodic functions $\rho(z)$ and $\rho(z)c_t^2(z)$ (the elastic constant c_{44}), we find that the dispersion curves of the waves in the superlattice acquire band form. We are interested in the bands projected on the x direction (we have selected this direction to study the propagation of surface waves in the truncated superlattice). Thus we solve Eq. (1) looking for solutions with the wave vector $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_z \hat{k}$. The component k_z takes values from the one-dimensional Brillouin zone introduced by the periodicity on the z direction: $0 < k_z < \pi/d$, where $d = a + b$. On the other hand, the component k_x is unlimited, $0 < k_x < \infty$. The projected bands $\omega_n(k_x)$ allow us to determine the frequency regions where k_z

Propagation of acoustic waves through finite superlattices: Transmission enhancement by surface resonance assistance

B. Manzanares-Martínez

Programa de Posgrado en Ciencias (Física) de la Universidad de Sonora, Calle Rosales y Boulevard Luis Encinas, Hermosillo,
Sonora 83000, Mexico

F. Ramos-Mendieta

Centro de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, Apartado Postal 5-088, Hermosillo, Sonora 83190, Mexico

(Received 7 June 2002; published 10 September 2002)

We report transmission enhancement of acoustic waves through finite solid superlattices embedded in a fluid medium. The transmission rate increases significantly when the wave vector k and frequency ω satisfy the dispersion relation of a surface excitation. We found enhancement of the transmission for both normal and oblique waves. The effect is demonstrated for Al/W, Mo/W, and Pt/Mo multilayers embedded in water. Multilayers supported by solid substrates are also investigated.

DOI: 10.1103/PhysRevB.66.092302

PACS number(s): 43.20.+g, 62.30.+d, 68.35.Ja, 68.65.Cd

The so-called *acoustic*—or *phononic*—*crystals* are artificial heterogeneous arrays with periodic elastic properties. In recent years the interest in these structures has increased due to the potential applications, and for the expectation of new fundamental phenomena, related to their main property: *they can support frequency gaps for the acoustic wave propagation.*^{1–6} In particular for the superlattice, the array of one-dimensional periodicity, theoretical evidence of phenomena associated with the existence of a band gap, such as defect states and surface waves, have been widely studied.^{7–10}

With respect to surface waves, a peculiarity of the wave transmission in finite superlattices placed between liquids or solids was recently reported: the displacement intensity of the transmitted waves at frequencies in the gaps can be enhanced due to the resonant excitation of a surface vibration. The enhancement was demonstrated theoretically for the GaAs-(GaAs/AlAs)_N-H₂O and GaAs-(GaAs/AlAs)_N-⁴He systems.^{11,12} It was concluded that the intensity of the penetrating wave into the transmission region (H₂O or ⁴He) is amplified when the longitudinal incoming wave (from the GaAs medium) couples to a vibrational mode localized at the superlattice-fluid interface. The field displacement traverses the superlattice slab as a decaying wave reaching the opposite interface with sufficient amplitude to excite the surface vibration. Then, vibrational motion that propagates as a wave is transferred to the fluid. (We found that this *auxiliary* mechanism for wave transmission is not exclusive of the acoustic problem. Extraordinary tunneling magnetoresistance in ferromagnet-insulator-ferromagnet junctions can be explained in terms of metal-induced gap states of surface type.)¹³

In this paper we demonstrate explicitly the connection between the acoustic surface states and the peaks of extraordinary transmission. We found that the dispersion relations of the surface vibrations clearly define the position of the peaks on the frequency axis. Our main purpose is to demonstrate that the amplification of the transmittance occurs not only for normally incident waves (as was in fact already published) but also for oblique waves.

There are two types of vibrational modes with surface character that can amplify the wave transmission.

(1) *Surface waves.* The vibration is characterized by decaying displacement amplitude with an envelope exponential function in the perpendicular direction away from the surface. The surface waves satisfy a dispersion relation $k_x = k_x(\omega)$, where k_x is a real wave vector parallel to the surface (we are not considering absorption effects) and ω is an angular frequency of a bulk gap. The surface modes can exist even at $k_x = 0$. In this limit, the displacement profile remains as a surface wave in the perpendicular direction inside the layered medium but does not oscillate along the surface direction.

(2) *Surface resonances.* These excitations are essentially surface waves of frequencies in the region of an allowed bulk band. The coexistence of surface and bulk oscillations results from the symmetry and polarization differences between the modes. A transverse bulk band can coexist with a surface wave (the resonance) of longitudinal polarization, and vice versa, because they do not couple. The surface resonances have dispersion curve of finite k_x range and can also exist at $k_x = 0$.

We are interested in the system shown in Fig. 1. A longitudinal wave is incident from the substrate (fluid or solid) and the transmission medium is a fluid. For oblique incidence the waves inside the multilayer acquire a mixed character because an additional transverse component appears. As we shall see, the transmittance T , which is obtained directly from the boundary conditions for the stress $\sigma_{\alpha\beta}$ and the displacement \vec{u} at each interface, reveals that in addition to the nonoscillatory modes of surface character discussed above, the layered slab also supports oscillatory modes. When one of these modes is excited, a maximum of transmission appears. Thus, as a function of the frequency, the transmittance oscillates. Some authors refer to this effect as one of Fabry-Perot type. Under favorable conditions (appropriate structural and material parameters) these maxima are of much minor intensity than the peaks of transmission assisted by surface vibrations.

Surface elastic waves in solid composites of two-dimensional periodicity

B. Manzanares-Martínez

Programa de Posgrado en Ciencias (Física) de la Universidad de Sonora, Calle Rosales y Boulevard Luis Encinas, Hermosillo, Sonora 83000, México

F. Ramos-Mendieta

Centro de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, Apartado Postal 5-088, Hermosillo, Sonora 83190, México

(Received 10 November 2002; revised manuscript received 6 August 2003; published 3 October 2003)

We have studied the elastic surface waves in a truncated two-dimensional solid composite. The periodic structure is constituted by a square array of parallel tungsten (W) cylinders embedded in silicon (Si). The surface plane that terminates the crystal cuts perpendicularly the plane of periodicity along the (10) direction. Thus the surface plane is parallel to the axes of a row of cylinders. We found that surface waves can propagate with wave vector laying along the one dimensional surface periodicity that results from the truncation. Both mixed and transverse polarizations were considered, but only surface waves of mixed polarization exist when the truncation leaves complete cells at the surface. We have also studied the guidance of elastic waves by a homogeneous layer of Si grown at the surface of the crystal. The wave confinement within this adlayer is possible due to the scattering effects suffered by the field of displacement inside the periodic structure at frequencies in the band gaps.

DOI: 10.1103/PhysRevB.68.134303

PACS number(s): 43.20.+g, 43.40.+s, 62.30.+d, 68.35.Ja

I. INTRODUCTION

It is known that elastic vibrations in the periodic arrays called phononic crystals (PCs) satisfy a frequency band structure.¹⁻⁶ This means that depending on their structural and material parameters the PCs can support frequency ranges of forbidden wave propagation—the *band gaps*. This ability to avoid the propagation of acoustic energy in specific frequency ranges gives these artificial material potential applications in transducer and filter technology.⁷⁻¹⁰

Up to now the properties of the acoustic bulk bands in two-dimensional (2D) crystals have been a well studied topic. Several reports of arrays of solid cylinders embedded in fluids or in a different solid, with materials as aluminum (Al), copper (Cu), polymers, mercury (Hg), air, etc., have shown the existence of band gaps.¹¹⁻¹⁶ In addition, surface waves in truncated crystals have been also studied in structures with the plane of truncation parallel to the plane of periodicity.¹⁷⁻¹⁹ The waves propagate along the 2D periodic surface and decay exponentially into the crystal. Although scattering effects are present on the plane of propagation, we may say that these waves are of Rayleigh type because their amplitude decays along the direction of homogeneity—the direction perpendicular to the plane of periodicity.

There exists, however, another configuration that also supports elastic surface waves. In this paper we shall present some properties of the surface waves in a 2D PC of square symmetry with the plane of truncation parallel to the axes of a row of cylinders. The surface (now of implicit one-dimensional periodicity) cuts the crystal through the interstitial region (see Fig. 1). In addition to the Rayleigh-type waves for which the displacement amplitude decays exponentially into the crystal, a special type of vibration confinement at the surface occurs due to the coherent scattering of the waves inside the crystal. As we shall see, in the latter case the elastic displacement oscillates in the direction per-

pendicular to the surface, but decays with an exponential modulation.

Experimental evidence in a solid/fluid system that shows the existence of surface waves was recently published.¹ An square array of Hg cylinders in Al with a lattice constant $a = 2.8$ mm exhibited a surface vibration at the frequency of 0.75 MHz. However, in spite of the accessibility of these results, we are not aware of a report treating these waves in solid/solid composites. In what follows we present a numerical study of these waves in a crystal of W cylinders in Si (impedance average contrast $Z_W/Z_{Si} = 4.2$). The results are representative of the general behavior (similar surface waves were also found in systems of W cylinders in Al and Cu cylinders in Al). The only requirement is a relative high impedance contrast in order to produce band gaps as large as possible for hosting the dispersion relation $\omega(k)$ of the surface waves. All the calculations were made employing ma-

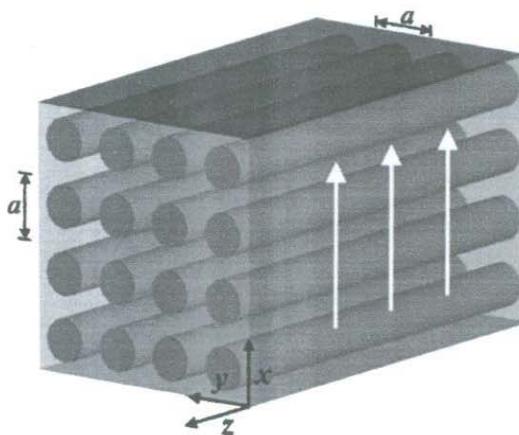


FIG. 1. The truncated crystal with x,z the cutting plane. The surface is defined by $y=0$. The arrows represent the direction of propagation of surface waves.